Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Козориз, Ю. Р. Мусин, К задаче рассеяния классической частицы со спином в кулоновском поле, *ТМФ*, 2004, том 138, номер 2, 338–348

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf23>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 18:32:23

К ЗАДАЧЕ РАССЕЯНИЯ КЛАССИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ В КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ

Рассмотрена задача рассеяния релятивистского электрона со спином в кулоновском поле в рамках псевдоклассической механики. Получено аналитическое выражение для угла рассеяния и даны предельные оценки параметров рассеяния для бесспинового и нерелятивистского случаев. Для случая малых углов рассматриваемая псевдоклассическая модель приводит к известной квантово-механической формуле Мотта.

Ключевые слова: псевдоклассическая механика, суперсимметрия, суперчастица, уравнения Баргмана–Мишеля–Телегди, формула Мотта, рассеяние.

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача об упругом рассеянии электрона в кулоновском поле подробно изучена как на классическом, так и на квантовом уровне [1]–[6]. Тем не менее остался неисследованным вопрос о вкладе в сечения рассеяния чисто квантовых эффектов (см. таблицу). Как известно, формула Резерфорда, отвечающая случаю рассеяния электрона без учета спина, может быть получена как в классической, так и в квантовой теории [1]–[4]. Формула Мотта, описывающая сечение рассеяния с учетом спина электрона, справедлива как в релятивистской, так и в нерелятивистской квантовой механике [5]. Отсутствие классических моделей спина до недавнего времени делало невозможным прямое сравнение квантово-механических и классических подходов. С созданием псевдоклассической механики (механики над алгеброй Грассмана [6], [7]) и построением на ее основе суперсимметричных моделей электрона с учетом спина [8], [9] это стало возможным. В рамках нерелятивистской псевдоклассической механики задача о движении частицы со спином в центральном поле была решена Березиным и Мариновым [6], но соответствующее сечение рассеяния в кулоновском поле они не рассчитывали. В работе [10] было найдено аналитическое решение задачи о движении релятивистского суперсимметричного электрона в кулоновском поле. В данной работе мы находим угол рассеяния и сечение рассеяния для этой псевдомеханической модели.

*Московский авиационный институт им. С. Орджоникидзе, Москва, Россия.
E-mail: vkozoriz@rambler.ru; maino@mai.ru

Исследование движения электрона в кулоновском поле

Теории			Частицы	
			Бесспиновая частица	Частица со спином 1/2
Классическая механика	Нерелятивистская	Уравнения движения	Ньютон	Псевдоклассическая механика, Березин [6]
		Сечение рассеяния	Резерфорд [1]	не получено
	Релятивистская	Уравнения движения	СТО	Псевдоклассическая механика, Баргман Мишель, Телегди
		Сечение рассеяния	Резерфорд [2]	Данная статья
Квантовая механика	Нерелятивистская	Уравнения движения	Шредингер	Паули
		Сечение рассеяния	Резерфорд [3]	Мотт [5]
	Релятивистская	Уравнения движения	Клейн, Гордон	Дирак
		Сечение рассеяния	Резерфорд [4]	Мотт [5]

2. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

В качестве псевдоклассической модели электрона мы используем вариант релятивистской модели Ди Векиа–Равндела [6] с фиксированной калибровкой. В основе модели лежит процедура суперрасширения собственного времени частицы s до супервремени (s, τ) . Дополнительная временная координата τ является антикоммутирующей, а сами переменные s и τ интерпретируются как четная и нечетная образующие алгебры Грассмана $G_{1,1}$ [9] со следующими свойствами:

$$[s, s] = 0, \quad \{\tau, \tau\} = 0, \quad [s, \tau] = 0,$$

где $[\cdot, \cdot]$ – коммутатор, а $\{\cdot, \cdot\}$ – антикоммутатор.

Геометрия плоского супервремени задается дифференциальной формой

$$\omega = ds - i\tau d\tau.$$

Она инвариантна относительно трансляций вдоль четного времени

$$s' = s + \tilde{\alpha}, \quad \tau' = \tau, \tag{1}$$

где $\tilde{\alpha}$ – произвольная константа, и суперповоротов

$$s' = s + i\epsilon\tau, \quad \tau' = \tau + \epsilon, \quad (2)$$

где ϵ – произвольная нечетная константа алгебры Грассмана.

