Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Д. Гладуш, Пятимерная общая теория относительности и теория Калуцы–Клейна, *ТМФ*, 2003, том 136, номер 3, 480–495

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf231>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 16:21:57

© 2003 г.

В. Д. Гладуш*

ПЯТИМЕРНАЯ ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И ТЕОРИЯ КАЛУЦЫ–КЛЕЙНА

В рамках пятимерной теории гравитации рассмотрены пространства, которые допускают семейство максимально симметричных трехмерных подпространств. Для этих пространств строятся пятимерные вакуумные уравнения Эйнштейна и вводится пятимерный аналог массовой функции. Соответствующий ей закон сохранения некоторого заряда приводит к пятимерному аналогу теоремы Биркгофа. Отсюда следует, что для рассматриваемых пространств условие цилиндричности реализуется динамически. Для некоторых полученных метрик условие регулярности приводит к замкнутости пятой координаты. При этом оказывается возможным связать величину периода пятой координаты с сохраняющимся зарядом. Обсуждается проблема разделения динамических степеней свободы скалярного и гравитационного полей, полученных в результате редукции исходного пятимерного действия к четырехмерному виду, и связанная с этим проблема конформной неоднозначности калибровки 4-метрики. Параметризация скалярного поля и 4-метрики, приводящая к конформно-инвариантной теории взаимодействующих скалярного и гравитационного полей, представляется наиболее естественной.

Ключевые слова: теорема Биркгофа, условие цилиндричности, периодичность, массовая функция.

1. ВВЕДЕНИЕ

Основной постулат пятимерной теории Калуцы–Клейна (КК) – условие цилиндричности. Оно является одним из тех предположений, которые порождают много вопросов и нуждаются в обосновании. Другой постулат – условие замкнутости пространства по пятой координате. Здесь тоже имеются нерешенные вопросы, один из которых – величина периода по пятой координате.

С другой стороны, в общей теории относительности (ОТО) известна теорема Биркгофа, из которой следует, что при определенных условиях решение Шварцшильда является единственным сферически-симметричным решением вакуумных уравнений Эйнштейна [1]. Эта теорема фактически является следствием существования массовой функции

* Днепропетровский национальный университет, Днепропетровск, Украина.
E-mail: gladush@ff.dsu.dp.ua

и соответствующего ей закона сохранения. В пятимерной ОТО выполняется ослабленный вариант теоремы Биркгофа. В этом случае существует сферически-симметричное статическое решение вакуумных пятимерных уравнений Эйнштейна [2], которое является единственным статическим решением [3]. Существуют также и различные нестатические решения [4].

Кроме теоремы Биркгофа упомянем известный результат, устанавливающий связь между условием регулярности горизонта черной дыры и периодичностью $(8\pi m)$ Хоукинга евклидового времени $t_E = -it$ для шварцшильдова линейного элемента.

Оказывается, что предположения КК и отмеченные выше результаты ОТО, сформулированные для пятимерного случая, являются связанными. Действительно, в рамках пятимерной ОТО [5] можно ввести пятимерный аналог массовой функции и доказать пятимерную теорему Биркгофа, если расширить понятие сферической симметрии в пятимерном пространстве. Для этого достаточно в определении сферической симметрии пространства произвести замену $\{V^4, O(2), S^2\} \rightarrow \{V^5, O(3), S^3\}$, где $O(2)$ и $O(3)$ – группы вращений. Они являются группами движений V^4 и V^5 , действующими транзитивно на семействах двумерных и трехмерных концентрических сфер S^2 и S^3 , соответственно. В этом смысле можно ставить вопрос о пятимерном аналоге решения Шварцшильда и о его единственности. Более того, по аналогии с регулярностью горизонта и периодичностью евклидового времени решения Шварцшильда, можно рассмотреть вопрос о регулярности “горизонта” построенного пятимерного решения и его периодичности по пятой координате x^4 .

Подобный вариант механизма для спонтанно индуцированной компактификации в рамках теории КК рассматривался в работе [6], где x^4 -периодичность является эффектом, индуцированным движущимся тахионом.

