Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Баталин, А. М. Семихатов, Ассоциативность и операторное гамильтоново квантование калибровочных теорий, *ТМФ*, 2003, том 136, номер 3, 339–364

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf229>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 06:32:17

© 2003 г.

И. А. Баталин*, А. М. Семихатов*

АССОЦИАТИВНОСТЬ И ОПЕРАТОРНОЕ ГАМИЛЬТОНОВО КВАНТОВАНИЕ КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЙ

Показано, что формализм БРСТ-квантования калибровочных теорий можно распространить на структуру ассоциативной алгебры, причем переход от соответствующей алгебры Ли к ассоциативной алгебре достигается с использованием операторного квантования приводимых калибровочных теорий. БРСТ-дифференциал, кодирующий ассоциативность умножения в алгебре, построен как квадратичный дифференциальный оператор второго порядка на *bar*-резольвенте.

Ключевые слова: ассоциативные алгебры, БРСТ-дифференциал, *bar*-резольвента, некоммутативные дифференциальные формы.

1. ВВЕДЕНИЕ

Методы БРСТ-квантования систем со связями (или, что то же, калибровочных теорий) [1]–[3] имеют репутацию эффективного подхода, выходящего за рамки той области, в которой эти методы были исходно созданы. В гамильтоновом формализме БРСТ-квантование системы со связями первого рода сводится к построению нечетного дифференциала (“БРСТ”-оператора) в системе, расширенной духами и сопряженными импульсами (на классическом уровне являющимися переменными Кошуля–Тейта [4]). Однако формализм ограничен алгебраическими структурами, построенными на основе (градуированно) *антисимметричных* операций (порожденных коммутаторами или скобками Пуассона).

В данной работе мы показываем, что гамильтонов БРСТ-формализм применим также и к градуированным *ассоциативным* алгебрам, а потому не ограничен Ли-подобными структурами. Для заданной ассоциативной алгебры $\mathcal{A}$ мы построим такой дифференциал Ω , что соотношение $\Omega^2 = 0$ является “БРСТ-перекодировкой” ассоциативности умножения в $\mathcal{A}$.

Конструкция содержит “тривиальную” часть – ассоциированную (градуированную) алгебру Ли $(\mathcal{A}, [\ , \])$, которая обрабатывается стандартными БРСТ-методами, и “сложную” часть, состоящую в распространении БРСТ-схемы на ассоциативную алгебру с использованием методов *приводимых* калибровочных теорий [5] таким образом, что

*Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия. E-mail: ams@sci.lebedev.ru

bar-резольвента алгебры $\mathcal{A}$ рассматривается как набор данных, определяющих приводимую калибровочную теорию. В соответствии с БРСТ-идеологией мы вводим духи для каждого члена bar-резольвенты, квантуем их и ищем БРСТ-дифференциал Ω с духовым числом 1; мы также требуем, чтобы Ω был не более чем квадратичным по духам и не более чем билинейным по импульсам, и чтобы ни один импульс не входил в Ω квадратично. БРСТ-дифференциал является, таким образом, квадратичным *дифференциальным оператором второго порядка на bar-резольвенте*; более того, его квадратичная часть является оператором со скалярными коэффициентами. В точном виде это утверждение будет сформулировано ниже (см. п. 3.4).

Хотя наша конструкция дифференциала Ω мотивирована БРСТ-методами, соответствие с известным БРСТ-формализмом для приводимых калибровочных теорий несколько ограничено, поскольку bar-резольвента бесконечна, а потому соответствующая приводимая калибровочная теория имеет бесконечную степень приводимости. Несмотря на определенные усилия [5], [6], дополнительно мотивированные возможными применениями в теории струн [7], бесконечно-приводимые калибровочные теории не получили законченной формулировки, позволяющей доказать существование БРСТ-дифференциала (или решения мастер-уравнения в лагранжевой формулировке). Стандартный индукционный аргумент, применимый к конечно-приводимым калибровочным теориям, не работает в бесконечно-приводимом случае, и поэтому нам придется дать независимое доказательство для ассоциативных алгебр; мы построим рекурсионную процедуру, которая приводит к решению уравнения $\Omega^2 = 0$. Это позволит также обойти другое усложнение: в отличие от “настоящих” калибровочных теорий, где связи первого рода удовлетворяют так называемым соотношениям инволюции (превращающимся в соотношения в терминах скобок Пуассона при $\hbar \rightarrow 0$)

$$[T_\alpha, T_\beta] = i\hbar \sum_{\gamma} U_{\alpha\beta}^{\gamma} T_{\gamma}, \quad (1.1)$$

в которых $U_{\alpha\beta}^{\gamma}$ – некоторые операторы, коммутаторы в $\mathcal{A}$ не содержат постоянной Планка $\hbar$. Другими словами, постоянная Планка в предлагаемом формализме равна 1 (точнее, $-i$), а потому у соответствующей калибровочной теории нет классического предела, и БРСТ-формализм следует применять непосредственно на операторном уровне.

Данная работа построена следующим образом. В разделе 2 мы напоминаем основные факты о приводимых калибровочных теориях. В п. 3.1 объясняем соотношение между разделом 2 и основной частью раздела 3. В п. 3.3 мы вводим духи и строим дифференциал как БРСТ-оператор в специальной (бесконечно) приводимой калибровочной теории. Основной результат о том, что $\Omega^2 = 0$, сформулирован в п. 3.4 и доказан в п. 3.5–3.7.

2. ПРИВОДИМЫЕ СИСТЕМЫ СО СВЯЗЯМИ

В данном разделе суммированы основные положения гамильтонова БРСТ-квантования систем со связями, используемые для мотивировки дальнейших построений. Связь между БРСТ-формализмом и нашей основной конструкцией будет объяснена в п. 3.1.

2.1. Классические приводимые системы со связями. Классическая *приводимая система со связями* [5] состоит из

– симплектического многообразия $\mathcal{X}$ (в действительности – симплектического векторного пространства) и (достаточно гладких) функций T_{α_0} , $\alpha_0 \in \mathcal{J}_0$, на $\mathcal{X}$, называемых *связями*, нулевой локус которых называется “поверхностью” связей $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$ и рассматривается физиками как нечто очень близкое к гладкому многообразию;

– функций $Z_{\alpha_n}^{\alpha_{n-1}}$, $\alpha_i \in \mathcal{J}_i$, на $\mathcal{X}$, удовлетворяющих ранговым условиям и уравнениям “нулевых мод” (2.1) и (2.2), приведенным ниже.

Рассмотрим эти составляющие подробнее. Если связи линейно независимы над $C^\infty(\mathcal{X})$, теория называется неприводимой; в противном случае существуют функции $Z_{\alpha_1}^{\alpha_0}$, $\alpha_1 \in \mathcal{J}_1$, на $\mathcal{X}$ такие, что

$$\sum_{\alpha_0 \in \mathcal{J}_0} Z_{\alpha_1}^{\alpha_0} T_{\alpha_0} = 0. \quad (2.1)$$

Функции $Z_{\alpha_1}^{\alpha_0}$, в свою очередь, могут быть линейно зависимыми над $C^\infty(\mathcal{X})$, что вводит в рассмотрение некоторые функции $Z_{\alpha_2}^{\alpha_1}$, и т.д.; точнее, каждая последующая линейная зависимость требуется только в “слабой” форме, т.е. по модулю идеала $\mathcal{J}$, порожденного связями $\{T_{\alpha_0}\}$:

$$\sum_{\alpha_{n-1}} Z_{\alpha_n}^{\alpha_{n-1}} Z_{\alpha_{n-1}}^{\alpha_{n-2}} \in \mathcal{J}, \quad \alpha_i \in \mathcal{J}_i, \quad n \geq 2 \quad (2.2)$$

(мы будем иногда опускать верхнее n в обозначениях). При ограничении на поверхность связей это дает комплекс, который является по определению точным. Таким образом, если рассматривать каждую $Z_{\alpha_n}^{\alpha_{n-1}}$ как прямоугольную матрицу, ранги их ограничений на $\mathcal{S}$ должны удовлетворять условиям

$$\begin{aligned} \text{rank}\left(Z_{\alpha_{n+1}}^{\alpha_n}\right)\Big|_{\mathcal{S}} + \text{rank}\left(Z_{\alpha_n}^{\alpha_{n-1}}\right)\Big|_{\mathcal{S}} &= \text{card } \mathcal{J}_n, \quad n \geq 1, \\ \text{rank}\left(Z_{\alpha_1}^{\alpha_0}\right)\Big|_{\mathcal{S}} + \text{rank}\left(\frac{\partial T_{\alpha_0}}{\partial x^i}\right)\Big|_{\mathcal{S}} &= \text{card } \mathcal{J}_0, \end{aligned}$$

где $\{x^i\}$ – любая локальная система координат в окрестности $\mathcal{S}$ в $\mathcal{X}$. Эти ранги предполагаются постоянными в некоторой окрестности $\mathcal{S}$ в $\mathcal{X}$ [3], [5]. Мы будем говорить о Z как о “нулевых модах.” Введем также $\mathbb{Z}_2$ -градуировки

$$\varepsilon(Z_{\alpha_n}^{\alpha_{n-1}}) = \varepsilon_{\alpha_n} + \varepsilon_{\alpha_{n-1}}, \quad \varepsilon(T_{\alpha_0}) = \varepsilon_{\alpha_0}. \quad (2.3)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Система со связями называется ℓ -приводимой, если $Z^{\ell+1} = 0$ и $Z^\ell \neq 0$. В частности, 0-приводимая теория является неприводимой (соотношения (2.1) отсутствуют).

Систему со связями можно расширить вспомогательными переменными, называемыми духами и сопряженными импульсами, так, чтобы существовало нечетное гамильтоново векторное поле $\{\Omega, -\}$ (БРСТ-оператор), квадрат которого равен нулю, а низшие члены в разложении Ω по духам включают связи и нулевые моды Z . Во избежание повторов рассмотрим подробности сразу в квантовой ситуации.

2.2. Квантовая приводимая система со связями. Математическое существование квантовой теории является деликатным вопросом, и следующие утверждения, строго говоря, чувствительны к выбранному квантованию. Деформационное квантование [8] само по себе не позволяет автоматически говорить об *операторных* соотношениях, однако мы будем их использовать при формулировке основных положений, составляющих фольклор калибровочных теорий.

2.2.1. На квантово-механическом уровне T_{α_0} и $Z_{\alpha_n}^{\alpha_n-1}$ становятся операторами из некоторой алгебры $\mathbb{A}^{\hbar}$. Уравнение (2.1) при этом сохраняет свой вид в терминах элементов $\mathbb{A}^{\hbar}$, а соотношения (2.2) принимают следующий вид:

$$\sum_{\alpha_{n-1}} Z_{\alpha_n}^{\alpha_n-1} Z_{\alpha_{n-1}}^{\alpha_n-2} = \sum_{\alpha_0} \Pi_{\alpha_n-2\alpha_0}^{\alpha_n-2\alpha_0} T_{\alpha_0} + \hbar \mathbb{A}^{\hbar}, \quad \alpha_i \in \mathcal{J}_i, \quad (2.4)$$

где $\Pi_{\alpha_n-2\alpha_0}^{\alpha_n-2\alpha_0} \in \mathbb{A}^{\hbar}$.

2.2.2. *Состав духов.* Алгебра $\mathbb{A}^{\hbar}$ расширяется до $\mathbb{A}_{\text{gh}}^{\hbar}$ множеством операторов $\{C^A\}$ (духов) и $\{\bar{\mathcal{P}}_A\}$ (сопряженных импульсов), удовлетворяющих каноническим градуированным коммутационным соотношениям $[\bar{\mathcal{P}}_B, C^A] \equiv \bar{\mathcal{P}}_B C^A - (-1)^{\varepsilon(\bar{\mathcal{P}}_B)\varepsilon(C^A)} C^A \bar{\mathcal{P}}_B = i\hbar \delta_B^A$. Здесь A – набор (мульти)индексов, $A = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$, $\alpha_i \in \mathcal{J}_i$, так что духи представляют собой набор $\{C^A\} = \{C^{\alpha_0}, \dots, C^{\alpha_\ell}\}$, $\alpha_i \in \mathcal{J}_i$, и, аналогично, для импульсов $\{\bar{\mathcal{P}}_B\} = \{\bar{\mathcal{P}}_{\beta_0}, \dots, \bar{\mathcal{P}}_{\beta_\ell}\}$, $\beta_i \in \mathcal{J}_i$; $\mathbb{Z}_2$ -градуировки духов и импульсов равны $\varepsilon(C^{\alpha_n}) = \varepsilon(\bar{\mathcal{P}}_{\alpha_n}) = \varepsilon_{\alpha_n} + n + 1$; духовые числа приписываются духам и импульсам как $\text{gh } C^{\alpha_n} = n + 1$ и $\text{gh } \bar{\mathcal{P}}_{\alpha_n} = -n - 1$.

2.2.3. Следующее утверждение представляет собой основное рабочее средство в гамильтоновом квантовании систем со связями (см. замечания ниже).