Векторные поля на супервремени называются суперкоординатами. Связь между суперкоординатой $X^\mu(s, \tau)$ и обычными координатами устанавливается разложением суперкоординаты по нечетному времени. В силу нильпотентности последнего разложение обрывается на втором члене:

$$X^\mu(s, \tau) = x^\mu(s) + i\theta^\mu(s)\tau, \quad \mu = 0, 1, 2, 3,$$

где $x^\mu(s)$ – пространственные координаты, а $\theta^\mu(s)$ интерпретируются как внутренние (спиновые) координаты, причем

$$i\theta^\mu(s) = \left. \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \right|_{\tau=0}.$$

Генераторы преобразований суперкоординат $X^\mu(s, \tau)$, порождаемые движениями плоскости (s, τ) , имеют следующий вид:

а) трансляция:

$$\tilde{H} = i\frac{\partial}{\partial s}, \quad \delta X^\mu = -\tilde{\alpha}i\tilde{H}X^\mu;$$

б) суперповорот:

$$Q = i\tau\frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad \delta X^\mu = \epsilon QX^\mu.$$

Операторы $\tilde{H}$, Q и сопряженный к Q оператор

$$D = \overline{Q} = -i\tau\frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial \tau}$$

образуют два представления алгебры суперсимметрии (SUSY)

$$\begin{aligned} (Q, \tilde{H}) : \quad [Q, \tilde{H}] &= [\tilde{H}, \tilde{H}] = 0, \quad \{Q, Q\} = 2\tilde{H}; \\ (D, \tilde{H}) : \quad [D, \tilde{H}] &= [\tilde{H}, \tilde{H}] = 0, \quad \{D, D\} = -2\tilde{H}. \end{aligned}$$

Действие для свободной частицы со спином имеет вид [8]

$$S = \frac{1}{2} \int ds \int d\tau D X^\mu D D X_\mu. \quad (3)$$

Лагранжев множитель выберем равным единице. Считаем для простоты, что $c = m = 1$, где c – скорость света, m – масса частицы. После подстановки выражений для D и X^μ получим выражение

$$S = \frac{1}{2} \int ds (\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu + i\theta_\mu \dot{\theta}^\mu),$$

где точкой обозначается производная по собственному времени s .

Для введения взаимодействия “удлиним” производную:

$$DDX^\mu \rightarrow DDX^\mu + 2ieA^\mu(X), \quad X = (X^0, X^1, X^2, X^3),$$

где $A^\mu(X)$ – 4-потенциал электромагнитного поля, его можно представить в виде

$$A^\mu(X) = A^\mu(x) + \left. \frac{\partial A^\mu(x)}{\partial X^\nu} \right|_{\tau=0} i\theta^\nu \tau, \quad x = (x^0, x^1, x^2, x^3).$$

Подставляя в исходное действие (3) новую производную и выражения для A^μ и X^μ , получим следующее выражение:

$$S = \int ds \left(\frac{1}{2} \dot{x}^\mu \dot{x}_\mu + \frac{1}{2} i\theta^\mu \dot{\theta}_\mu + q\dot{x}^\mu A_\mu + iq\partial_\nu A_\mu \theta^\mu \theta^\nu \right).$$

Уравнения движения, вытекающие из этого действия, имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{x}_\mu - qF_{\mu\nu}\dot{x}^\nu - \frac{q}{2}S^{\nu\alpha}\partial_\mu F_{\nu\alpha} &= 0, \\ \dot{\theta}_\mu - qF_{\mu\nu}\theta^\nu &= 0, \end{aligned} \tag{4}$$

где $S^{\nu\alpha} = -i\theta^\nu\theta^\alpha$ – тензор спина, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ – тензор электромагнитного поля. Уравнения (4) формально совпадают с традиционными уравнениями Баргмана–Мишеля–Телегди (БМТ) для частицы с гиромагнитным отношением $g = 2$ (следствие суперсимметрии (3)). Однако уравнения (4) являются только грасмановым аналогом уравнений БМТ, поскольку все величины, используемые в (3), являются элементами алгебры Березина. Переход от них к действительным числам может быть осуществлен с помощью функции плотности обычным образом [11]. С физической точки зрения второе слагаемое в первом уравнении есть сила Лоренца, а третье слагаемое – сила Кельвина [12], [13], обусловленная взаимодействием спина с градиентом электромагнитного поля.