В этой работе мы показываем, что основные черты теории КК, а именно условие цилиндричности и x^4 -периодичность, могут реализоваться динамически для $O(3)$ - (или $O(1, 2)$ -) симметричных пространств пятимерной ОТО. Для таких пространств в силу пятимерной теоремы Биркгофа решение пятимерных вакуумных уравнений Эйнштейна единственно и в обобщенных координатах кривизн не зависит от пятой координаты x^4 . Это дает нам условие цилиндричности. Далее, требование отсутствия конической сингулярности на горизонте диктует периодичность по координате x^4 (или по ее мнимому продолжению) с периодом $L = 2\pi\sqrt{K_0 G}$, когда $K_0 G > 0$. Здесь $K_0 = \pm 1$ определяет знак кривизны максимально симметричных подпространств S^3 , а G – сохраняющийся заряд, являющийся источником скалярного поля.

Кроме отмеченных аспектов теории КК в работе рассматривается проблема разделения степеней свободы скалярного и гравитационного полей и связанная с ней проблема конформной неоднозначности калибровки 4-метрики. Параметризация скалярного поля и метрики, приводящая к четырехмерной теории взаимодействующих конформно-инвариантного скалярного и гравитационного полей, представляется наиболее естественной при разделении степеней свободы.

В разделе 2 устанавливается пятимерная теорема Биркгофа в пятимерной теории гравитации. При этом рассматривается общая ситуация, когда пятимерное простран-

ство V^5 допускает группу движений, действующую транзитивно на семействе трехмерных пространственноподобных или времениподобных поверхностей постоянной кривизны Σ^3 . В рамках пятимерного обобщения ОТО строятся пятимерные вакуумные уравнения Эйнштейна и вводится пятимерный аналог массовой функции. Отсюда вытекает закон сохранения, который является основным признаком справедливости пятимерной теоремы Биркгофа. Для некоторых полученных метрик находится величина периода по пятой координате. В разделе 3 рассматриваются некоторые представления полученных метрик. В разделе 4 обсуждается вопрос о динамических степенях свободы системы взаимодействующих скалярного и гравитационного полей, полученной в результате редукции теории к четырехмерному виду. Рассматривается задача отделения и интерпретации этих степеней свободы, а также связанная с этим проблема конформной неоднозначности калибровки 4-метрики.

2. ПЯТИМЕРНАЯ “ТЕОРЕМА БИРКГОФА”, УСЛОВИЕ ЦИЛИНДРИЧНОСТИ И x^4 -ПЕРИОДИЧНОСТЬ

Рассмотрим в рамках пятимерной ОТО [5] пятимерное псевдориманово пространство V^5 с метрикой ${}^{(5)}g_{AB}$ ($A, B = 0, 1, 2, 3, 4$) (сигнатуры $(+ - - -)$), зависящей в общем случае от всех координат x^A . Указанная метрика удовлетворяет пятимерным уравнениям Эйнштейна в вакууме

$${}^{(5)}G_B^A = {}^{(5)}R_B^A - \frac{1}{2} {}^{(5)}R \delta_B^A = 0. \quad (1)$$

Эти уравнения следуют из пятимерного вариационного принципа Гильберта для действия

$$I = - \int \sqrt{|{}^{(5)}g|} {}^{(5)}R d^5x, \quad (2)$$

где ${}^{(5)}g = \det \{ {}^{(5)}g_{AB} \}$.

Пространство V^5 , обобщающее сферически-симметричное пространство ОТО, должно допускать группу движений, совпадающую с группой $O(3)$ или группой $O(1, 2)$. Она действует транзитивно на семействе трехмерных пространственных или пространственно-временных поверхностей Σ^3 постоянной кривизны. На таких максимально симметричных поверхностях обычно вводятся угловые координаты, однако для пространственно-временных поверхностей Σ^3 они оказываются неполными. Например, метрика $ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$ при преобразовании координат $t = T \operatorname{ch} R$, $r = T \operatorname{sh} R$ переходит в метрику $ds^2 = dT^2 - T^2(dR^2 + \operatorname{sh}^2 R(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2))$, которая описывает лишь области $t^2 - r^2 \geq 0$ исходного полного пространства-времени. Наоборот, области $t^2 - r^2 \leq 0$ описываются метрикой $ds^2 = R^2(dT^2 - \operatorname{ch}^2 T(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)) - dR^2$, которая получается при преобразовании координат $t = R \operatorname{sh} T$, $r = R \operatorname{ch} T$. В связи с этим удобнее использовать универсальные стереографические координаты, связанные с обобщенной стереографической проекцией Σ^3 на соответствующее евклидово или псевдоевклидово пространство E^3 (см., например, статью [7]).