ТЕОРЕМА 2.1 (Баталин–Фрадкин). *В квантовой ℓ -приводимой системе со связями существует 2-нильпотентный нечетный оператор Ω с духовым числом 1 (БРСТ-дифференциал), $\varepsilon(\Omega) = 1$, $\text{gh } \Omega = 1$, $\Omega^2 = 0$, вида*

$$\Omega = \sum_{n \geq 1} \sum_{m \geq 0} \sum_{\substack{A_1, \dots, A_m \\ B_1, \dots, B_n}} C^{A_m} \dots C^{A_1} V_{A_1 \dots A_m}^{B_n \dots B_1} \bar{\mathcal{P}}_{B_1} \dots \bar{\mathcal{P}}_{B_n} \in \mathbb{A}_{\text{gh}}^{\hbar}, \quad (2.5)$$

где $V_{A_1 \dots A_m}^{B_n \dots B_1}$ – операторы из $\mathbb{A}^{\hbar}$ такие, что

$$V_{\alpha_0} = T_{\alpha_0}, \quad V_{\alpha_n}^{\alpha_n-1} = Z_{\alpha_n}^{\alpha_n-1}, \quad (2.6)$$

и при $\hbar \rightarrow 0$ операторы T_{α_0} и $Z_{\alpha_n}^{\alpha_n-1}$ становятся соответствующими данными, определяющими классическую ℓ -приводимую калибровочную теорию, а Ω становится нечетной функцией, удовлетворяющей соотношению $\{\Omega, \Omega\} = 0$ в терминах скобки Пуассона (скобка Пуассона между духами и импульсами определяется их коммутатором).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. В теореме утверждается существование операторов $V_{A_1 \dots A_m}^{B_n \dots B_1}$ помимо тех, что фиксированы “граничными условиями” (2.6). Другими словами, при заданных связях и операторах Z можно построить нильпотентный Ω с духовым числом 1 в виде формального ряда по духам и импульсам, начиная со слагаемых низшего порядка:

$$\Omega = \sum_{\alpha_0} C^{\alpha_0} T_{\alpha_0} + \sum_{n=1}^{\ell} \sum_{\alpha_n, \alpha_{n-1}} C^{\alpha_n} Z_{\alpha_n}^{\alpha_{n-1}} \bar{\mathcal{P}}_{\alpha_{n-1}} + \dots \quad (2.7)$$

Однако существование квантового БРСТ-оператора в виде ряда по духам никогда не доказывалось явно. Известно, что его классический аналог существует, если $\mathcal{X}$ является симплектическим линейным пространством и гомологии оператора Кошуля–Тейта сконцентрированы в нулевом духовом числе (чем и определяется значение предположений о рангах). Классический БРСТ-оператор можно тогда подвергнуть деформационному квантованию, о существовании которого на языке символов (в виде формального ряда по $\hbar$) можно говорить, если классический оператор $\{\Omega, -\}$ имеет тривиальные гомологии в духовом числе 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Коэффициенты в (2.5) традиционно переопределяются как

$$V_{A_1 \dots A_m}^{B_n \dots B_1} = (-1)^{E_{A_1 \dots A_m}^{B_n \dots B_1}} \frac{1}{m! n!} U_{A_1 \dots A_m}^{B_n \dots B_1},$$

где знаковые множители ($[]$ – целая часть)

$$\begin{aligned} E_{A_1 \dots A_m}^{B_n \dots B_1} &= \sum_{k=1}^{[m/2]} \varepsilon(C^{A_{2k}}) + \sum_{k=1}^{[n/2]} \varepsilon(\bar{\mathcal{P}}_{B_{2k}}) + \\ &+ \left[\frac{m}{2} \right] \max \text{gh}(C^{A_1}, \dots, C^{A_m}) + \left[\frac{n}{2} \right] \max \text{gh}(\bar{\mathcal{P}}_{B_1}, \dots, \bar{\mathcal{P}}_{B_n}) \end{aligned}$$

выбраны таким образом, чтобы минимизировать появление знаковых множителей в переписанных через $U_{A_1 \dots A_m}^{B_n \dots B_1}$ соотношениях, порожденных равенствами (1.1) и соотношениями приводимости; знаковые множители тогда возникают только в суммах по циклическим перестановкам.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Ниже будет изучаться специальный случай, когда $\varepsilon_{\alpha_i} = 0$, и тем самым $\mathbb{Z}_2$ -градуировки духов равны $\varepsilon(C^{\alpha_i}) = i + 1$, $i = 0, \dots, \ell$, а все $U_{A_1 \dots A_m}^{B_n \dots B_1}$ являются четными: $\varepsilon(U_{A_1 \dots A_m}^{B_n \dots B_1}) = 0$. Младшие уравнения, следующие из $\Omega\Omega = 0$, даются соотношениями инволюции (1.1), условиями “нулевых мод” (2.1) и

$$\begin{aligned} (i\hbar)^{-1} [T_{\alpha_0}, Z_{\alpha_1}^{\beta_0}] - Z_{\alpha_1}^{\gamma_0} U_{\gamma_0 \alpha_0}^{\beta_0} &= -U_{\alpha_0 \alpha_1}^{\gamma_0 \delta_0} \Pi_{\gamma_0 \delta_0}^{\beta_0} - U_{\alpha_0 \alpha_1}^{\beta_1} Z_{\beta_1}^{\beta_0}, \\ 2\Pi_{\alpha_0 \beta_0}^{\gamma_0} &= T_{[\alpha_0} \delta_{\beta_0]}^{\gamma_0} - i\hbar U_{\alpha_0 \beta_0}^{\gamma_0}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} Z_{\alpha_2}^{\alpha_1} Z_{\alpha_1}^{\alpha_0} &= -U_{\alpha_2}^{\beta_0 \gamma_0} \Pi_{\beta_0 \gamma_0}^{\alpha_0}, \\ (i\hbar)^{-1} [Z_{\alpha_1}^{[\alpha_0}, Z_{\beta_1}^{\beta_0]}] - Z_{\{\alpha_1}^{\gamma_0} U_{\gamma_0 \beta_1}^{\alpha_0 \beta_0} &= \\ = -U_{\alpha_1 \beta_1}^{[\alpha_0 \gamma_0 \delta_0} \Pi_{\gamma_0 \delta_0}^{\beta_0]} - U_{\alpha_1 \beta_1}^{[\alpha_0 \gamma_1} Z_{\gamma_1}^{\beta_0]} + U_{\alpha_1 \beta_1}^{\alpha_2} U_{\alpha_2}^{\alpha_0 \beta_0} + i\hbar U_{\alpha_1 \beta_1}^{\gamma_0 \gamma_1} U_{\gamma_0 \gamma_1}^{\alpha_0 \beta_0}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$Z_{\{\alpha_1}^{\alpha_0} U_{\alpha_0 \beta_1}^{\gamma_1} + U_{\alpha_1 \beta_1}^{\alpha_2} Z_{\alpha_2}^{\gamma_1} = -U_{\alpha_1 \beta_1}^{\alpha_0 \delta_1} (T_{\alpha_0} \delta_{\delta_1}^{\gamma_1} + i\hbar U_{\alpha_0 \delta_1}^{\gamma_1}), \quad (2.11)$$

где подразумевается суммирование по повторяющимся индексам, $A^{[\alpha\beta]} = A^{\alpha\beta} - A^{\beta\alpha}$ и $A^{\{\alpha\beta\}} = A^{\alpha\beta} + A^{\beta\alpha}$; при заключении группы индексов в скобки операции антисимметризации и симметризации применяются только к самому левому и самому правому индексам.

2.3. Приводимые теории с замкнутой алгеброй.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Будем говорить, что связи первого рода T_{α_0} , $\alpha_0 \in \mathcal{J}_0$, порождают *замкнутую калибровочную алгебру*, если БРСТ-дифференциал Ω не более чем квадратичен по духам.

“Калибровочная теория”, которая будет рассмотрена в разделе 3, имеет замкнутую калибровочную алгебру, но является бесконечно-приводимой, в силу чего приходится рассматривать суммы по бесконечно большому числу духов. Мы используем индексы $A, B, \dots$ для нумерации *всех* духов (т.е. $C^{\alpha_0}, C^{\alpha_1}, \dots$ в терминах п. 2.2.2). В теории с замкнутой алгеброй БРСТ-дифференциал можно записать как

$$\Omega = \sum_A C^A \tau_A + \frac{1}{2} \sum_{A,B} (-1)^{\varepsilon(C^B)+1} C^B C^A U_{AB}, \quad (2.12)$$

где τ_A и U_{AB} — функции от духовых импульсов. В обозначениях из п. 2.2.2 очевидно, что $\tau_{\alpha_0} = T_{\alpha_0}$ являются исходными связями; все τ_{α_n} при $n \geq 1$ зависят от $\overline{\mathcal{P}}_C$. Уравнение $\Omega^2 = 0$ тогда сводится к независимым условиям обращения в нуль для членов первой, второй и третьей степени по C^A . Предвосхищая полученную в разделе 3 структуру БРСТ-дифференциала (где U_{AB} *скалярнозначны*), мы выпишем эти уравнения для случая

$$[U_{AB}, U_{CD}] = 0, \quad [\tau_A, U_{BC}] = 0. \quad (2.13)$$

В линейном, квадратичном и кубичном порядках по C^A соответствующие уравнения имеют вид (с подразумеваемым суммированием по повторяющимся индексам)

$$[\tau_A, C^B] \tau_B + \frac{1}{2} [[\tau_A, C^C], C^B] U_{BC} (-1)^{\varepsilon(C^A)+1} = 0, \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} [\tau_A, \tau_B] = & [U_{AB}, C^C] \tau_C - [\tau_A, C^C] U_{CB} (-1)^{\varepsilon(C^B)+1} + \\ & + [\tau_B, C^C] U_{CA} (-1)^{(\varepsilon(C^A)+1)\varepsilon(C^B)} + \frac{1}{2} [[U_{AB}, C^D], C^C] U_{CD} (-1)^{\varepsilon(C^D)+1}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$[U_{AB}, C^D] U_{DC} (-1)^{(\varepsilon(C^A)+1)(\varepsilon(C^C)+1)} + \text{cycle}(A, B, C) = 0. \quad (2.16)$$

3. БРСТ-ДИФФЕРЕНЦИАЛ

В данном разделе мы построим БРСТ-дифференциал Ω как дифференциальный оператор на баг-резольвенте заданной ассоциативной алгебры $\mathcal{A}$. Основной результат о том, что Ω является дифференциалом, будет сформулирован в п. 3.4; рекурсионное решение уравнения $\Omega\Omega = 0$ построено в п. 3.5, а доказательство равенства $\Omega\Omega = 0$ продолжается до п. 3.7.

Пусть $\mathcal{A}$ – ассоциативная градуированная алгебра с единицей. Будем писать $m_{1,i}: \mathcal{A}^{\otimes n} \rightarrow \mathcal{A}^{\otimes(n-1)}$ для операции умножения в первом сомножителе:

$$m_{1,i}: a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \mapsto (-1)^{\varepsilon(a_i)(\varepsilon(a_2)+\cdots+\varepsilon(a_{i-1}))} a_1 a_i \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes \not{a}_i \otimes \cdots \otimes a_n$$

при $2 \leq i \leq n$, и используем несколько избыточное обозначение $m_{i,1}^*$ (с переставленными нижними индексами и со звездочкой) для умножения в противоположном порядке (но, как и выше, помещенного в первый тензорный множитель):

$$m_{i,1}^*: a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \mapsto (-1)^{\varepsilon(a_i)(\varepsilon(a_1)+\cdots+\varepsilon(a_{i-1}))} a_i a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes \not{a}_i \otimes \cdots \otimes a_n.$$

Нам также понадобятся обозначения

$$\text{ad}_1^{a'}: a_0 \otimes \cdots \otimes a_n = [a', a_0] \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n.$$

Будем использовать обозначение s для отображения “правого сдвига” $s: \mathcal{A}^{\otimes n} \rightarrow \mathcal{A}^{\otimes(n+1)}$,

$$s: a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \mapsto 1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n.$$

Наконец, нам понадобится операция передвижения i -го тензорного множителя на первую позицию

$$P_{1,i}: a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \mapsto (-1)^{\varepsilon(a_i)(\varepsilon(a_1)+\cdots+\varepsilon(a_{i-1}))} a_i \otimes a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes \not{a}_i \otimes \cdots \otimes a_n$$

и обратная операция

$$P_{i,1}: a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \mapsto (-1)^{\varepsilon(a_1)(\varepsilon(a_2)+\cdots+\varepsilon(a_i))} a_2 \otimes \cdots \otimes a_i \otimes a_1 \otimes a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n.$$

3.1. Вар-резольвента и “нулевые моды”. Рассмотрим вар-резольвенту алгебры $\mathcal{A}$, состоящую из свободных $\mathcal{A}$ -бимодулей

$$\cdots \xrightarrow{b'} \mathcal{A} \otimes \bar{\mathcal{A}}^{\otimes 2} \otimes \mathcal{A} \xrightarrow{b'} \mathcal{A} \otimes \bar{\mathcal{A}} \otimes \mathcal{A} \xrightarrow{b'} \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \xrightarrow{b'} \mathcal{A} \rightarrow 0, \quad (3.1)$$

где $\bar{\mathcal{A}} = \mathcal{A}/\mathbb{C}$ и дифференциал имеет вид

$$b' a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i a_0 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} \otimes a_i a_{i+1} \otimes a_{i+2} \otimes \cdots \otimes a_n.$$

Данный комплекс является стягиваемым, причем стягивающая гомотопия есть s :

$$sb' + b's = \text{id}.$$

Для установления связи с содержанием раздела 2 определим линейные отображения $Z^n: \mathcal{A}^{\otimes n} \rightarrow \mathcal{A}^{\otimes n}$ как

$$Z = b's. \quad (3.2)$$

Их предстоит рассматривать как (квантовые) отображения $\overset{n}{Z}$ из раздела 2. Явным образом имеем

$$Z^2 a \otimes b = a \otimes b - 1 \otimes ab, \quad Z^3 a \otimes b \otimes c = a \otimes b \otimes c - 1 \otimes ab \otimes c + 1 \otimes a \otimes bc$$

и т. д. Для последующего использования введем также обозначение

$$Z_{1,i}^j = P_{1,i} \circ (\text{id}^{\otimes(i-1)} \otimes Z^j): \mathcal{A}^{\otimes(i+j-1)} \rightarrow \mathcal{A}^{\otimes(i+j-1)}. \quad (3.3)$$

Очевидно, что $m \circ Z^2 = 0$; в действительности имеется *точная* последовательность $0 \rightarrow \mathcal{A} \otimes \bar{\mathcal{A}} \xrightarrow{Z^2} \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \xrightarrow{m} \mathcal{A}$. Чтобы получить аналогичное утверждение об обращении в нуль для высших Z^n , составим композицию Z^n и Z^{n-1} путем “дополнения” младшего из двух тождественным отображением слева.