В рамках этой модели в работе [10] были получены уравнения движения и траектории движения электрона, а также эволюции его спина для случая кулоновского поля.

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ УГЛА РАССЕЯНИЯ

В случае движения электрона в кулоновском поле массивного ядра $\varphi = Ze/r$, где Ze – заряд ядра, можно получить компактное аналитическое выражение для угла рассеяния. Для этого воспользуемся полученным в [10] аналитическим выражением для траектории. Уравнение траектории в полярных координатах для притягивающего центра имеет вид

$$r(\alpha_0) = \frac{P}{1 + D_0 \cos \omega \alpha_0 + \Lambda H (\cos \omega \alpha_0 + 1)}, \quad \gamma(\alpha_0) = \frac{\pi}{2} + \Lambda A \cos \alpha_0, \quad (5)$$

$$\alpha_0 = \frac{\alpha}{1 - \Lambda B},$$

где α – азимутальный угол, γ – полярный угол, r – радиус-вектор, $\omega = \sqrt{1 - \varrho^2}$, $\varrho = qQ/(cK)$ ($\varrho < 1$),

$$P = \frac{K^2 c^2 - Z^2 e^4}{Ze^2 E}, \quad H = \frac{2mZe^2 c^2}{K^2 c^2 - Z^2 e^4}, \quad B = \frac{mZe^2 c}{K \sqrt{K^2 c^2 - Z^2 e^4}},$$

$$D_0 = \frac{1}{\varrho} \sqrt{1 - \frac{m^2 c^4}{E^2} (1 - \varrho^2)},$$

D_0 , A – константы интегрирования, K – компонента 4-импульса, отвечающая углу α , E – энергия налетающего электрона ($E > mc^2$), Λ – интеграл движения, связанный со спином электрона, а именно компонента $-S^{01}$ 4-тензора спина ($\Lambda^2 = 0$), m – масса электрона.

Рис. 1. Определение угла рассеяния для пространственной траектории электрона.

Зная уравнение траектории, легко получить угол α_0^* , при котором r стремится к бесконечности:

$$\alpha_0^* = \frac{\pi}{\omega} - \frac{1}{\omega} \arccos \left(\frac{\Lambda H + 1}{D_0 + \Lambda H} \right).$$

Рис. 2. Проекция траектории электрона вблизи притягивающего центра на плоскость xOy .

Угол α^* находится согласно (5), а угол рассеяния (см. рис. 1, 2) по формуле

$$\theta = \arccos\{\sin(\gamma(\alpha^*)) \cos(-\pi + 2\alpha^*)\}.$$

С учетом нильпотентности Λ

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \cos(\alpha_0 - \Lambda B \alpha_0) = \cos \alpha_0 + \Lambda B \alpha_0 \sin \alpha_0, \\ \gamma(\alpha) &= \frac{\pi}{2} + \Lambda A \cos \alpha = \frac{\pi}{2} + \Lambda A \cos \alpha_0 = \gamma(\alpha_0), \\ \sin \gamma &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + \Lambda A \cos \alpha_0\right) = \sin \frac{\pi}{2} + \Lambda A \cos \alpha_0 \cos \frac{\pi}{2} = 1,\end{aligned}$$

получим

$$\theta = -\pi + 2\alpha^*.$$

Окончательное выражение для угла рассеяния в релятивистском случае при наличии спина частицы в рамках псевдоклассической механики (притягивающий центр) имеет вид

$$\theta = -\pi + \frac{2\pi}{\omega} - \frac{2}{\omega} \arccos\left(\frac{\Lambda H + 1}{D_0 + \Lambda H}\right) - \Lambda B \left\{ \frac{2\pi}{\omega} - \frac{2}{\omega} \arccos\left(\frac{\Lambda H + 1}{D_0 + \Lambda H}\right) \right\}. \quad (6)$$

Асимметрия угла рассеяния при этом учитывается знаком величины Λ , которая может принимать как отрицательные, так и положительные значения.