Искомую метрику можно представить в следующей $(2 + 3)$ -форме:

$$^{(5)}ds^2 = ^{(2)}ds^2 - \Lambda^2 ^{(3)}d\Omega_\epsilon^2, \quad ^{(2)}ds^2 = g_{ab} dx^a dx^b, \quad (3)$$

где

$$^{(3)}d\Omega_\epsilon^2 = h_{ij} dx^i dx^j = \frac{\epsilon(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2}{(1 + \frac{K_0}{4}S_\epsilon^2)^2} \quad (4)$$

– метрики трехмерных пространств единичной положительной ($K_0 = 1$), отрицательной ($K_0 = -1$) или нулевой ($K_0 = 0$) кривизны в стереографических координатах x^i (см. ниже приложение). Здесь $S_\epsilon^2 = \epsilon(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$ и $\epsilon = \pm 1$. Если сечение Σ^3 является пространственным (пространственно-временным), то в метрике (4) берутся верхние (нижние) знаки. Величины g_{ab} и Λ зависят только от координат x^a , причем $a, b = 0, 4$; $i, j = 1, 2, 3$.

Для метрики (3) компоненты тензора Риччи имеют вид

$$^{(5)}R_{ab} = ^{(2)}R_{ab} - 3\Lambda^{-1}\nabla_a\nabla_b\Lambda, \quad (5)$$

$$^{(5)}R_{ai} \equiv 0, \quad (6)$$

$$^{(5)}R_{ik} = [\Lambda\Delta\Lambda + 2(\nabla\Lambda)^2 + 2K_0]h_{ik}, \quad (7)$$

где $\Delta = \nabla^a\nabla_a$, $(\nabla\Lambda)^2 = g^{ab}\nabla_a\Lambda\nabla_b\Lambda$, ∇_a – ковариантная производная по x^a относительно двумерной метрики g_{ab} , $^{(2)}R$ – скалярная кривизна двумерного пространства с метрикой g_{ab} . Отсюда получаем

$$^{(5)}G_b^a = -\frac{3}{\Lambda}\nabla^a\nabla_b\Lambda + \frac{3}{\Lambda^2}(\Lambda\Delta\Lambda + (\nabla\Lambda)^2 + K_0)\delta_b^a, \quad (8)$$

$$^{(5)}G_k^i = \left(\frac{1}{2}\Lambda^2 ^{(2)}R - 2\Lambda\Delta\Lambda - (\nabla\Lambda)^2 - K_0\right)\delta_k^i. \quad (9)$$

Из этих уравнений вытекает соотношение

$$2\Lambda^3 (^{(5)}G_a^a\Lambda_{,b} - ^{(5)}G_b^a\Lambda_{,a}) = 3(\Lambda^2(\nabla\Lambda)^2 + K_0\Lambda^2)_{,b}. \quad (10)$$

Введем величину

$$G \equiv \Lambda^2(K_0 + (\nabla\Lambda)^2). \quad (11)$$

В ОТО четырехмерный аналог этой величины имеет вид $M = r(1 + (\nabla r)^2)/2$ и определяет массовую функцию [8] (гравитационная постоянная $\gamma = 1$, скорость света $c = 1$). Можно показать, что для сферически-симметричных гравитационных полей, порождаемых тензором энергии-импульса пыли $T_\nu^\mu = \varepsilon u^\mu u_\nu$, имеет место соотношение $M_{, \mu} u^\mu = dM/ds = 0$, что соответствует закону сохранения полной массы коллапсирующего шара с лагранжевым радиусом $r = r(s)$. В вакуумном случае имеем закон сохранения центральной массы $M = \text{const}$.