ЛЕММА 3.1. При $n \geq 2$ имеем

$$Z^n \circ (\text{id}_1 \otimes Z^{n-1}) = (\text{id}_1 \otimes Z^{n-1}) \circ Z^n = (Z^2 \otimes \text{id}^{\otimes(n-2)}) \circ (\text{id}_1 \otimes Z^{n-1}),$$

поэтому сквозные отображения

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{A}^{\otimes n} & \xrightarrow{\text{id} \otimes Z^{n-1}} & \mathcal{A}^{\otimes n} & \xrightarrow{Z^n} & \mathcal{A}^{\otimes n} & \xrightarrow{\mathfrak{m}_{12}} & \mathcal{A}^{\otimes(n-1)}, \\ \mathcal{A}^{\otimes n} & \xrightarrow{Z^n} & \mathcal{A}^{\otimes n} & \xrightarrow{\text{id} \otimes Z^{n-1}} & \mathcal{A}^{\otimes n} & \xrightarrow{\mathfrak{m}_{12}} & \mathcal{A}^{\otimes(n-1)} \end{array}$$

тождественно нулевые.

Эта лемма объясняет интерпретацию Z^n в духе калибровочной теории как “нулевых мод” Z из раздела 2. Пусть t_a – базис в $\mathcal{A}$ и

$$t_a t_b = \sum_c f_{ab}^c t_c \quad (3.4)$$

– таблица умножения алгебры. Тогда аналог соотношений (1.1) очевидно имеет вид

$$[t_a, t_b] = \sum_c f_{[ab]}^c t_c. \quad (3.5)$$

Далее, для элементов $a = \sum_c t_c a^c$ запишем

$$Z^n(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = Z_{b_1 \dots b_n}^{c_1 \dots c_{n-1}} \otimes t_{c_1} \otimes \cdots \otimes t_{c_{n-1}} a_1^{b_1} \cdots a_n^{b_n}, \quad Z_{b_1 \dots b_n}^{c_1 \dots c_{n-1}} \in \mathcal{A},$$

где подразумевается суммирование по повторяющимся индексам. Первый тензорный множитель в образе Z^n тем самым отделен от остальных: каждое $Z_{b_1 \dots b_n}^{c_1 \dots c_{n-1}}$ является элементом в этом экземпляре алгебры $\mathcal{A}$. В таком компонентном виде Z^2 представляется как $Z_{bc}^a = t_b \delta_c^a - f_{bc}^a$, а выписанное выше соотношение $\mathfrak{m} \circ Z^2 = 0$ принимает вид

$$\sum_c Z_{ab}^c t_c = 0; \quad (3.6)$$

эти равенства надлежит рассматривать как условия приводимости (2.1), Далее, соотношения приводимости для высших отображений Z^n – аналоги (2.2) – являются условиями обращения в нуль из леммы 3.1, которые в компонентных обозначениях принимают вид

$$\sum_{a_1, \dots, a_n} Z_{b_1 \dots b_{n+1}}^{a_1 \dots a_n} Z_{a_1 \dots a_n}^{c_1 \dots c_{n-1}} = 0 \quad (3.7)$$

(что включает умножение в $\mathcal{A}$). Более точно равенства (3.7) интерпретируются как “квантовые” уравнения (2.4) в том частном случае, когда $\Pi = 0$ и в правой части не возникают члены $\hbar \mathbb{A}^{\hbar}$.

3.2. Некоммутативные дифференциальные формы. Напомним интерпретацию $\Omega^n = \mathcal{A} \otimes \bar{\mathcal{A}}^{\otimes n}$ как некоммутативных дифференциальных форм [9], [10]. Алгебра некоммутативных дифференциальных форм $\Omega^\bullet = \Omega^\bullet \mathcal{A}$ над $\mathcal{A}$ есть универсальная дифференциальная градуированная алгебра, порожденная $\mathcal{A}$ и символами da , $a \in \mathcal{A}$, причем da линейно по a , выполняется правило Лейбница $d(ab) = d(a)b + a db$ и $d1 = 0$. Изоморфизм $\mathcal{A} \otimes \bar{\mathcal{A}}^{\otimes n} \rightarrow \Omega^n$ есть $a_0 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n \mapsto a_0 da_1 \dots da_n$. При этом изоморфизме действие d принимает вид $d(a_0 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n) = 1 \otimes a_0 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n$.

Некоммутативные дифференциальные формы являются бимодулем над $\mathcal{A}$. Левое действие очевидно, а алгоритм определения правого действия таков: на 1-формах элемент $c \in \mathcal{A}$ действует как $a_0 da_1 \cdot c = a_0 d(a_1 c) - a_0 a_1 dc$, и аналогичным же образом на старших формах, начиная справа и “продвигаясь” налево с использованием правила Лейбница, пока все члены не примут вид $b_0 db_1 \dots db_n$, например,

$$a_0 da_1 da_2 \cdot c = a_0 da_1 d(a_2 c) - a_0 d(a_1 a_2) dc + a_0 a_1 da_2 dc.$$

Пусть L_D при $D \in \text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ обозначает производную Ли, действующую на некоммутативные дифференциальные формы как [10]

$$\begin{aligned} L_D(a_0 da_1 \dots da_n) &= D(a_0) da_1 \dots da_n + \\ &+ a_0 dD(a_1) da_2 \dots da_n + \dots + a_0 da_1 \dots da_{n-1} dD(a_n), \end{aligned}$$

и пусть также l_D обозначает свертку

$$\begin{aligned} l_D(a_0 da_1 \dots da_n) &= a_0 D(a_1) da_2 \dots da_n - \\ &- a_0 da_1 \cdot D(a_2) da_3 \dots da_n + \dots + (-1)^{n-1} a_0 da_1 \dots da_{n-1} \cdot D(a_n). \end{aligned}$$

Тогда имеет место картановская формула гомотопии $L_D = l_D d + dl_D$. Для $a \in \mathcal{A}$ и внутреннего дифференцирования $[a, -]$ мы, злоупотребляя обозначениями, будем писать $L_a = L_{[a, -]}$ и $l_a = l_{[a, -]}$.

ЛЕММА 3.2. Если $D \in \text{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ – дифференцирование, то $l_D b' + b' l_D = 0$ и $b' L_D - L_D b' = 0$.

Первое соотношение проверяется непосредственно, а в комбинации с формулой гомотопии оно немедленно приводит ко второму соотношению. Данная лемма используется ниже для внутренних дифференцирований $D = [a, -]$; в частности, $b' L_a = L_a b'$ при $a \in \mathcal{A}$.

Мы распространим приведенные выше соотношения на баг-резольвенту $\Omega^\bullet \otimes \mathcal{A}$.

3.3. Духи и БРСТ-дифференциал Ω . Мы собираемся рассматривать баг-резольвенту и отображения Z^n как приводимую калибровочную теорию, в которой t_a (выбранный базис в $\mathcal{A}$) играют роль связей, а соотношения приводимости даются формулами (3.6) и (3.7).

3.3.1. Состав духов. Введем духи для каждого члена баг-резольвенты: $C^n \in \Omega^{n-2} \otimes \mathcal{A}$, $n \geq 2$, и $C_1 \in \mathcal{A}$, а также сопряженные импульсы $P_n \in \text{Hom}(\bar{\mathcal{A}}^{\otimes(n-1)} \otimes \mathcal{A}, \mathbb{C})$, $n \geq 2$, и $P_1 \in \text{Hom}(\mathcal{A}, \mathbb{C})$ с $\mathbb{Z}_2$ -градуировками $\varepsilon(C^n) = \varepsilon(P_n) \equiv n \pmod{2}$. Припишем духовые

числа $\text{gh } C^n = n$, $\text{gh } P_n = -n$. Тогда $\mathbb{Z}_2$ -градуировка совпадает с градуировкой по духовому числу, рассматриваемой по модулю 2; тем не менее мы будем явно указывать $\mathbb{Z}_2$ -градуировку наряду с духовым числом.

Если элементам $a_i \in \mathcal{A}$ приписаны $\mathbb{Z}_2$ -градуировки $\varepsilon(a_i)$, мы полагаем $\varepsilon(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = \varepsilon(a_1) + \cdots + \varepsilon(a_n)$ и иногда будем писать $\varepsilon(a)$ при $\varepsilon(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n)$.

Запишем каноническое спаривание как

$$\begin{aligned} (\bar{\mathcal{A}}^{\otimes n} \otimes \mathcal{A}) \otimes \text{Hom}(\bar{\mathcal{A}}^{\otimes n} \otimes \mathcal{A}, \mathbb{C}) &\rightarrow \mathbb{C}, \\ (a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a') \otimes D &\mapsto \langle a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a', D \rangle. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Оно индуцирует также свертку

$$\begin{aligned} (\mathcal{A} \otimes \bar{\mathcal{A}}^{\otimes n} \otimes \mathcal{A}) \otimes \text{Hom}(\bar{\mathcal{A}}^{\otimes n} \otimes \mathcal{A}, \mathbb{C}) &\rightarrow \mathcal{A}, \\ (a_0 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a', D) &\mapsto \iota(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a')_D, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где $\iota(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a')_D = a_0 \langle a_1 \otimes \cdots \otimes a_n, D \rangle$.

3.3.2. Дифференциальные операторы на *bar*-резольвенте и Ω . Предписание гамильтонова квантования включает каноническое квантование духов [2]; в нашем случае это приводит к рассмотрению *дифференциальных операторов* на *bar*-резольвенте. Каждая пара C^n, P_n удовлетворяет каноническим коммутационным соотношениям (мнемонически $[C^n, P_m] = \delta_m^n$, а потому $[P_n, C^m] = (-1)^{n+1} \delta_n^m$), и коммутирование C^n через P_n , вычисленное на $a_1 \otimes \cdots \otimes a_n$ в соответствии с (3.8), дает

$$C^n \langle a_1 \otimes \cdots \otimes a_n, P_n \rangle = (-1)^{n\varepsilon(a)} a_1 \otimes \cdots \otimes a_n + (-1)^{n(\varepsilon(a)+1)} \langle a_1 \otimes \cdots \otimes a_n, P_n \rangle C^n \quad (3.10)$$

или, другими словами,

$$[C^n, \langle a_1 \otimes \cdots \otimes a_n, P_n \rangle] = (-1)^{n\varepsilon(a)} a_1 \otimes \cdots \otimes a_n.$$

Аналогичным образом вычисляем коммутаторы, включающие свертку (3.9), например,

$$[C^1, \iota(a_0 \otimes a_1)_{P_1}] = [C^1, a_0] \langle a_1, P_1 \rangle + (-1)^{\varepsilon(a_0)+\varepsilon(a_1)} a_0 a_1, \quad (3.11)$$

где первое слагаемое в правой части дается коммутатором, а второе — умножением в $\mathcal{A}$.

Опираясь на опыт работы с БРСТ-формализмом, будем искать дифференциал Ω в виде

$$\Omega = \Omega_0 + \Omega_{\mathcal{A}}, \quad \text{gh } \Omega = 1, \quad (3.12)$$

где

$$\Omega_{\mathcal{A}} = C^1 + \sum_{n \geq 1} \iota(Z^{n+1} C^{n+1})_{P_n} \quad (3.13)$$

включает “граничные” члены, явно выписанные в (2.7) (хотя и относится к бесконечно-приводимому случаю $\ell = \infty$), а

$$\begin{aligned} \Omega_0 = & \sum_{j \geq i \geq 1} \sum \langle \mathcal{U}_{i,j}^{i+j-1} (C^i \otimes C^j), P_{i+j-1} \rangle + \\ & + \sum_{j \geq i \geq 1} \sum_{m=1}^{(i+j-2)/2} \langle \mathcal{U}_{i,j}^{m,i+j-m-1} (C^i \otimes C^j), P_m \otimes P_{i+j-m-1} \rangle \end{aligned} \quad (3.14)$$

с подлежащими определению “коэффициентами” U есть БРСТ-дифференциал для приводимой калибровочной теории с замкнутой алгеброй (см. замечания ниже по поводу его специальных свойств). Запишем также Ω_A в компонентных обозначениях (см. (3.4)–(3.6)):

$$\Omega_A = t_a (C^1)^a + Z^{2c}_{ab} C^{2ab} P_{1c} + Z^{3de}_{abc} C^{3abc} P_{2de} + \dots$$

3.4. Сформулируем теперь основную теорему о существовании БРСТ-дифференциала.