С помощью аналогичных рассуждений для отталкивающего центра, уравнение траектории для которого имеет вид

$$\begin{aligned}r(\alpha_0) &= \frac{P}{-1 + D_0 \cos \omega \alpha_0 + \Lambda H (\cos \omega \alpha_0 - 1)}, & \gamma(\alpha_0) &= \frac{\pi}{2} + \Lambda A \cos \alpha_0, \\ \alpha_0 &= \frac{\alpha}{1 + \Lambda B},\end{aligned}$$

получим следующее выражение для угла рассеяния (рис. 3):

$$\theta = \pi - \frac{2}{\omega} \arccos \left(\frac{\Lambda H + 1}{D_0 + \Lambda H} \right) - \frac{2\Lambda B}{\omega} \arccos \left(\frac{\Lambda H + 1}{D_0 + \Lambda H} \right). \quad (7)$$

Рис. 3. Проекция траектории электрона вблизи отталкивающего центра на плоскость xOy .

Полученные выражения (6), (7) при $\Lambda = 0$ совпадают с выражениями для угла рассеяния в релятивистском бесспиновом случае [14].

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ СЕЧЕНИЯ РАССЕЯНИЯ

Чтобы получить явную формулу сечения рассеяния, необходимо из формулы (например, для (7))

$$\theta = \pi - \frac{2}{\sqrt{1 - Z^2 e^4 / (r_0^2 c^2 p^2)}} \left(1 + \frac{c e^2 m Z \Lambda}{r_0 p \sqrt{r_0^2 c^2 p^2 - Z^2 e^4}} \right) \times \\ \times \arccos \left(\frac{1 + 2 c^2 e^2 m Z \Lambda / (r_0^2 c^2 p^2 - Z^2 e^4)}{r_0 v_0 \sqrt{p^2 + Z^2 e^4 / (r_0^2 v_0^2)} / (Z e^2) + 2 c^2 e^2 m Z \Lambda / (r_0^2 c^2 p^2 - Z^2 e^4)} \right)$$

определить зависимость прицельного параметра r_0 от θ (здесь v_0 – скорость, а p – импульс налетающего электрона на бесконечности). Сделать это в аналитическом виде невозможно (как это не сделано и в бесспиновом случае), но можно воспользоваться численными методами (рассмотрение численных решений выходит за рамки данной статьи).

Исследуем данные формулы при больших прицельных параметрах, которым, как известно, отвечают малые углы рассеяния. В этом случае, например, формула (6) примет вид

$$\theta \approx \frac{2Ze^2}{v_0 r_0 p} + \frac{Ze^2 \Lambda \pi}{mc v_0 p r_0^2}, \quad (8)$$

что позволит найти интересующую нас зависимость r_0 от θ .

Заметим, что к такому же результату можно прийти в процессе общеизвестных [15] элементарных рассуждений. Рассмотрим движение электрона в кулоновском поле массивного ядра $\varphi = Ze/r$ при большом прицельном параметре (выберем ось y в направлении первоначального движения электрона). В системе покоя ядра, считая траекторию электрона прямой (угол рассеяния мал) и лежащей в плоскости xOy , найдем импульс, переданный ядру:

$$p_x = \int_{-\infty}^{\infty} [ZeE_x(t) + (F_{SE})_x(t)] dt, \quad (9)$$

где $ZeE_x(t)$ и $(F_{SE})_x(t)$ — x -компоненты силы Кулона и силы Кельвина, соответственно, действующие на ядро со стороны налетающего электрона в момент времени t . Модуль силы $\mathbf{F}_{SE}$, как было ранее показано в работе [10], равен

$$F_{SE} = \frac{1}{mc} \frac{2Ze^2 \Lambda}{r^3}.$$

Таким образом,

$$E_x = \frac{er_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2} [r_0^2 + (vt)^2 / (1 - (v/c)^2)]^{3/2}}, \quad (10)$$

$$(F_{SE})_x = \frac{2Ze^2 \Lambda r_0}{mc \sqrt{1 - (v/c)^2} [r_0^2 + (vt)^2 / (1 - (v/c)^2)]^2}, \quad (11)$$

где v — скорость электрона в момент времени t .