Обратимся теперь к случаю пятимерной ОТО, когда ${}^{(5)}G_B^A = {}^{(5)}T_B^A$ (${}^{(5)}\gamma = 1$) с тензором энергии-импульса “пятимерной пыли” ${}^{(5)}T_B^A = {}^{(5)}\varepsilon U^A U_B$. Здесь U^A – 5-скорость ($U^A U_A = \pm 1$), ${}^{(5)}\varepsilon$ – плотность пыли, причем $({}^{(5)}\varepsilon U^A)_{;A} = 0$. В рассматриваемом $O(3)$ - (или $O(1, 2)$ -) симметричном случае из формулы (10) находим

$$G_{,a} = \pm \frac{2}{3} {}^{(5)}\varepsilon \Lambda^3 \Lambda_{,b} h_a^b, \quad (12)$$

где $h_a^b = \delta_a^b \mp U^b U_a$. Отсюда получаем $G_{,A} u^A = dG/{}^{(5)}ds = 0$. Таким образом, в процессе коллапса пылевого облака величина G постоянна в каждом слое, тогда как градиент величины $\eta = 2 {}^{(5)}\varepsilon \Lambda^3/3$, спроецированный на сечение, ортогональное U^A , совпадает с градиентом G .

В случае вакуума $\varepsilon = 0$ и мы получаем закон сохранения

$$G = \Lambda^2 (K_0 + (\nabla \Lambda)^2) = \text{const}. \quad (13)$$

Таким образом, величина G аналогична шварцшильдовой массе M . После размерной редукции (см. ниже) она сводится к заряду соответствующего скалярного поля. Поэтому величина $G = \Lambda^2 (\nabla \Lambda)^2 + K_0 \Lambda^2$ в общем случае может быть названа зарядовой функцией и соответствует закону сохранения некоторого заряда для $O(3)$ - (или $O(1, 2)$ -) симметричных 5-метрик.

Закон сохранения $G = \text{const}$, так же как закон сохранения $M = \text{const}$ для V^4 , приводит к “теореме Биркгофа” для V^5 . Действительно, из уравнений (1), (7) вытекает уравнение $\Lambda \Delta \Lambda + 2(\nabla \Lambda)^2 + 2K_0 = 0$. Отсюда, используя (13), находим

$$\Delta \Lambda + \frac{2G}{\Lambda^3} = 0. \quad (14)$$

Далее, рассмотрим области, в которых $\epsilon(\nabla \Lambda)^2 > 0$. В этих областях сигнатура метрики после соответствующих преобразований и переобозначений координат сводится к стандартному виду $(+ - - - -)$. Используя допустимые преобразования $x^a = x^a(\tilde{x}^b)$, мы можем добиться, чтобы $\tilde{g}_{04} = 0$ и $\tilde{x}^0 = \Lambda$. Тем самым мы перейдем к координатам $\{\tilde{x}^0 = \Lambda, \tilde{x}^4 = Z\}$, которые являются аналогом координат кривизн в ОТО. Таким образом, 5-интервал (3) можно переписать в виде

$${}^{(5)}ds^2 = -M_\epsilon^2 dZ^2 + \epsilon N_\epsilon^2 d\Lambda^2 - \Lambda^2 {}^{(3)}d\Omega_\epsilon^2, \quad (15)$$

где по определению $M_\epsilon^2 = M_\epsilon^2(\epsilon, Z, \Lambda) > 0$, $N_\epsilon^2 = N_\epsilon^2(\epsilon, Z, \Lambda) > 0$. Тогда из закона сохранения (13) следует, что

$$N_\epsilon^{-2} = \epsilon \left(-K_0 + \frac{G}{\Lambda^2} \right), \quad (16)$$

причем рассматриваются области, где $N_\epsilon^2 > 0$. Наконец, с помощью соотношений (14) и (16) находим $\partial(M_\epsilon N_\epsilon)/\partial \Lambda = 0$. Следовательно, $M_\epsilon = N_\epsilon^{-1} f(Z)$, где $f(Z)$ – некоторая функция Z . Не умаляя общности, можно положить $f(Z) = 1$. В итоге получаем

$${}^{(5)}ds^2 = -M_\epsilon^2 dZ^2 + \epsilon M_\epsilon^{-2} d\Lambda^2 - \Lambda^2 {}^{(3)}d\Omega_\epsilon^2, \quad (17)$$

где

$$M_\epsilon^2 = \epsilon \left(-K_0 + \frac{G}{\Lambda^2} \right) > 0, \quad {}^{(3)}d\Omega_\epsilon^2 = \frac{\epsilon(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2}{\left(1 + \frac{K_0}{4}S_\epsilon^2\right)^2}. \quad (18)$$

Этот результат завершает доказательство “теоремы Биркгофа” в пятимерной ОТО. Построенная метрика является пятимерным аналогом решения Шварцшильда. Она не зависит от пятой координаты Z , что соответствует условию цилиндричности Калуцы.