ТЕОРЕМА 3.1. *Существуют отображения*

$$\begin{aligned} U_{m,m'}^{n,n'} &\in \text{Hom}(\mathcal{A}^{\otimes m} \otimes \mathcal{A}^{\otimes m'}, \mathcal{A}^{\otimes n} \otimes \mathcal{A}^{\otimes n'}), \\ m + m' &= n + n' + 1, \quad 1 \leq n < n', \quad 1 \leq m \leq m', \\ U_{m,m'}^{m+m'-1} &\in \text{Hom}(\mathcal{A}^{\otimes m} \otimes \mathcal{A}^{\otimes m'}, \mathcal{A}^{\otimes (m+m'-1)}), \quad 1 \leq m \leq m', \end{aligned}$$

такие, что для оператора Ω (3.12)–(3.14) выполнено $\Omega\Omega = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Отображения $U_{m,m'}^{n,n'}$, индексы которых не удовлетворяют ограничениям, указанным в теореме 3.1, можно считать равными нулю. Равенства $U_{m,m'}^{n,n'} = 0$ при $n > n'$ являются вопросом соглашения (альтернативой были бы градуированные условия симметрии по отношению к перестановке индексов), но условия $U_{m,m'}^{n,n} = 0$ существенны: они означают, что никакой духовый импульс не входит в БРСТ-дифференциал квадратично. Другая договоренность состоит в том, что $U_{m,m'}^{n,n'} = 0$ при $m > m'$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Заметим, что оператор Ω_A в (3.13) линеен как по духам, так и по импульсам, причем коэффициенты суть отображения Z^n (3.2), а потому Ω_A является дифференциальным оператором с коэффициентами в $\mathcal{A}$ (ср. текст после леммы 3.1) и представляет собой не что иное, как “граничные члены” (ср. (2.7)). С другой стороны, оператор Ω_0 билинеен по духам и (отдельно) по импульсам, но является оператором со скалярными коэффициентами ввиду наличия в нем сверток $\langle -, P \rangle$ и $\langle -, P \otimes P \rangle$. Общая структура Ω та же, что описана в (2.12), с тем дополнительным свойством, что τ_A линейны, а U_{AB} максимум билинейны по духовым импульсам. Условия (2.13) выполнены в силу того, что τ_A и U_{AB} являются функциями только импульсов, а U_{AB} , как было отмечено, – скаляры.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Для дифференциала Ω из теоремы 3.1 Ω_0 не является дифференциалом.

3.5. Решение для $U_{m,m'}^{n,n'}$ и $U_{m,m'}^{m+m'-1}$ из теоремы 3.1. Найдем отображения U , решив часть уравнений, следующих из $\Omega\Omega = 0$, а затем покажем, что остающиеся уравнения также выполнены. Начнем с вычисления $\Omega\Omega$ для оператора (3.12)–(3.14).

3.5.1. Вычисление Ω^2 . Простое вычисление с использованием (3.10), (3.11) показывает, что

$$\Omega_A \Omega_A = C^1 C^1 + \sum_{m \geq 1} \iota(Z_m) P_m + \sum_{n \geq m \geq 1} \iota(Z_{mn}) P_m \otimes P_n,$$

где первый член в правой части дается умножением в алгебре, а члены ряда имеют вид $\iota(-)$ -сверток от выражений

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_m &= \text{ad}_{C^1} \mathcal{Z}^{m+1}(C^{m+1}), \\ \mathcal{Z}_{nn} &= \zeta_n(C^{n+1} \otimes C^{n+1}), \\ \mathcal{Z}_{mn} &= (-1)^{mn+m}(\mathfrak{m}_{1,m+2} - \mathfrak{m}_{m+2,1}^*)(Z^{m+1}C^{m+1} \otimes Z^{n+1}C^{n+1}), \quad m < n. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \zeta_n(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1} \otimes b_1 \otimes \cdots \otimes b_{n+1}) &= \frac{1}{4}([a_1, b_1] \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_{n+1} \otimes b_2 \otimes \cdots \otimes b_{n+1} - \\ &- (-1)^n[a_1, b_1] \otimes b_2 \otimes \cdots \otimes b_{n+1} \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}). \end{aligned}$$

Используя далее (3.10), (3.11), получаем

$$[\Omega_0, \Omega_A] = \mathcal{U}_{1,1}^1(C^1 \otimes C^1) + \sum_{m \geq 1} \iota(\mathcal{Y}_m)_{P_m} + \sum_{n \geq m \geq 1} \sum \iota(\mathcal{Y}_{mn})_{P_m \otimes P_n},$$

где члены ряда даются $\iota(-)$ -свертками от выражений

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{mn} &= (-1)^n Z_{1,m+1}^{n+1} \circ \sum_{\substack{j \geq i \geq 0 \\ i+j=m+n}} \mathcal{U}_{i+1,j+1}^{m,n+1}(C^{i+1} \otimes C^{j+1}) + \\ &+ \sum_{\substack{j > i \geq 0 \\ i+j=m+n}} (-1)^{m+n} (\text{id} \otimes \mathcal{U}_{i+1,j}^{m,n}) \circ Z_{1,i+2}^{j+1}(C^{i+1} \otimes C^{j+1}) + \\ &+ \sum_{\substack{j+1 \geq i \geq 1 \\ i+j=m+n}} (-1)^{i+1} (\text{id} \otimes \mathcal{U}_{i,j+1}^{m,n})(Z^{i+1}C^{i+1} \otimes C^{j+1}) + \\ &+ (-1)^{m+n}(Z^{m+1} \otimes \text{id}^{\otimes n}) \circ \sum_{\substack{j \geq i \geq 0 \\ i+j=m+n}} \mathcal{U}_{i+1,j+1}^{m+1,n}(C^{i+1} \otimes C^{j+1}), \quad m < n, \\ \mathcal{Y}_{nn} &= (-1)^n \mathcal{S}_{2,n+1;n+2,2n+1}^{(n)}(Z_{1,n+1}^{n+1} \circ \sum_{i=0}^n \mathcal{U}_{i+1,2n-i+1}^{n,n+1}(C^{i+1} \otimes C^{2n-i+1})). \end{aligned}$$

Мы пользуемся обозначениями (3.3), а оператор $\mathcal{S}_{p,q;r,s}^{(n)}$, где n рассматривается по модулю 2 и $p \leq q < r \leq s$ таковы, что $s - r = q - p$, осуществляет градуированную симметризацию (при четных n) или антисимметризацию (при нечетных n) тензорных множителей в позициях $[p, \dots, q]$ и $[r, \dots, s]$, например,

$$\mathcal{S}_{2,3;4,5}^{(n)}(a \otimes b \otimes c \otimes d \otimes e) = \frac{1}{2}a \otimes b \otimes c \otimes d \otimes e + (-1)^n \cdot (-1)^{(\varepsilon(b)+\varepsilon(c))(\varepsilon(d)+\varepsilon(e))} \frac{1}{2}a \otimes d \otimes e \otimes b \otimes c.$$

Кроме того, оказывается, что $\mathcal{Y}_m = \mathcal{Y}_{0,m}$, если положить

$$\mathcal{U}_{i,j}^{0,\ell} = \mathcal{U}_{i,j}^{\ell}. \quad (3.15)$$

В итоге вычисление $\Omega_0 \Omega_0$ дает

$$\Omega_0 \Omega_0 = \sum_{m \geq 2} \langle \mathcal{X}_m, P_m \rangle + \sum_{\substack{m \geq 1 \\ m \leq n}} \sum_{n \geq 1} \langle \mathcal{X}_{mn}, P_m \otimes P_n \rangle + \mathcal{X}^{(3)},$$

где

$$\mathcal{X}_{mn} = \sum_{\substack{i \geq 1 \\ 2i \leq m+n+1}} \sum_{j \geq 1} (-1)^{(i+1)(m+n)+1} U_{i,m+n+1-i}^{m,n} \circ U_{j,m+n+2-j}^{i,m+n+1-i} (C^j \otimes C^{m+n+2-j}),$$

$\mathcal{X}_m = \mathcal{X}_{0m}$ и $\mathcal{X}^{(3)}$ обозначает члены третьего порядка по духам C^n . Квадрат оператора Ω поэтому равен

$$\Omega \Omega = \mathcal{Z}_0 + \sum_{m \geq 1} \iota(\mathcal{Z}_m + \mathcal{Y}_m + 1 \otimes \mathcal{X}_m)_{P_m} + \sum_{n \geq m \geq 1} \iota(\mathcal{Z}_{mn} + \mathcal{Y}_{mn} + 1 \otimes \mathcal{X}_{mn})_{P_m \otimes P_n} + \mathcal{X}^{(3)}, \quad (3.16)$$

где $\mathcal{Z}_0 = C^1 C^1 + U_{1,1}^1(C^1 \otimes C^1)$ и $\mathcal{Z}_m, \mathcal{Y}_m, \mathcal{X}_m, \mathcal{Z}_{mn}, \mathcal{Y}_{mn}, \mathcal{X}_{mn}$ при $n \geq m \geq 1$ приведены выше (как мы видели, $\mathcal{X}_1 = 0$, а также $\mathcal{X}_{nn} = 0$). Разлагая (3.16) по духам и импульсам и приравнивая каждую степень нулю, получаем конкретную форму уравнений (2.14)–(2.16). В частности, кубичные по C^n уравнения $\mathcal{X}^{(3)} = 0$ есть не что иное, как перепись (2.16). Остальные члены в (3.16) не более чем квадратичны по духам C^n . Их зависимость от духовых импульсов указана в (3.16) явно, и мы поэтому сначала разложим $\Omega \Omega$ по импульсам. Уравнения $\Omega \Omega = 0$ эквивалентны, таким образом, системе уравнений, состоящей из $\mathcal{X}^{(3)} = 0$ и

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_m + \mathcal{Y}_m + 1 \otimes \mathcal{X}_m &= 0, & 1 \leq m, \\ \mathcal{Z}_{mn} + \mathcal{Y}_{mn} + 1 \otimes \mathcal{X}_{mn} &= 0, & 1 \leq m < n, \\ \sum_{2,n+1;n+2,2n+1}^{(n)} (\mathcal{Z}_{nn} + \mathcal{Y}_{nn} + 1 \otimes \mathcal{X}_{nn}) &= 0, & 1 \leq n. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Дальнейшее разложение этих уравнений по духам C^n дает бесконечный набор уравнений, начинающийся с (2.8)–(2.11). Говоря об уравнениях $\mathcal{Z}_{mn} + \mathcal{Y}_{mn} + 1 \otimes \mathcal{X}_{mn} = 0$ в общем, мы будем часто подразумевать $\sum_{2,n+1;n+2,2n+1}^{(n)}$ -симметризацию уравнений при $m = n$, не указывая ее явно.

Мы собираемся решить уравнения (3.17), взяв некоторую их проекцию, которая даст набор рекурсионных соотношений для искомых отображений U .

3.5.2. Нахождение младших отображений. Члены низшего порядка в (3.16) $\mathcal{Z}_0$ обращаются в нуль, если $U_{1,1}^1 = -m$. Поскольку C^1 является $\mathbb{Z}_2$ -нечетным, вклад дает только антисимметричная часть умножения, и мы имеем

$$U_{1,1}^1 = -\frac{1}{2}[-, -]. \quad (3.18)$$

В порядке P_1 легко находим, что $\mathcal{Z}_1 + \mathcal{Y}_1 = L_{C^1} \cdot Z^2 C^2 - Z^2 \circ U_{1,2}^2(C^1 \otimes C^2)$. Однако в силу леммы 3.2

$$L_a \circ Z^2 = L_a b' d = b' L_a d = b' (d|_a) d = b' d (l_a d + d|_a) = Z^2 \circ L_a,$$

откуда видно, что $\mathcal{Z}_1 + \mathcal{Y}_1 = 0$, если

$$\mathcal{U}_{1,2}^2(C^1 \otimes C^2) = \mathcal{L}_{C^1} C^2. \quad (3.19)$$

Заметим, что тем самым решено уравнение (2.8) в наборе (2.8)–(2.11).

3.5.3. Установление рекурсии. Запишем отображения Z^n как $Z = \text{id} - 1 \otimes b'$ и в каждом уравнении (3.17) рассмотрим члены, не имеющие вида $1 \otimes \dots$. Операция $\mathcal{P}_\chi$ проектирования на такие члены сводится к отбрасыванию явных появлений $1 \otimes \dots$ (в частности, $1 \otimes \mathcal{X}_{mn}$) и к заменам $Z^n \rightarrow \text{id}^{\otimes n}$ и $Z^n \rightarrow \mathcal{P}_{1,i}$. Из уравнений (3.17) таким образом можно получить уравнения

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{[(m+n)/2]} \mathcal{U}_{i+1, m+n-i+1}^{m, n+1} (C^{i+1} \otimes C^{m+n-i+1}) = \\ & = -(-1)^{mn+m+n} \mathcal{P}_{m+1,1} \circ (\mathcal{m}_{1, m+2} - \mathcal{m}_{m+2,1}^*) (C^{m+1} \otimes C^{n+1}) - \\ & - (-1)^m \sum_{i=0}^{[(m+n-1)/2]} \mathcal{P}_{m+1,1} \circ (\text{id} \otimes \mathcal{U}_{i+1, m+n-i}^{m, n}) \circ \mathcal{P}_{1, i+2} (C^{i+1} \otimes C^{m+n-i+1}) + \\ & + \sum_{i=1}^{[(m+n+1)/2]} (-1)^{i+n} \mathcal{P}_{m+1,1} \circ (\text{id} \otimes \mathcal{U}_{i, m+n-i+1}^{m, n}) (C^{i+1} \otimes C^{m+n-i+1}) - \\ & - (-1)^m \sum_{i=0}^{[(m+n)/2]} \mathcal{P}_{m+1,1} \circ \mathcal{U}_{i+1, m+n-i+1}^{m+1, n} (C^{i+1} \otimes C^{m+n-i+1}), \quad (m, n) \end{aligned}$$

где $0 \leq m \leq n$ (при $m = 0$ напомним равенства (3.15)). Каждое из этих соотношений сводится к $([(m+n)/2] + 1 - m)$ независимым уравнениям для каждой пары духов (C^a, C^b) , но для экономии места мы будем держать их в виде “производящих соотношений”. Заметим, что при применении отображений к $C^\ell \otimes C^\ell$ следует выполнить градуированную симметризацию по отношению к двум “половинам” тензорного аргумента в соответствии с градуировкой $\varepsilon(C^\ell) = \ell$.