Подставляя (10) и (11) в (9) и интегрируя, получим

$$p_x = \frac{2Ze^2}{v_0 r_0} + \frac{Ze^2 \Lambda \pi}{mc v_0 r_0^2}. \quad (12)$$

По закону сохранения импульса x -компонента импульса налетающей частицы после столкновения будет отличаться от величины (12) только знаком, поэтому угол рассеяния равен

$$\theta \approx \frac{|p_x|}{p},$$

что совпадает с (8).

Таким образом, дифференциальное сечение рассеяния для малых углов (с точностью до θ во втором множителе) имеет вид

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{\theta} r_0(\theta) \frac{dr_0(\theta)}{d\theta} = \left(\frac{2Ze^2}{v_0 p} \right)^2 \frac{1}{\theta^4} \left(1 + \frac{\pi v_0^2 \Lambda}{4Ze^2 c} \theta \right). \quad (13)$$

Первое слагаемое есть не что иное, как Резерфордское сечение рассеяния, а второе представляет собой поправку к сечению, обусловленную спином электрона.

Согласно правилам перехода от грассмановых величин теории к обычным числам [11] тензору спина при усреднении сопоставляется следующее численное выражение:

$$\langle S^{\mu\nu} \rangle = u_\alpha S_\beta \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu},$$

где S_β – классический аналог вектора Паули–Любаньского, т.е. числовой 4-спин, а u_α – 4-скорость электрона.

Следовательно, величина Λ , входящая в сечение, должна иметь вид (движение в данном приближении плоское)

$$\Lambda = \langle i\theta^0\theta^1 \rangle = -\langle S^{01} \rangle = S_3 u_2,$$

где S_3 – проекция вектора спина на ось Oz , u_2 – компонента 4-скорости по угловой координате α .

Для сопоставления полученного выражения (13) с формулой Мотта [5]

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Ze^2}{2v_0 p} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \pm \frac{\pi Ze^2 v_0}{\hbar c^2} \sin \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \right) \right) \quad (14)$$

поступим следующим образом. Формула (14) получена при выборе определенной поляризации налетающих электронов. В псевдоклассической модели это означает фиксацию проекции спина на выделенное направление. Как показано в работе [11], матрица плотности, возникающая после квантования модели Ди Векиа–Равндела, будет положительно-полуопределенной, если только пространственные компоненты вектора спина $|S_k| \leq \hbar/2$. Но если налетающий электрон в некоторый момент времени имеет фиксированное значение проекции спина $|S_3| = \hbar/2$, то значение величины u_2 в этот момент не может быть выбрано произвольно, так как оно представляет собой некоторую функцию от параметров Z , v_0 , S_3 , определяющих траекторию электрона. Значение u_2 удобно записать в форме

$$u_2 = \frac{\Lambda_0 Ze^2}{\hbar c},$$

где Λ_0 – некоторая безразмерная числовая константа. Такая форма естественна, если исходить из выражения для скорости в теории Бора [15]

$$v_n = \frac{Ze^2}{\hbar} \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Таким образом, величина Λ , определяющая вклад спина в сечение рассеяния, запишется в виде

$$\Lambda = \pm |S_3| u_2 = \pm \frac{\Lambda_0 Z e^2}{2c}.$$

Подставляя полученное выражение в (13), имеем

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{2Ze^2}{v_0 p} \right)^2 \frac{1}{\theta^4} \left(1 \pm \frac{\pi Z e^2 v_0}{2\hbar c^2} \frac{\Lambda_0}{4} \theta \right).$$

Сравнивая полученное выражение с формулой Мотта (14), убеждаемся, что они совпадают для малых углов при значении $\Lambda_0 = 4$. Это значение и нужно использовать при численном расчете сечения рассеяния на произвольные углы по формулам (6), (7).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Спин электрона имеет квантовую природу, что наводит на мысль о невозможности какого-либо классического его описания. В свое время это составило основу критики гипотезы о спине, как свойстве классического вращающегося волчка. Наиболее развитая из классических теорий спина – релятивистская модель точечного волчка Френкеля [16] – давала поправку к расчету спин-орбитального взаимодействия (поправку Томаса–Френкеля), в два раза большую, чем экспериментальные значения.