Мы видим, что в случае $K_0G > 0$ метрика (17) имеет координатную сингулярность при $\Lambda = \pm\sqrt{K_0G}$. Гиперповерхности $\Lambda = \pm\sqrt{K_0G}$ в некотором смысле аналогичны горизонту событий решения Шварцшильда. Для рассмотрения условий регулярности на этих горизонтах введем новую координату

$$\rho = \sqrt{\epsilon\epsilon_1GM_\epsilon^2}, \quad (19)$$

где знак у $\epsilon_1 = \pm 1$ выбирается так, чтобы величина ρ^2 была положительной. Тогда метрику (17) можно переписать в виде

$${}^{(5)}ds^2 = \epsilon_1K_0 \left\{ -\frac{\epsilon\rho^2}{K_0G} dZ^2 + \left(\frac{\Lambda^2}{K_0G} \right)^3 d\rho^2 \right\} - \Lambda^2 {}^{(3)}d\Omega_\epsilon^2. \quad (20)$$

В окрестности горизонтов $\Lambda = \pm\sqrt{K_0G}$ сечение $x^i = \text{const}$ имеет метрику $ds^2 = \epsilon_1K_0\{\rho^2 d\sigma^2 + d\rho^2\}$, где $\sigma = Z/\sqrt{-\epsilon K_0G}$. Чтобы избежать появления конической сингулярности при $\rho = 0$ (или при $\Lambda = \pm\sqrt{K_0G}$) необходимо потребовать, чтобы координата σ изменялась в пределах $0 \leq \sigma < 2\pi$. Это приводит к тому, что рассматриваемое пространство должно быть замкнуто по координате Z , а ее значения должны лежать в диапазоне $0 \leq Z < 2\pi\sqrt{-\epsilon K_0G}$. Таким образом, при $\epsilon = -1$ условие регулярности сечения $x^i = \text{const}$ на горизонтах $\Lambda = \pm\sqrt{K_0G}$ приводит к периоду $L = 2\pi\sqrt{K_0G}$ по пятой координате Z . Если $\epsilon = 1$, то мы используем процедуру, аналогичную переходу к евклидовому шварцшильдову линейному элементу в теории черных дыр. Для этого продолжим метрику по координате Z на мнимую ось, полагая $Z = A' + iZ'$, где A' – некоторая действительная постоянная, а Z' – новая координата. Это приводит к тому же периоду $\Lambda = \pm\sqrt{K_0G}$ для евклидового сечения метрики ${}^{(5)}ds^2$ по координате Z' .

Если $\epsilon = 1$, то для областей, в которых $M^2 = -K_0 + G/\Lambda^2 > 0$, координата Λ имеет временной характер. Тогда, положив $\Lambda = T$, метрику (17) можно переписать в виде

$${}^{(5)}ds^2 = \frac{dT^2}{-K_0 + \frac{G}{T^2}} - T^2 \frac{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2}{\left(1 + \frac{K_0}{4}S_+^2\right)^2} - \left(-K_0 + \frac{G}{T^2} \right) dZ^2, \quad (21)$$

где $S_+^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2$. Эта метрика допускает группу вращений $O(3)$ и является пятимерным аналогом решения Шварцшильда. Неоднозначность в выборе знаков K_0 и G можно устранить, если потребовать, чтобы метрика допускала плоские четырехмерные сечения. Как следует из раздела 3, это возможно при $K_0 = -1$ и $G < 0$.

Когда сечения Σ^3 являются подпространствами положительной кривизны ($K_0 = 1$), условие $g_{TT} > 0$ возможно при $G > 0$ и приводит к ограниченности модели во времени,

$-\sqrt{G} < T < \sqrt{G}$. В случае подпространств Σ^3 отрицательной кривизны ($K_0 = -1$), если $G > 0$, метрика (21) регулярна для всех моментов времени T , кроме сингулярности $T = 0$. Если же $G < 0$, то неравенство $g_{TT} > 0$ приводит к двум областям существования модели во времени: $T < -\sqrt{-G}$ или $T > \sqrt{-G}$.