Чтобы увидеть, что равенства (m, n) являются в действительности набором рекурсионных соотношений, фиксируем $m+n = N$ при положительном целом N и упорядочим $([N/2] + 1)([N/2] + 2)/2$ уравнений, следующих из (m, n) , в порядке, определяемом как

$$\begin{aligned} (m, n) &= \left(\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{N+1}{2} \right\rfloor \right) & (1 \text{ уравнение}), \\ (m, n) &= \left(\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor - 1, \left\lfloor \frac{N+1}{2} \right\rfloor + 1 \right) & (2 \text{ уравнения}), \\ &\dots\dots\dots & \\ (m, n) &= (1, N-1) & \left(\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor \text{ уравнений} \right), \\ (m, n) &= (0, N) & \left(\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor + 1 \text{ уравнений} \right). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Соответствующий частичный порядок определяется при этом как

$$\mathcal{U}_{m,n}^{m', n'} \prec \mathcal{U}_{m_1, n_1}^{m'_1, n'_1}, \quad (3.21)$$

если $m' + n' < m'_1 + n'_1$ или $m' + n' = m'_1 + n'_1$, $n' - m' < n'_1 - m'_1$. Можно видеть, что для каждого целого $N \geq 4$ обращающиеся в нуль отображения $U_{m,n}^{m',n'}$ суть

$$U_{m,n}^{m',m+n-m'-1} = 0, \quad m' \geq m, \quad n - m \geq 2. \quad (3.22)$$

Рекурсионные соотношения удобно записать при нечетных и четных $m + n$ по отдельности.

3.5.4. *Нечетные $(m + n)$.* При $m + n = 2k - 1$ уравнения (m, n) , которые можно теперь обозначить как $(2k - 1, m)$, где $0 \leq m \leq k - 1$, принимают вид

$$\begin{aligned} \sum_{i=m}^{k-1} U_{i+1,2k-i}^{m,2k-m}(C^{i+1} \otimes C^{2k-i}) &= P_{m+1,1} \circ \left((m_{1,m+2} - m_{m+2,1}^*)(C^{m+1} \otimes C^{2k-m}) - \right. \\ &- (-1)^m \sum_{i=m}^{k-1} (\text{id} \otimes U_{i+1,2k-i-1}^{m,2k-m-1}) \circ P_{1,i+2}(C^{i+1} \otimes C^{2k-i}) - \\ &- \sum_{i=m+1}^k (-1)^{i+m} (\text{id} \otimes U_{i,2k-i}^{m,2k-m-1})(C^{i+1} \otimes C^{2k-i}) - \\ &\left. - (-1)^m \sum_{i=m+1}^{k-1} U_{i+1,2k-i}^{m+1,2k-m-1}(C^{i+1} \otimes C^{2k-i}) \right). \end{aligned} \quad (2k - 1, m)$$

Очевидно, что эти соотношения позволяют выразить $U_{i+1,2k-i}^{m,2k-m}$ через $U_{a,b}^{c,d} \prec U_{i+1,2k-i}^{m,2k-m}$, а именно, в соответствии с частичным порядком сначала выберем старшее значение $m = k - 1$. Тогда последней суммы в правой части нет, и поэтому $U_{k,k+1}^{k-1,k+1}$ выражается через $U_{m,n}^{m',n'}$ с $m' + n' = 2k - 1 < 2k$, т.е.

$$\begin{aligned} U_{k,k+1}^{k-1,k+1}(C^k \otimes C^{k+1}) &= P_{k,1} \circ ((m_{1,k+1} - m_{k+1,1}^*)(C^k \otimes C^{k+1}) + \\ &+ (-1)^k (\text{id} \otimes U_{k,k}^{k-1,k}) \circ P_{1,k+1}(C^k \otimes C^{k+1}) + \\ &+ (\text{id} \otimes U_{k,k}^{k-1,k})(C^{k+1} \otimes C^k)). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Полагая далее $m = k - 2$, получаем два уравнения

$$U_{k-1,k+2}^{k-2,k+2} = P_{k-1,1} \circ (m_{2,1}^* - m_{1,2} - (-1)^k (\text{id} \otimes U_{k-1,k+1}^{k-2,k+1})) \circ P_{1,k}, \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} U_{k,k+1}^{k-2,k+2}(C^k \otimes C^{k+1}) &= P_{k-1,1} \circ (-(-1)^k U_{k,k+1}^{k-1,k+1}(C^k \otimes C^{k+1}) + \\ &+ (\text{id} \otimes U_{k-1,k+1}^{k-2,k+1})(C^k \otimes C^{k+1}) - (\text{id} \otimes U_{k,k}^{k-2,k+1})(C^{k+1} \otimes C^k) - \\ &- (-1)^k (\text{id} \otimes U_{k,k}^{k-2,k+1}) \circ P_{1,k+1}(C^k \otimes C^{k+1})) \end{aligned} \quad (3.25)$$

и т.д. При каждом $0 \leq m \leq k - 2$ уравнения для “общих” значений i , т.е. $m + 1 \leq i \leq k - 1$, суть

$$\begin{aligned} U_{i+1,2k-i}^{m,2k-m} &= P_{m+1,1} \circ ((-1)^{m+1} (\text{id} \otimes U_{i+1,2k-i-1}^{m,2k-m-1}) \circ P_{1,i+2} - \\ &- \text{id} \otimes U_{i,2k-i}^{m,2k-m-1} - (-1)^m U_{i+1,2k-i}^{m+1,2k-m-1}). \end{aligned} \quad (3.26)$$

“Граничные” уравнения при $i = m$ и $i = k$ также легко получить из $(2k - 1, m)$ (уравнение при $i = m$ включает “неоднородный” вклад $P_{m+1,1} \circ (m_{1,m+2} - m_{m+2,1}^*)$ в правой части).

3.5.5. Четные $(m+n)$. При $m+n=2k$ уравнения $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$, которые можно теперь обозначить как $(2k, \mathbf{m})$, где $0 \leq m \leq k$, принимают вид

$$\begin{aligned} \sum_{i=m}^k \mathbf{U}_{i+1, 2k-i+1}^{m, 2k-m+1} (C^{i+1} \otimes C^{2k-i+1}) = \\ = -(-1)^m \mathbf{P}_{m+1, 1} \circ \left((\mathbf{m}_{1, m+2} - \mathbf{m}_{m+2, 1}^*) (C^{m+1} \otimes C^{2k-m+1}) - \right. \\ \left. - (-1)^m \sum_{i=m}^{k-1} (\text{id} \otimes \mathbf{U}_{i+1, 2k-i}^{m, 2k-m}) \circ \mathbf{P}_{1, i+2} (C^{i+1} \otimes C^{2k-i+1}) + \right. \\ \left. + \sum_{i=m+1}^k (-1)^{i+m} (\text{id} \otimes \mathbf{U}_{i, 2k-i+1}^{m, 2k-m}) (C^{i+1} \otimes C^{2k-i+1}) - \right. \\ \left. - (-1)^m \sum_{i=m+1}^k \mathbf{U}_{i+1, 2k-i+1}^{m+1, 2k-m} (C^{i+1} \otimes C^{2k-i+1}) \right). \end{aligned} \quad (2k, \mathbf{m})$$

Их также следует рассматривать в порядке, определенном последовательностью значений $m = k, k-1, \dots, 1$. Старшее значение $m = k$ здесь несколько специальное: с одной стороны, все отображения $\mathbf{U}_{m, n}^{m', n'}$ выпадают из правой части и остается только первое слагаемое, а с другой стороны, выполнение уравнения требуется только после $\mathbf{S}_{2, k+1; k+2, 2k+1}^{(k)}$ -симметризации (см. замечание после (3.17)) и с соответствующей симметризацией духового аргумента $C^{k+1} \otimes C^{k+1}$ (см. замечание после $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$). Это оставляет некоторую свободу в определении $\mathbf{U}_{k+1, k+1}^{k, k+1}$, которая фиксируется с использованием *полного* уравнения $\mathbf{S}_{2, k+1; k+2, 2k+1}^{(k)} (\mathcal{Z}_{kk} + \mathcal{Y}_{kk} + 1 \otimes \mathcal{X}_{kk}) = 0$ для $\mathbf{U}_{k, k}^{k-1, k}$. Тогда имеем

$$\mathbf{U}_{k, k}^{k-1, k} = (-1)^{k+1} \mathbf{b}' \otimes \text{id}^{\otimes k} + (-1)^k (\text{id}^{\otimes (k-1)} \otimes \mathbf{b}') \circ \mathbf{P}_{k, 1}, \quad (3.27)$$

где $\mathbf{P}_{k, 1}$ обозначает обратный к $\mathbf{P}_{1, k}$ оператор, и при вычислении $\mathbf{U}_{k, k}^{k-1, k}$ на $C^k \otimes C^k$ следует выполнить градуированную симметризацию по отношению к двум “половинам” тензорного аргумента, например (опуская знаковые множители, соответствующие $\mathbb{Z}_2$ -градуировке),

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{2, 2}^{1, 2} a \otimes b \otimes a' \otimes b' = \frac{1}{2} (-ab \otimes a' \otimes b' + b \otimes aa' \otimes b' - b \otimes a \otimes a'b' - \\ - a'b' \otimes a \otimes b + b' \otimes a'a \otimes b - b' \otimes a' \otimes ab) \end{aligned} \quad (3.28)$$

(что дает решение уравнения (2.10)).

Следующие (два) уравнения, вытекающие из $(2k, \mathbf{m})$, соответствуют $m = k-1$ и позволяют выразить $\mathbf{U}_{k, k+2}^{k-1, k+2}$ через $\mathbf{U}_{k, k+1}^{k-1, k+1}$ и $\mathbf{U}_{k+1, k+1}^{k-1, k+2}$ через $\mathbf{U}_{k, k+1}^{k-1, k+1}$ и $\mathbf{U}_{k+1, k+1}^{k, k+1}$; все эти уравнения легко записываются аналогично (3.26). Применяя рекурсию далее, следует только учесть, что при $0 \leq m \leq k-1$ уравнения

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{k+1, k+1}^{m, 2k-m+1} (C^{k+1} \otimes C^{k+1}) = (-1)^{k+m} \mathbf{P}_{m+1, 1} \circ (\text{id} \otimes \mathbf{U}_{k, k+1}^{m, 2k-m}) (C^{k+1} \otimes C^{k+1}) - \\ - (-1)^m \mathbf{P}_{m+1, 1} \circ \mathbf{U}_{k+1, k+1}^{m+1, 2k-m} (C^{k+1} \otimes C^{k+1}), \end{aligned} \quad (3.29)$$

следующие из $(2\mathbf{k}, \mathbf{m})$, вычисляются на $C^{k+1} \otimes C^{k+1}$, а потому отображения в правой части следует соответствующим образом симметризовать по отношению к двум “половинам” тензорного аргумента. Равенства (3.18), (3.19), (3.22), $(2\mathbf{k} - 1, \mathbf{m})$ и $(2\mathbf{k}, \mathbf{m})$ определяют все отображения, входящие в дифференциал Ω .

Заметим еще, что структура, входящая в (3.19), проходит через рекурсионные соотношения как

$$\mathbf{U}_{1,n}^n a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n = (-1)^n \mathbf{L}_{a_0} a_1 \otimes \cdots \otimes a_n. \quad (3.30)$$

3.5.6. ПРИМЕР. В дополнение к (3.18), (3.19), (3.28) (и (3.30)) приведем явную формулу, следующую из рекурсионных соотношений. Для $\mathbf{U}_{m,n}^{m',n'}$ при $m' + n' = 3$ наряду с (3.28) имеем

$$\begin{aligned} 2\mathbf{U}_{2,2}^3 a \otimes b \otimes a' \otimes b' &= a \otimes a' \otimes b'b - a \otimes a' \otimes bb' + a \otimes a'b \otimes b' - a \otimes ba' \otimes b' + \\ &+ a' \otimes a \otimes bb' - a' \otimes a \otimes b'b + a' \otimes ab' \otimes b - a' \otimes b'a \otimes b + b \otimes a \otimes a'b' - \\ &- b \otimes aa' \otimes b' + b' \otimes a' \otimes ab - b' \otimes a'a \otimes b + ab \otimes a' \otimes b' + a'b' \otimes a \otimes b. \end{aligned}$$

3.6. Окончание доказательства уравнений (3.17). Мы определили рекуррентно найденные отображения $\mathbf{U}_{m,n}^{\ell, m+n-\ell-1}$ из $\mathcal{P}_\chi$ -проекций уравнений (3.17). Теперь надо показать, что остающаяся часть уравнений, $\mathcal{Z}_{mn} + \mathcal{Y}_{mn} + 1 \otimes \mathcal{X}_{mn} = 0$, $0 \leq m < n$, также выполнена. В явном виде уравнения, которые следует проверить, получаются заменой $\mathcal{Z} \rightarrow -1 \otimes \mathcal{b}'$; все тензорные члены тогда приобретают вид $1 \otimes \mathbb{X}$, и возникающие уравнения $\mathbb{X} = 0$ (как и ранее, записанные как “производящие”) имеют вид

$$\begin{aligned} &(-1)^m (\text{id}^{\otimes m} \otimes \mathbf{b}') \circ \sum_{i=m}^{[(m+n)/2]} \mathbf{U}_{i+1, m+n-i+1}^{m, n+1} (C^{i+1} \otimes C^{m+n-i+1}) + \\ &+ (\mathbf{b}' \otimes \text{id}^{\otimes n}) \circ \sum_{i=m+1}^{[(m+n)/2]} \mathbf{U}_{i+1, m+n-i+1}^{m+1, n} (C^{i+1} \otimes C^{m+n-i+1}) + \\ &+ \sum_{i=m}^{[(m+n-1)/2]} \mathbf{U}_{i+1, m+n-i}^{m, n} (C^{i+1} \otimes \mathbf{b}' C^{m+n-i+1}) + \\ &+ \sum_{i=m+1}^{[(m+n+1)/2]} (-1)^{m+n+i+1} \mathbf{U}_{i, m+n-i+1}^{m, n} (\mathbf{b}' C^{i+1} \otimes C^{m+n-i+1}) + \\ &+ \sum_{j=m+1}^{[(m+n)/2]} \sum_{i=j}^{[(m+n)/2]} (-1)^{j(m+n)} \times \\ &\times \mathbf{U}_{j, m+n+1-j}^{m, n} \circ \mathbf{U}_{i+1, m+n+1-i}^{j, m+n+1-j} (C^{i+1} \otimes C^{m+n+1-i}) = 0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

при $0 \leq m < n$. Требуется показать, что они выполнены при отображениях $\mathbf{U}_{m,n}^{\ell, m+n-\ell-1}$, определенных установленной выше рекурсией.