После создания квантовой релятивистской модели спина на основе уравнения Дирака модель Френкеля была отброшена. Однако уравнения БМТ возникали и в теории Френкеля. Это связано с тем обстоятельством, что уравнение эволюции спина БМТ имеет классический характер – оно не содержит явно постоянной Планка. Эти уравнения можно рассматривать как классическое приближение общего уравнения эволюции спина в представлении Гейзенберга [16]. Переход к уравнениям БМТ фактически означает пренебрежение эффектами “квантового дрожания” (Zitterbewegung) электрона.

Псевдоклассическая модель электрона, рассмотренная в данной статье, лишена недостатков классических моделей. Она дает правильное гиромагнитное отношение, при квантовании переходит в модель Дирака, “квантовому дрожанию” в ней отвечают нечетные грасмановы переменные, которые исчезают при усреднении [9], [11]. Поэтому все, что отличает предсказание этой модели от квантовой модели Дирака, представляет собой “чисто квантовый” вклад природы спина. Как всякая классическая модель, она содержит множество подробностей, отсутствующих в квантовой модели (траектории, прицельные параметры и т.п.).

Сопоставляя классические решения с квантовыми, можно получить ограничения на параметры модели. Так, сравнение с расчетами Мотта дает ограничение на величину азимутальной составляющей скорости

$$u_2 \geq \frac{4Ze^2}{\hbar c}. \quad (15)$$

При фиксации величины проекции спина $|S_3| = \hbar/2$ это неравенство превращается в некоторое условие квантования, аналогичное условию Бора–Зоммерфельда в старой квантовой теории.

В качестве дальнейшего развития предлагаемого подхода можно исследовать случай финитных траекторий электрона в кулоновском поле, т.е. построить псевдоклассическую модель “атома по Бору со спином”. Кроме обычных условий квантования из рассмотрения спин-орбитальных поправок в ней должны возникать условия квантования на компоненты спина, аналогичные (15).

Список литературы

- [1] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Механика. М.: Наука, 1988.
- [2] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теория поля. М.: Наука, 1988.
- [3] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Квантовая механика. М.: Наука, 1988.
- [4] В. М. Галицкий, Б. М. Карнаков, В. И. Коган. Задачи по квантовой механике. М.: Наука, 1992.
- [5] Н. Мотт, Г. Мессии. Теория атомных столкновений. М.: Мир, 1969.
- [6] F. A. Berezin, M. S. Marinov. Ann. Phys. 1977. V. 104. P. 336.
- [7] Ю.Р. Мусин, В.В. Чередов. Введение в суперсимметричную механику. Депонировано в ВИНТИ. № 8713-B88. М.: ВИНТИ, 1988.
- [8] F. Ravndal. Phys. Rev. D. 1980. V. 21. P. 2832.
- [9] P. G. O. Freund. Introduction to Supersymmetry. Berlin: Springer, 1986.
- [10] Ю.Р. Мусин, В.И. Козориз. ТМФ. 2000. Т. 123. № 1. С. 75.
- [11] Ю.Р. Мусин. Изв. вузов. Физика. 1991. Т. 7. С. 5.
- [12] H. Rumpf. Gen. Relativity Gravitation. 1982. V. 14. № 9. P. 773.
- [13] С.Р. де Гроот, Л.Г. Самморн. Электродинамика. М.: Наука, 1982.
- [14] H. Frommert. Int. J. Theor. Phys. 1996. V. 35. № 12. P. 2631.
- [15] Д. Бом. Квантовая теория. М.: Наука, 1965.
- [16] И. М. Тернов. Введение в физику спина релятивистских частиц. М.: Изд-во МГУ, 1997.

Поступила в редакцию 21.III.2003 г.