Другие решения при $\epsilon = 1$ могут быть получены из формулы (21) путем аналитического продолжения через нулевые гиперповерхности $T = \pm\sqrt{K_0 G}$. При этом смысл координат Z и T меняется, и при замене $Z \rightarrow T$, $T \rightarrow Z$ в метрике возникает зависимость от Z . Такая ситуация аналогична переходу через горизонт событий в решении Шварцшильда, и здесь мы ее не рассматриваем. Другой вариант метрики возможен, если произвести замену $Z \rightarrow T$, $T \rightarrow R$, $x^1 \rightarrow x^4 = Z$. Тогда при переходе через точки $T = \pm\sqrt{K_0 G}$ мы приходим к метрике

$${}^{(5)}ds^2 = \left(K_0 - \frac{G}{R^2}\right) dT^2 - \frac{dR^2}{K_0 - \frac{G}{R^2}} - R^2 \frac{(dZ)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2}{\left(1 + \frac{K_0}{4} S_+^2\right)^2}, \quad (22)$$

которую можно свести к метрике Тангерлини [9]. Здесь пятая и две пространственные координаты связаны симметрией $O(3)$, поэтому при поворотах из этой группы они преобразуются совместно. Однако по условию пятая координата должна преобразовываться в каждой точке V^4 независимо от пространственно-временных координат, как координата пространства внутренних симметрий. Это решение мы также не рассматриваем.

Если $\epsilon = -1$, то для областей, в которых $M^2 = K_0 - G/\Lambda^2 > 0$, координата Λ имеет пространственноподобный характер и мы полагаем $\Lambda = R$, $x^1 \rightarrow x^0 = t$. Тогда метрика (17) принимает вид

$${}^{(5)}ds^2 = R^2 \frac{(dt)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2}{\left(1 + \frac{K_0}{4} S_-^2\right)^2} - \frac{dR^2}{K_0 - \frac{G}{R^2}} - \left(K_0 - \frac{G}{R^2}\right) dZ^2, \quad (23)$$

где $S_-^2 = (x^2)^2 + (x^3)^2 - t^2$. В этом случае для подпространств Σ^3 положительной кривизны ($K_0 = 1$) при условии $G > 0$ неравенство $g_{RR} < 0$ выделяет внешние допустимые области $R < -\sqrt{G}$ или $R > \sqrt{G}$ пространства V^5 . Если же $G < 0$, то неравенство $g_{RR} < 0$ возможно для всех значений R . В случае подпространств Σ^3 отрицательной кривизны ($K_0 = -1$) условие $g_{RR} < 0$ для метрики (23) возможно при $G < 0$ и выделяет внутреннюю область $-\sqrt{-G} < R < \sqrt{-G}$ пространства R^5 . Сингулярные нулевые гиперповерхности $R = R_G = \sqrt{K_0 G}$ имеют место при $K_0 G > 0$, однако переход через них приводит к нефизической метрике.

Отметим, что при $K_0 = 1$, $G > 0$, решение (23) аналитическим продолжением $t \rightarrow \text{const} + it_E$ приводится к пятимерному евклидову решению Шварцшильда в стереографических координатах. В обычных угловых координатах $\{\chi, \theta, \varphi\}$ оно может быть переписано в виде

$$-{}^{(5)}ds^2 = R^2 (d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)) + \left(1 - \frac{G}{R^2}\right)^{-1} dR^2 + \left(1 - \frac{G}{R^2}\right) dZ^2. \quad (24)$$

С другой стороны, известное решение Виттена [10]

$${}^{(5)}ds^2 = R^2 (d\tau^2 - \operatorname{ch}^2 \tau (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)) - \left(1 - \frac{G}{R^2}\right)^{-1} dR^2 - \left(1 - \frac{G}{R^2}\right) dZ^2 \quad (25)$$

получается аналитическим продолжением $\chi \rightarrow i\tau + \pi/2$ пятимерного евклидова решения Шварцшильда (24). Отсюда вытекает, что при $K_0 = 1$, $G > 0$ решение (23) с помощью преобразований

$$t = iP \cos \theta, \quad x^2 = P \sin \theta \cos \varphi, \quad x^3 = P \sin \theta \sin \varphi, \quad P = \frac{2 \operatorname{ch} \tau}{1 \pm i \operatorname{sh} \tau}$$

может быть преобразовано в решение Виттена (25). Однако физический смысл этих решений совершенно разный, так как приведенные преобразования являются комплексными.