3.6.1. Метод. Уравнения (3.31) доказываются (несколько утомительной) индукцией по порядку отображений $\mathbf{U}$, введенному в (3.21). Рассмотрим уравнения (3.31) при

$m + n = 2k - 1$ и предположим, что все уравнения при $m + n \leq 2k - 2$ выполнены (уравнения (3.31) при $m + n = 2k$ доказываются аналогично). Равенства, подлежащие проверке при $m + n = 2k - 1$, таковы. Полагая $m = k - 1 - \ell$ и $n = k + \ell$, имеем $\ell + 1$ уравнений для каждого $\ell \in \{0, \dots, k - 1\}$; при $\ell \geq 1$ это

$$\begin{aligned} & (-1)^{k+\ell} (\text{id}^{\otimes(k-\ell-1)} \otimes \mathbf{b}') \circ \mathbf{U}_{k,k+1}^{k-\ell-1,k+\ell+1} (C^k \otimes C^{k+1}) - \\ & - (\mathbf{b}' \otimes \text{id}^{\otimes(k+\ell)}) \circ \mathbf{U}_{k,k+1}^{k-\ell,k+\ell} (C^k \otimes C^{k+1}) - \mathbf{U}_{k,k}^{k-\ell-1,k+\ell} (C^k \otimes \mathbf{b}' C^{k+1}) + \\ & + (-1)^k \mathbf{U}_{k-1,k+1}^{k-\ell-1,k+\ell} (\mathbf{b}' C^k \otimes C^{k+1}) - (-1)^k \mathbf{U}_{k,k}^{k-\ell-1,k+\ell} (\mathbf{b}' C^{k+1} \otimes C^k) - \\ & - \sum_{j=0}^{\ell-1} (-1)^{k+1+j} \mathbf{U}_{k-j-1,k+j+1}^{k-\ell-1,k+\ell} \circ \mathbf{U}_{k,k+1}^{k-j-1,k+j+1} (C^k \otimes C^{k+1}) = 0, \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$(-1)^{k+\ell} (\text{id}^{\otimes(k-\ell-1)} \otimes \mathbf{b}') \circ \mathbf{U}_{k-\ell,k+\ell+1}^{k-\ell-1,k+\ell+1} - \mathbf{U}_{k-\ell,k+\ell}^{k-\ell-1,k+\ell} \circ (\text{id}^{\otimes(k-\ell)} \otimes \mathbf{b}') = 0, \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} & (-1)^{k+\ell} (\text{id}^{\otimes(k-\ell-1)} \otimes \mathbf{b}') \circ \mathbf{U}_{k-i,k+i+1}^{k-\ell-1,k+\ell+1} - (\mathbf{b}' \otimes \text{id}^{\otimes(k+\ell)}) \circ \mathbf{U}_{k-i,k+i+1}^{k-\ell,k+\ell} - \\ & - \mathbf{U}_{k-i,k+i}^{k-\ell-1,k+\ell} \circ (\text{id}^{\otimes(k-i)} \otimes \mathbf{b}') + (-1)^{k+i} \mathbf{U}_{k-i-1,k+i+1}^{k-\ell-1,k+\ell} \circ (\mathbf{b}' \otimes \text{id}^{\otimes(k+1+i)}) - \\ & - \sum_{j=i}^{\ell-1} (-1)^{k+1+j} \mathbf{U}_{k-j-1,k+j+1}^{k-\ell-1,k+\ell} \circ \mathbf{U}_{k-i,k+i+1}^{k-j-1,k+j+1} = 0, \quad 1 \leq i \leq \ell - 1, \end{aligned} \quad (3.34)$$

а при $\ell = 0$ – единственное уравнение

$$\begin{aligned} & (\text{id}^{\otimes(k-1)} \otimes \mathbf{b}') \circ \mathbf{U}_{k,k+1}^{k-1,k+1} (C^k \otimes C^{k+1}) = (-1)^k \mathbf{U}_{k,k}^{k-1,k} (C^k \otimes \mathbf{b}' C^{k+1}) + \\ & + \mathbf{U}_{k,k}^{k-1,k} (\mathbf{b}' C^{k+1} \otimes C^k). \end{aligned} \quad (3.35)$$

При фиксированном k мы применяем индукцию по ℓ , которая в действительности является частью индукции по порядку отображений $\mathbf{U}$ (см. (3.21)); ℓ нумерует строки в (3.20). На каждом шаге мы используем и определяющие рекурсионные соотношения, и младшие (ранее доказанные) уравнения (3.32)–(3.35).

3.6.2. Начнем с базы ℓ -индукции $\ell = 0$ и покажем, что (3.35) выполнено. С учетом (3.27) уравнение (3.35) принимает вид

$$\begin{aligned} & (\text{id}^{\otimes(k-1)} \otimes \mathbf{b}') \circ \mathbf{U}_{k,k+1}^{k-1,k+1} (C^k \otimes C^{k+1}) = -\mathbf{b}' C^k \otimes \mathbf{b}' C^{k+1} + \\ & + (\text{id}^{\otimes(k-1)} \otimes \mathbf{b}') \circ \mathbf{P}_{k,1} (C^k \otimes \mathbf{b}' C^{k+1} + (-1)^k \mathbf{b}' C^{k+1} \otimes C^k). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Используя очевидное тождество

$$(\text{id}^{\otimes(k-1)} \otimes \mathbf{b}') \circ \mathbf{P}_{k,1} = \mathbf{P}_{k,1} \circ (\mathbf{m}_{1,k+1} - (\text{id}^{\otimes k} \otimes \mathbf{b}')), \quad (3.37)$$

перепишем (3.36) в виде

$$\begin{aligned} & (\text{id}^{\otimes(k-1)} \otimes \mathbf{b}') \circ \mathbf{U}_{k,k+1}^{k-1,k+1} (C^k \otimes C^{k+1}) = \\ & = -\mathbf{b}' C^k \otimes \mathbf{b}' C^{k+1} - (-1)^k \mathbf{P}_{k,1} (\mathbf{b}' C^{k+1} \otimes \mathbf{b}' C^k) + \\ & + \mathbf{P}_{k,1} \circ \mathbf{m}_{1,k+1} (C^k \otimes \mathbf{b}' C^{k+1}) + (-1)^k \mathbf{P}_{k,1} \circ \mathbf{m}_{1,k+1} (\mathbf{b}' C^{k+1} \otimes C^k). \end{aligned} \quad (3.38)$$

С другой стороны, отображение $U_{k,k+1}^{k-1,k+1}$ выражается из рекурсионного соотношения (3.23), и поэтому (снова применяя (3.37)) можно переписать левую часть (3.38) как

$$\begin{aligned} & (\text{id}^{\otimes(k-1)} \otimes b') \circ U_{k,k+1}^{k-1,k+1} (C^k \otimes C^{k+1}) = \\ & = P_{k,1} \circ m_{1,k+1} \circ ((m_{1,k+1} - m_{k+1,1}^*)(C^k \otimes C^{k+1}) + \\ & + (-1)^k (\text{id} \otimes U_{k,k}^{k-1,k}) \circ P_{1,k+1} (C^k \otimes C^{k+1}) + (\text{id} \otimes U_{k,k}^{k-1,k}) (C^{k+1} \otimes C^k)) - \\ & - P_{k,1} \circ (\text{id}^{\otimes k} \otimes b') \circ (m_{1,k+1} - m_{k+1,1}^*)(C^k \otimes C^{k+1}) + m_{k,k+1} (b' C^k \otimes C^{k+1}) - \\ & - b' C^k \otimes b' C^{k+1} + (-1)^k P_{k,1} ((\text{id} \otimes b') C^{k+1}) \otimes b' C^k, \end{aligned}$$

где мы также воспользовались тем, что $(\text{id} \otimes b'_{(k)}) \circ P_{1,k+1} = P_{1,k} \circ (b'_{(k)} \otimes \text{id})$ (здесь нижний индекс в $b'_{(k)}$ указывает, что b' действует на k тензорных множителей). Имеем теперь

$$\begin{aligned} & \text{левая часть (3.38)} - \text{правая часть (3.38)} = \\ & = P_{k,1} \circ m_{1,k+1} \circ ((m_{1,k+1} - m_{k+1,1}^*)(C^k \otimes C^{k+1}) + \\ & \quad (1) \quad (3) \\ & + (-1)^k (\text{id} \otimes U_{k,k}^{k-1,k}) \circ P_{1,k+1} (C^k \otimes C^{k+1}) + (\text{id} \otimes U_{k,k}^{k-1,k}) (C^{k+1} \otimes C^k)) - \\ & \quad (3) \quad (2) \\ & - P_{k,1} \circ (\text{id}^{\otimes k} \otimes b') \circ (m_{1,k+1} - m_{k+1,1}^*)(C^k \otimes C^{k+1}) + \\ & \quad (1) \quad (3) \\ & + m_{k,k+1} (b' C^k \otimes C^{k+1}) + (-1)^k P_{k,1} \circ m_{1,2} C^{k+1} \otimes b' C^k - \\ & \quad (3) \quad (2) \\ & - P_{k,1} \circ m_{1,k+1} (C^k \otimes b' C^{k+1}) - (-1)^k P_{k,1} \circ m_{1,k+1} (b' C^{k+1} \otimes C^k) = 0, \\ & \quad (1) \quad (2) \end{aligned}$$

где каждая из трех групп членов (отмеченных цифрами (1), (2), и (3)) обращается в нуль по отдельности. Равенство (3.38) тем самым доказано.

3.6.3. Дальнейшие вычисления вполне непосредственны, но достаточно громоздки; мы приведем подробности только для $\ell = 1$. Это представительно иллюстрирует общий случай, поскольку квадратичный член $U \circ U$ уже присутствует в соответствующем уравнении (3.32) (по сравнению же с (3.34) уравнения (3.32) имеют дополнительное усложнение из-за градуированной симметризации $F(C^k \otimes b' C^{k+1}) + (-1)^k F(b' C^{k+1} \otimes C^k)$).

При $\ell = 1$ два уравнения, которые следует доказать, имеют вид

$$\begin{aligned} & (\text{id}^{\otimes(k-2)} \otimes b') \circ U_{k,k+1}^{k-2,k+2} (C^k \otimes C^{k+1}) + \\ & + (-1)^k (b' \otimes \text{id}^{\otimes(k+1)}) \circ U_{k,k+1}^{k-1,k+1} (C^k \otimes C^{k+1}) - U_{k-1,k+1}^{k-2,k+1} (b' C^k \otimes C^{k+1}) + \\ & + (-1)^k U_{k,k}^{k-2,k+1} (C^k \otimes b' C^{k+1}) + U_{k,k}^{k-2,k+1} (b' C^{k+1} \otimes C^k) = \\ & = U_{k-1,k+1}^{k-2,k+1} \circ U_{k,k+1}^{k-1,k+1} (C^k \otimes C^{k+1}), \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$(-1)^k (\text{id}^{\otimes(k-2)} \otimes b') \circ U_{k-1,k+2}^{k-2,k+2} (C^{k-1} \otimes C^{k+2}) + U_{k-1,k+1}^{k-2,k+1} (C^{k-1} \otimes b' C^{k+2}) = 0. \quad (3.40)$$

Начнем с уравнения (3.40). Вспомним рекурсионное соотношение (3.24), а также используем рекурсионное соотношение

$$U_{k-1,k+1}^{k-2,k+1} = (-1)^{k+1} P_{k-1,1} \circ (m_{2,1}^* - m_{1,2} + (\text{id} \otimes U_{k-1,k}^{k-2,k})) \circ P_{1,k}, \quad (3.41)$$

которое следует из $(2k-2, k-2)$ (т.е. из равенства $(2k, m)$, где мы заменили $k \rightarrow k-1$ и положили $m = k-2$). Подставим (3.24) и (3.41) в (3.40), но сохраним $U_{k-1,k+1}^{k-2,k+1}$ “невычисленным” в комбинации $\text{id} \otimes U_{k-1,k+1}^{k-2,k+1}$, возникающей из (3.24). Как и ранее, воспользуемся тождеством (3.37) (при $k \rightarrow k-1$). Тогда уравнение (3.40), которое следует проверить, принимает вид

$$\begin{aligned} & (-1)^k m_{1,k} \circ (m_{2,1}^* - m_{1,2}) \circ P_{1,k} (C^{k-1} \otimes C^{k+2}) + \\ & + (-1)^{k+1} (\text{id}^{\otimes(k-1)} \otimes b') \circ (m_{2,1}^* - m_{1,2}) \circ P_{1,k} (C^{k-1} \otimes C^{k+2}) + \\ & + (\text{id}^{\otimes(k-1)} \otimes b') \circ (\text{id} \otimes U_{k-1,k+1}^{k-2,k+1}) \circ P_{1,k} (C^{k-1} \otimes C^{k+2}) - \\ & - m_{1,k} \circ (\text{id} \otimes U_{k-1,k+1}^{k-2,k+1}) \circ P_{1,k} (C^{k-1} \otimes C^{k+2}) + \\ & + (-1)^{k+1} (m_{2,1}^* - m_{1,2}) \circ P_{1,k} (C^{k-1} \otimes b' C^{k+2}) + \\ & + (-1)^{k+1} (\text{id} \otimes U_{k-1,k}^{k-2,k}) \circ P_{1,k} (C^{k-1} \otimes b' C^{k+2}) = 0. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Теперь применим предположение индукции: для *предшествующего* отображения $U_{k-1,k+1}^{k-2,k+1}$ из равенств (3.31) следует, что

$$(\text{id}^{\otimes(k-2)} \otimes b') \circ U_{k-1,k+1}^{k-2,k+1} = -(-1)^k U_{k-1,k}^{k-2,k} \circ (\text{id}^{\otimes(k-1)} \otimes b'). \quad (3.43)$$