В заключение этого раздела отметим, что замечательным аналогом сферически-симметричного решения вакуумных уравнений ОТО является независимость решений (21), (23) пятимерных вакуумных уравнений Эйнштейна (1) от пятой координаты $x^4 = Z$. Кроме того, пространства (23), допускающие максимально симметричные пространственно-временные подпространства Σ^3 , замкнуты по пятой координате Z с периодом $L = 2\pi\sqrt{K_0 G}$, где $K_0 G > 0$. Таким образом, условие цилиндричности Калуцы, так же как величина периода по пятой координате, здесь реализуются динамически. С другой стороны, пространства (21), допускающие максимально симметричные пространственно-подобные подпространства Σ^3 , периодичны по мнимому продолжению пятой координаты Z с тем же периодом $L = 2\pi\sqrt{K_0 G}$ ($K_0 G > 0$).

3. НЕКОТОРЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПОЛУЧЕННЫХ МЕТРИК

Метрика (17) допускает конформно-плоские четырехмерные сечения. Так, если $K_0 \epsilon = -1$, то подстановка

$$\Lambda = U \left(1 - \frac{\epsilon G}{4U^2}\right) \quad (26)$$

приводит ее к виду

$${}^{(5)}ds^2 = - \left(\frac{1 + \frac{\epsilon G}{4U^2}}{1 - \frac{\epsilon G}{4U^2}} \right)^2 dZ^2 + \left(1 - \frac{\epsilon G}{4U^2}\right)^2 (\epsilon dU^2 - U^2 {}^{(3)}d\Omega_\epsilon^2). \quad (27)$$

Если $\epsilon G < 0$, то преобразование (26) переводит внешнюю область $\sqrt{-\epsilon G} < \Lambda < \infty$ 3-сферы $\Lambda = \sqrt{-\epsilon G}$ в область $-\infty < U < \infty$. Метрика инвариантна относительно отражения $U \rightarrow -U$ и инверсии $U \rightarrow U' = \epsilon G/(4U)$ временной координаты U .

С помощью формул (П.1) и (П.4) приложения, в которых полагаем $n = 3$, $\epsilon_{\mu\nu} = -\eta_{\mu\nu}$, $e = -\epsilon$, $\Lambda = U$, интервал (27) можно переписать в виде

$${}^{(5)}ds^2 = - \left(\frac{1 + \frac{\epsilon G}{4U^2}}{1 - \frac{\epsilon G}{4U^2}} \right)^2 dZ^2 + \left(1 - \frac{\epsilon G}{4U^2}\right)^2 \eta_{\mu\nu} dy^\mu dy^\nu, \quad (28)$$

где координаты y^μ удовлетворяют соотношению $U^2 = \epsilon \eta_{\mu\nu} y^\mu y^\nu$, а $\eta_{\mu\nu}$ – метрика Минковского. Метрика (28) инвариантна относительно конформных преобразований, которые кроме группы Лоренца содержат преобразования инверсии

$$y^\mu = \frac{\epsilon G}{4} \frac{y'^\mu}{U'^2}, \quad U'^2 = \eta_{\alpha\beta} y'^\alpha y'^\beta.$$

Если $K_0\epsilon = 1$, то из условия $g_{ZZ} < 0$ вытекает, что $\epsilon G > 0$ и $|\Lambda| < \epsilon G$. В этом случае подстановки

$$\Lambda = \sqrt{\epsilon G} \cos \ln \left| \frac{U}{\sqrt{\epsilon G}} \right|, \quad \Lambda = \sqrt{\epsilon G} \sin \ln \left| \frac{U}{\sqrt{\epsilon G}} \right| \quad (29)$$

приводят метрику (17) соответственно к виду

$${}^{(5)}ds^2 = -\operatorname{tg}^2 \ln \left| \frac{U}{\sqrt{\epsilon G}} \right| dZ^2 + \frac{\epsilon G}{U^2} \cos^2 \ln \left| \frac{U}{\sqrt{\epsilon G}} \right| (\epsilon dU^2 - U^2 {}^{(3)}d\Omega_\epsilon^2), \quad (30)$$

$${}^{(5)}ds^2 = -\operatorname{ctg}^2 \ln \left| \frac{U}{\sqrt{\epsilon G}} \right| dZ^2 + \frac{\epsilon G}{U^2} \sin^2 \ln \left| \frac{U}{\sqrt{\epsilon G}} \right| (\epsilon dU^2 - U^2 {}^{(3)}d\Omega_\epsilon^2). \quad (31)$$