Используя это вместе с простым тождеством

$$\begin{aligned} & (\text{id}^{\otimes(k-1)} \otimes b') \circ (m_{2,1}^* - m_{1,2}) + (m_{1,k} - m_{k,1}^*) \circ (\text{id}^{\otimes(k-1)} \otimes b') \circ P_{k,1} - \\ & - m_{1,k} \circ (m_{2,1}^* - m_{1,2}) = m_{1,k} \circ m_{1,2} - m_{1,2} \circ m_{1,k+1}, \end{aligned}$$

приводим (3.42) к виду

$$\begin{aligned} & (-1)^{k+1} (m_{1,k} \circ m_{1,2} - m_{1,2} \circ m_{1,k+1}) - \\ & - m_{1,k} \circ (\text{id} \otimes U_{k-1,k+1}^{k-2,k+1}) - (-1)^k (\text{id} \otimes U_{k-1,k}^{k-2,k}) \circ m_{1,k+1} = 0. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Записывая $U_{k-1,k+1}^{k-2,k+1} = P_{k-1,1} \circ \tilde{U}$, имеем $m_{1,k} \circ (\text{id} \otimes U_{k-1,k+1}^{k-2,k+1}) = m_{1,2} \circ (\text{id} \otimes \tilde{U})$; вспоминая из (3.41), как на самом деле выглядит $\tilde{U}$, видим, что равенство (3.44) удовлетворяется тождественно (независимо от каких-либо свойств $U_{k-1,k}^{k-2,k}$). Таким образом, равенство (3.40) доказано.

Докажем далее равенство (3.39). В его левой части $U_{k,k+1}^{k-2,k+2}$ выражается из рекурсионного соотношения (3.25). Выразим также $U_{k,k+1}^{k-1,k+1}$, используя равенство (3.23),

за исключением тех $U_{k,k+1}^{k-1,k+1}$, которые возникают из (3.25); для последних используем уравнение (3.35) с тем, чтобы переписать возникающую таким образом комбинацию $(\text{id}^{\otimes(k-1)} \otimes b') \circ U_{k,k+1}^{k-1,k+1}$ как

$$\begin{aligned} (\text{id}^{\otimes(k-1)} \otimes b') \circ U_{k,k+1}^{k-1,k+1}(C^k \otimes C^{k+1}) &= (-1)^k U_{k,k}^{k-1,k}(C^k \otimes b' C^{k+1}) + \\ &+ U_{k,k}^{k-1,k}(b' C^{k+1} \otimes C^k). \end{aligned}$$

В правой части (3.39) используем рекурсионные соотношения (3.23) и (3.41) и затем применим предположение индукции, из которого следует уравнение

$$\begin{aligned} &(-1)^k U_{k-1,k}^{k-2,k}(b' C^k \otimes C^k) + U_{k-1,k}^{k-2,k} \circ U_{k,k}^{k-1,k}(C^k \otimes C^k) + \\ &+ (-1)^k (\text{id}^{\otimes(k-2)} \otimes b'_{(k+1)}) \circ U_{k,k}^{k-2,k+1}(C^k \otimes C^k) + \\ &+ (b'_{(k-1)} \otimes \text{id}^{\otimes k}) \circ U_{k,k}^{k-1,k}(C^k \otimes C^k) = 0. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Используем его для исключения билинейного члена по U . Непосредственные манипуляции с учетом (3.37) и очевидного тождества

$$(b'_{(k-1)} \otimes \text{id}^{\otimes(k+1)}) \circ P_{k,1} = P_{k-1,1} \circ (\text{id} \otimes b'_{(k-1)} \otimes \text{id}^{\otimes k})$$

показывают, что слагаемые, возникающие из двух последних членов (3.45), сокращаются с подобными членами из левой части (3.39). Далее, используя в левой части (3.39) рекурсионные соотношения для $U_{k-1,k+1}^{k-2,k+1}$ и $U_{k,k}^{k-2,k+1}$, получаем в соответствии с (3.41), что

$$\begin{aligned} -P_{1,k-1} \circ U_{k-1,k+1}^{k-2,k+1}(b' C^k \otimes C^{k+1}) &= (-1)^k (m_{1,k} - m_{k,1}^*)(b' C^k \otimes C^{k+1}) + \\ &+ (-1)^k (\text{id} \otimes U_{k-1,k}^{k-2,k}) \circ P_{1,k}(b' C^k \otimes C^{k+1}). \end{aligned} \quad (3.46)$$

Наконец, учитывая рекурсионное соотношение

$$U_{k,k}^{k-2,k+1}(C^k \otimes C^k) = -P_{k-1,1} \circ (\text{id} \otimes U_{k-1,k}^{k-2,k})(C^k \otimes C^k) - (-1)^k P_{k-1,1} \circ U_{k,k}^{k-1,k}(C^k \otimes C^k) \quad (3.47)$$

(являющееся равенством (3.29) при $k \rightarrow k-1$ и $m = k-2$), используя тождество

$$\begin{aligned} &(-1)^k (\text{id} \otimes b'_{(k-1)} \otimes \text{id}^{\otimes k}) \circ (m_{1,k+1} - m_{k+1,1}^*)(C^k \otimes C^{k+1}) = \\ &= (-1)^k (m_{1,k} - m_{k,1}^*)((\text{id} \otimes b') C^k) \otimes C^{k+1} \end{aligned}$$

и применяя вытекающее из предположения индукции равенство (3.43) к комбинации $(\text{id}^{\otimes(k-1)} \otimes b') \circ (\text{id} \otimes U_{k-1,k+1}^{k-2,k+1})$, перепишем (3.39) в виде

$$\begin{aligned} &m_{1,k} \circ ((\text{id} \otimes U_{k-1,k+1}^{k-2,k+1})(C^k \otimes C^{k+1}) - (\text{id} \otimes U_{k,k}^{k-2,k+1})(C^{k+1} \otimes C^k) - \\ &- (-1)^k (\text{id} \otimes U_{k,k}^{k-2,k+1}) \circ P_{1,k+1}(C^k \otimes C^{k+1})) + \\ &+ (-1)^k (m_{1,k} - m_{k,1}^*)(m_{1,2} C^k \otimes C^{k+1}) = \\ &= (-1)^k m_{1,2} \circ ((m_{1,k+1} - m_{k+1,1}^*)(C^k \otimes C^{k+1}) + (\text{id} \otimes U_{k,k}^{k-1,k})(C^{k+1} \otimes C^k) + \\ &+ (-1)^k (\text{id} \otimes U_{k,k}^{k-1,k}) \circ P_{1,k+1}(C^k \otimes C^{k+1})) + \\ &+ (-1)^{k+1} (\text{id} \otimes U_{k-1,k}^{k-2,k}) \circ (m_{1,k+1} - m_{k+1,1}^*)(C^k \otimes C^{k+1}) + \\ &+ (\text{id} \otimes U_{k-1,k}^{k-2,k}) \circ m_{1,2}(C^{k+1} \otimes C^k). \end{aligned} \quad (3.48)$$

Очевидно, что подчеркнутые члены можно заменить на

$$(-1)^k (m_{1,k} \circ m_{1,2} - m_{1,2} \circ m_{1,k+1}) \quad (3.49)$$

в левой части. Далее, рекурсионное соотношение (3.41) позволяет вычислить

$$\begin{aligned} m_{1,k} \circ (\text{id} \otimes U_{k-1,k+1}^{k-2,k+1}) &= \\ &= (-1)^{k+1} m_{1,k} \circ (\text{id} \otimes (P_{k-1,1} \circ (m_{2,1}^* - m_{1,2} + (\text{id} \otimes U_{k-1,k}^{k-2,k})) \circ P_{1,k})) = \\ &= (-1)^{k+1} m_{1,k} \circ P_{k,2} \circ (m_{3,2}^* - m_{2,3} + (\text{id}^{\otimes 2} \otimes U_{k-1,k}^{k-2,k})) \circ P_{2,k+1} = \\ &= (-1)^{k+1} (m_{1,k} \circ m_{1,2} - m_{1,2} \circ m_{1,k+1}) + (-1)^{k+1} (\text{id} \otimes U_{k-1,k}^{k-2,k}) \circ m_{1,k+1}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Как и ранее, эта выкладка не использует никаких свойств отображения $U_{k-1,k}^{k-2,k}$ (см. рисунок, иллюстрирующий преобразование слагаемого, включающего $U_{k-1,k}^{k-2,k}$; слагаемые, содержащие $m_{3,2}^*$ и $m_{2,3}$, преобразуются аналогично). Последнее слагаемое сокращается с подобным в правой части (3.48), члены $m \circ m$ сокращают таковые в (3.49), и равенство (3.48) принимает вид

$$\begin{aligned} &- m_{1,k} \circ ((\text{id} \otimes U_{k,k}^{k-2,k+1})(C^{k+1} \otimes C^k) + \\ &\quad + (-1)^k (\text{id} \otimes U_{k,k}^{k-2,k+1}) \circ P_{1,k+1}(C^k \otimes C^{k+1})) = \\ &= m_{1,2} \circ ((-1)^k (\text{id} \otimes U_{k,k}^{k-1,k})(C^{k+1} \otimes C^k) + \\ &\quad + (\text{id} \otimes U_{k,k}^{k-1,k}) \circ P_{1,k+1}(C^k \otimes C^{k+1})) + \\ &\quad + (-1)^k (\text{id} \otimes U_{k-1,k}^{k-2,k}) \circ m_{k+1,1}^*(C^k \otimes C^{k+1}) + \\ &\quad + (\text{id} \otimes U_{k-1,k}^{k-2,k}) \circ m_{1,2}(C^{k+1} \otimes C^k). \end{aligned}$$

Используя рекурсионное соотношение (3.47) и применяя рассуждения, полностью аналогичные тем, что применялись к (3.50), легко видеть, что это равенство является тождеством. Уравнение (3.39) доказано.

3.7. Окончание доказательства теоремы 3.1. Остается доказать равенство (2.16), или $\mathcal{X}^{(3)} = 0$, для БРСТ-дифференциала Ω . Доказательство опирается на алгебраические следствия уже установленных уравнений (2.15). Некоторые подробности таковы. Запишем Ω как в (2.12) в случае, когда τ_A и U_{AB} (с суммированием по повторяющимся индексам) имеют вид

$$\tau_A = t_A + Z_A^B \bar{\mathcal{P}}_B, \quad U_{AB} = U_{AB}^C \bar{\mathcal{P}}_C + \frac{1}{2} (-1)^{\varepsilon_C} U_{AB}^{CD} \bar{\mathcal{P}}_D \bar{\mathcal{P}}_C \quad (3.51)$$

с не зависящими от $\bar{\mathcal{P}}$ и C величинами t_A , Z_A^B , U_{AB}^C и U_{AB}^{CD} . Здесь $\varepsilon(C^A) = \varepsilon(\bar{\mathcal{P}}_A) = \varepsilon_A + 1$. Вообще говоря, $\mathbb{Z}_2$ -градуировки равны $\varepsilon(t_A) = \varepsilon_A$, $\varepsilon(Z_A^B) = \varepsilon_A + \varepsilon_B + 1$, $\varepsilon(U_{AB}^C) = \varepsilon_A + \varepsilon_B + \varepsilon_C$ и $\varepsilon(U_{AB}^{CD}) = \varepsilon_A + \varepsilon_B + \varepsilon_C + \varepsilon_D + 1$, но в нашем конкретном случае все эти отображения являются четными. Разлагая (2.14)–(2.16) по духовым

Графическое представление $m_{1,k} \circ P_{k,2} \circ (\text{id}^{\otimes 2} \otimes U_{k-1,k}^{k-2,k}) \circ P_{2,k+1}$ (изображенное при $k = 4$), показывающее, что это выражение тождественно совпадает с $(\text{id} \otimes U_{k-1,k}^{k-2,k}) \circ m_{1,k+1}$ (отмеченное пунктиром положение линии, изображающей $(k+1)$ -й тензорный множитель). Операторы $P_{k,2}$ и $m_{1,k}$ изображаются сплетением и слиянием линий, представляющих соответствующие тензорные множители. Порядок применения операций справа налево здесь соответствует порядку сверху вниз.

импульсам, помимо основных соотношений $Z_A^B t_B = 0$, $Z_A^B Z_B^C = 0$ и $[t_A, t_B] = U_{AB}^C t_C$ получаем коммутаторы, включающие Z_A^B :

$$\begin{aligned}
 [t_A, Z_B^D] - (-1)^{\varepsilon_A \varepsilon_B} [t_B, Z_A^D] = \\
 = U_{AB}^C Z_C^D - U_{AB}^{DC} t_C - (-1)^{\varepsilon_B} Z_A^C U_{CB}^D + (-1)^{\varepsilon_A(1+\varepsilon_B)} Z_B^C U_{CA}^D + \frac{1}{2} U_{AB}^{EC} U_{CE}^D, \\
 (-1)^{(\varepsilon_B+1)(\varepsilon_D+1)} [Z_A^D, Z_B^E] - (-1)^{(\varepsilon_B+1)(\varepsilon_E+1)+\varepsilon_D \varepsilon_E} [Z_A^E, Z_B^D] = -\frac{1}{2} U_{AB}^{FC} U_{CF}^{DE} + \\
 + (-1)^{\varepsilon_D} U_{AB}^{DC} Z_C^E - (-1)^{\varepsilon_E(1+\varepsilon_D)} U_{AB}^{EC} Z_C^D + \\
 + (-1)^{\varepsilon_B} Z_A^C U_{CB}^{DE} - (-1)^{\varepsilon_A(1+\varepsilon_B)} Z_B^C U_{CA}^{DE},
 \end{aligned} \tag{3.52}$$

а также (из (2.16)) тождество Якоби

$$(-1)^{\varepsilon_A \varepsilon_C} U_{AB}^D U_{DC}^E + \text{cycle}(A, B, C) = 0 \tag{3.54}$$

и его обобщения, включающие U_{AB}^{CD} с четырьмя индексами:

$$\begin{aligned}
 (-1)^{\varepsilon_A \varepsilon_C} (U_{AB}^D U_{DC}^{EF} + (-1)^{(\varepsilon_E+1)\varepsilon_C} U_{AB}^{ED} U_{DC}^F - \\
 - (-1)^{(\varepsilon_F+1)\varepsilon_C+\varepsilon_E \varepsilon_F} U_{AB}^{FD} U_{DC}^E) + \text{cycle}(A, B, C) = 0,
 \end{aligned} \tag{3.55}$$

$$\begin{aligned}
 (-1)^{(\varepsilon_E+1)(\varepsilon_C+1)+\varepsilon_A \varepsilon_C+\varepsilon_E \varepsilon_G} U_{AB}^{ED} U_{DC}^{FG} + \\
 + \text{cycle}(A, B, C) + \text{cycle}(E, F, G) = 0.
 \end{aligned} \tag{3.56}$$

Доказательство в п. 3.5, 3.6 есть не что иное, как демонстрация равенств (3.52) и (3.53). Остающиеся уравнения (3.54)–(3.56) получаются как алгебраические условия согласованности равенств (3.52) и (3.53) с использованием конкретных свойств Z_A^B и “правил отбора” для U_{AB}^C и U_{AB}^D . Для этого вычислим левую часть тождества Якоби $(-1)^{\varepsilon_A \varepsilon_C} [[\tau_A, \tau_B], \tau_C] + \text{cycle}(A, B, C) = 0$. Двойной коммутатор содержит члены нулевой, первой и второй степени по духовым импульсам,

$$[[\tau_A, \tau_B], \tau_C] = J_{ABC} + J_{ABC}^H \bar{\mathcal{P}}_H + J_{ABC}^{HG} \bar{\mathcal{P}}_G \bar{\mathcal{P}}_H,$$

где $J_{ABC} = U_{AB}^D U_{DC}^E t_E$ и

$$\begin{aligned} J_{ABC}^H = & -(-1)^{\varepsilon_C} U_{AB}^D Z_D^E U_{EC}^H + (-1)^{\varepsilon_D(\varepsilon_C+1)} U_{AB}^D Z_C^E U_{ED}^H + U_{AB}^D U_{DC}^E Z_E^H + \\ & + \frac{1}{2} U_{AB}^D U_{DC}^{EK} U_{KE}^H + (-1)^{\varepsilon_E \varepsilon_H} U_{AB}^D U_{DC}^{EH} t_E + \\ & + (-1)^{\varepsilon_D + (\varepsilon_H+1)(\varepsilon_D + \varepsilon_C)} U_{AB}^{DH} U_{DC}^E t_E + \\ & + (-1)^{\varepsilon_A \varepsilon_C + \varepsilon_B \varepsilon_C + \varepsilon_B} [t_C, Z_A^D] U_{DB}^H - (-1)^{\varepsilon_A \varepsilon_B + \varepsilon_B \varepsilon_C + \varepsilon_A \varepsilon_C + \varepsilon_A} [t_C, Z_B^D] U_{DA}^H \end{aligned}$$

(выражение для J_{ABC}^{HG} получается непосредственно, но оказывается достаточно громоздким). Обращение в нуль циклической суммы от $(-1)^{\varepsilon_A \varepsilon_C} J_{ABC}$ не позволяет сразу заключить, что циклическая сумма от $(-1)^{\varepsilon_A \varepsilon_C} U_{AB}^D U_{DC}^E$ обращается в нуль, поскольку, как видно из сравнения (3.13) и первого из равенств (3.51), t_A -члены присутствуют в τ_A только в “неприводимом секторе”, при $A = a$, в каковом случае t_a являются элементами базиса в $\mathcal{A}$. Следует поэтому различать случаи, когда индексы A, B, C принимают “младшие” и “старшие” значения, т.е. нумеруют соответственно элементы базиса в $\mathcal{A}$ и элементы базисов в $\mathcal{A}^{\otimes n}$ при $n \geq 2$. Но когда все три индекса принимают “старшие” значения, члены с коммутаторами в формуле для J_{ABC}^H обращаются в нуль. Более того, правила отбора для отображений U (а именно требование, чтобы значение $U_{m,n}^{m',n'}$ было ненулевым только при $m + n = m' + n' + 1$) показывают, что члены, содержащие t_E , также можно отбросить при общих “старших” значениях индексов A, B, C . Среди остающихся в J_{ABC}^H четырех слагаемых одно пропорционально единичному элементу алгебры, тогда как три других не пропорциональны (при вычислении на элементе общего положения в соответствующих тензорных степенях алгебры $\mathcal{A}$). К этим трем элементам (занимающим первую строчку в последней формуле) мы применим тот же прием взятия фактора по $\mathbb{C} \cdot 1$, что и в п. 3.5.3. В используемой нормировке это сводится к замене Z_A^B на $(-1)^{\varepsilon_A} \delta_A^B$. Два из трех слагаемых тогда сокращают друг друга, а циклическая сумма остающегося дает требуемое соотношение (3.54); остальные соотношения доказываются аналогично.

3.8. Дополнительные замечания.

3.8.1. “Гамильтонианы” и когомологии. Задачу о когомологиях дифференциала Ω можно в принципе рассматривать на различных пространствах. Как и в отношении общего вида Ω , мы позаимствуем одну постановку такой задачи из квантования калибровочных теорий. В настоящих калибровочных теориях (квантовый) гамильтониан $\mathcal{H} \in \mathbb{A}_{\text{gh}}^h$ коммутирует с Ω (и потому естественным образом рассматривается по модулю Ω -точных членов). Физическое требование состоит в том, чтобы $\text{gh } \mathcal{H} = 0$. В калибровочных теориях с замкнутой алгеброй гамильтонианы, как правило, не более чем

линейны по духам C , но могут зависеть от духовых импульсов. Мы ограничимся случаем не более чем билинейной зависимости от духовых импульсов и, кроме того, выберем часть, зависящую от духовых импульсов, “скалярной” в смысле коммутирования с элементами из $\mathbb{A}^{\hbar}$ (“исходными” операторами теории, не включающими духи). Такие гамильтонианы имеют вид

$$\mathcal{H} = H + \sum_{r \geq 1} \langle V_r(C^r), P_r \rangle + \sum_{s > r \geq 1} \langle V_{r+s}^{r,s}(C^{r+s}), P_r \otimes P_s \rangle,$$

где $H \in \mathcal{A}$, $V_r \in \text{Hom}(\mathcal{A}^{\otimes r}, \mathcal{A}^{\otimes r})$ и $V_m^{r,s} \in \text{Hom}(\mathcal{A}^{\otimes m}, \mathcal{A}^{\otimes r} \otimes \mathcal{A}^{\otimes s})$. Линейные по духам C члены в коммутаторе имеют вид

$$\begin{aligned} [\mathcal{H}, \Omega]_{C^{\otimes 1}} &= [H, C^1] + V_1(C^1) + \sum_{s \geq 1} \iota \left(\text{ad}_H \cdot Z^{s+1}(C^{s+1}) \right)_{P_s} + \\ &+ \sum_{s \geq 2} (-1)^s \iota (V_{s+1}^{1,s}(C^{s+1}))_{P_s} + \sum_{s \geq 1} (-1)^s \iota (Z^{s+1} \circ V_{s+1}(C^{s+1}))_{P_s} + \\ &+ \sum_{s \geq 1} (-1)^s \iota ((\text{id} \otimes V_s) \circ Z^{s+1}(C^{s+1}))_{P_s} + \\ &+ \sum_{s > r \geq 1} \sum (-1)^{r+s+r+s} \langle U_{r,s}^{r+s-1} \circ V_{r+s}^{r,s}(C^{r+s}), P_{r+s-1} \rangle + \dots, \end{aligned}$$

где многоточием обозначены пропорциональные $V_{r+s}^{r,s}$ члены, квадратичные по импульсам.

Для любого $H \in \mathcal{A}$ существуют отображения V_r такие, что $[\mathcal{H}, \Omega] = 0$. Действительно, обращение в нуль не зависящих от P_n членов в коммутаторе выражается как

$$[H, C^1] + V_1(C^1) = 0,$$

а обращение в нуль линейных по P_n слагаемых – как

$$\text{ad}_H \cdot Z^{n+1} + (-1)^n Z^{n+1} \circ V_{n+1} + (-1)^n (\text{id} \otimes V_n) \circ Z^{n+1} = 0,$$

что немедленно дает решение

$$V_n = (-1)^n \mathbb{L}_H.$$

Остается заметить, что $\mathbb{L}_H \circ U_{m,n}^{\ell, m+n-1-\ell} - U_{m,n}^{\ell, m+n-1-\ell} \circ \mathbb{L}_H = 0$ для любого $H \in \mathcal{A}$. Более того, гамильтониан $\mathcal{H}$ указанного вида не является Ω -точным, и поэтому когомологии Ω на пространстве таких операторов содержат алгебру $\mathcal{A}$.

3.8.2. Автоморфизмы. Очевидно, что соотношения $\Omega\Omega = 0$ сохраняются при преобразованиях подобия $\Omega \mapsto \mathcal{U}\Omega\mathcal{U}^{-1}$, где $\mathcal{U}$ – произвольный обратимый оператор на баг-резольвенте; естественный подкласс таких операторов дается “внутренними” автоморфизмами, $\mathcal{U} = e^{\mathfrak{G}}$ (в предположении, что экспоненциальное отображение существует), где $\mathfrak{G}$, $\text{gh } \mathfrak{G} = 0$, – произвольный оператор на баг-резольвенте. Следуя логике, использованной выше, можно дополнительно ограничить класс преобразований требованием,

чтобы все коэффициенты оператора $\mathfrak{G}$ за исключением постоянного члена были скалярными (но даже при таких операторах явный вид преобразованного БРСТ-дифференциала не будет соответствовать замкнутой алгебре). Этот класс содержит, в частности, преобразования, описанные в работе [11], которые “ковариантно” действуют на умножение $m \in \text{Hom}(\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}, \mathcal{A})$ и тем самым “сохраняют ассоциативность”. При ограничении на преобразования, сохраняющие максимальные степени в разложении по духам и духовым импульсам, может оказаться возможным получить такие решения для отображений $\mathcal{U}$, что выписанные в (3.22) отображения не обязательно обращаются в нуль.

Благодарности. Авторы признательны Б. Л. Фейгину, М. А. Григорьеву и И. В. Тютину за полезные обсуждения. Работа частично поддержана РФФИ (гранты № 02-01-00930 и № 00-15-96566), Фондом содействия российской науке и INTAS (грант № 00-00262).

Список литературы

- [1] *I. A. Batalin, G. A. Vilkovisky.* Phys. Lett. B. 1981. V. 102. P. 27–31.
- [2] *I. A. Batalin, E. S. Fradkin.* Ann. Inst. H. Poincaré (Phys. Theor.). 1988. V. 49. P. 145–214.
- [3] *M. Henneaux, C. Teitelboim.* Quantization of gauge systems. Princeton: Princeton University Press, 1992.
- [4] *J. Stasheff.* Homological reduction of constrained Poisson algebras. q-alg/9603021.
- [5] *I. A. Batalin, E. S. Fradkin.* Phys. Lett. B. 1983. V. 122. P. 157–164.
- [6] *I. A. Batalin, G. A. Vilkovisky.* Phys. Lett. B. 1983. V. 120. P. 166–170; Phys. Rev. D. 1983. V. 28. P. 2567–2582; Erratum. 1984. V. 30. P. 508; *G. A. Vilkovisky.* Lett. Math. Phys. 1999. V. 49. P. 123–130.
- [7] *R. Kallosh, W. Troost, A. Van Proeyen.* Phys. Lett. B. 1988. V. 212. P. 428–436; *E. Bergshoeff, R. Kallosh, T. Ortin, G. Papadopoulos.* Nucl. Phys. B. 1997. V. 502. P. 149–169.
- [8] *F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz, D. Sternheimer.* Ann. Phys. 1978. V. 111. P. 61–110; P. 111–151; *B. V. Fedosov.* J. Diff. Geom. 1994. V. 40. P. 213–238; Deformation quantization and index theory. Berlin: Akademie-Verl., 1996 (Mathematical topics: 9); *M. Kontsevich.* Deformation quantization of Poisson manifolds. I. q-alg/9709040.
- [9] *W. Arveson.* The harmonic analysis of automorphism groups. In: Operator Algebras and Applications. Part I. Proc. of the 28th Summer Institute of the American Mathematical Society Held at Queen's Univ., Kingston, Ont., July 14–August 2, 1980. Symp. Pure Math. V. 38. Ed. R. V. Kadison. Providence, RI: AMS, 1982. P. 199–269; *M. Karoubi.* Astérisque. 1987. V. 149. P. 1–147.
- [10] *J. Cuntz, D. Quillen.* J. Am. Math. Soc. 1995. V. 8. P. 251–289.
- [11] *I. A. Batalin, I. V. Tyutin.* J. Math. Phys. 1993. V. 34. P. 369–380.

Поступила в редакцию 19.I.2003 г.