Метрика (17) допускает также плоские четырехмерные сечения, не ортогональные координатным линиям $x^4 = Z$. Действительно, при условиях $G < 0$ и $K_0\epsilon = -1$ ее можно переписать в форме, аналогичной представлению Пенлеве [11] решения Шварцшильда. Это можно сделать с помощью преобразования пятой координаты

$$Z = z + \int \left(\frac{\Lambda}{\Lambda_G} - \epsilon \frac{\Lambda_G}{\Lambda} \right)^{-1} d\Lambda, \quad (32)$$

где введено обозначение $\Lambda_G = \sqrt{-G}$. В результате из (17) получаем

$${}^{(5)}ds^2 = -dz^2 + \epsilon \left(d\Lambda - \epsilon \frac{\Lambda_G}{\Lambda} dz \right)^2 - \Lambda^2 {}^{(3)}d\Omega_\epsilon^2. \quad (33)$$

Далее, используя формулы приложения, в которых полагаем $\epsilon_{\mu\nu} = -\eta_{\mu\nu}$, $e = \epsilon$, $n = 3$, находим

$${}^{(5)}ds^2 = -dz^2 + \eta_{\mu\nu} \left(dy^\mu - \epsilon \frac{\Lambda_G}{\Lambda} \eta^\mu dz \right) \left(dy^\nu - \epsilon \frac{\Lambda_G}{\Lambda} \eta^\nu dz \right). \quad (34)$$

Здесь $\Lambda^2 = \epsilon \eta_{\mu\nu} y^\mu y^\nu$, $\eta^\mu = y^\mu / \Lambda$, $d\Lambda = \epsilon \eta_\mu dy^\mu$. Отсюда видно, что в рассматриваемых координатах четырехмерное физическое пространство представляет собой совокупность плоских пространственно-временных сечений нормальной геодезической конгруэнции кривых в V^5 с полем касательных векторов $U^A = \{U^5 = 1, U^\mu = \epsilon(\Lambda_G/\Lambda)\eta^\mu\}$. Из выражения (34) также следует, что сингулярность $\Lambda = \Lambda_G$ в метрике (17) обусловлена выбором координат и связана с неполнотой координат кривизн $\{Z, \Lambda\}$ аналогично сингулярности горизонта событий $R = R_g$ в метрике Шварцшильда. Однако в отличие от сингулярности $R = 0$ решения Шварцшильда, сингулярность $\Lambda = 0$ лежит на световом конусе $(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0$ и описывает ударную волну.

Отметим, что в случае подпространств Σ^3 нулевой кривизны ($K_0 = 0$) метрика (21) имеет другое простое представление. Для того чтобы выполнялось условие $g_{ZZ} < 0$, полагаем $G > 0$. Тогда после замены $T = x^0 \sqrt{G}$ метрика (21) принимает вид

$$^{(5)}ds^2 = -(x^0)^{-2} dZ^2 + G(x^0)^2 ((dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2). \quad (35)$$

В случае метрики (23), когда $K_0 = 0$, необходимо положить $G < 0$. Тогда после замены $G = -\tilde{G}$, $R \rightarrow x^1 \sqrt{\tilde{G}}$, $x^1 \rightarrow x^0$ она принимает вид

$$^{(5)}ds^2 = -(x^1)^{-2} dZ^2 + \tilde{G}(x^1)^2 ((dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2). \quad (36)$$

Эти метрики являются пятимерными аналогами метрики Казнера. При преобразовании $G = (2\tau_0)^{-2}$, $x^0 = 2\sqrt{\tau\tau_0}$ и $Z = 2\tau_0 y$ метрика (35) описывает космологическую модель, рассмотренную в работе [12].

4. ОТДЕЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ И КОНФОРМНАЯ НЕОДНОЗНАЧНОСТЬ

Чтобы в решении пятимерной теории гравитации отделить пространственно-временные динамические переменные ОТО от переменных внутреннего пространства, необходимо построить $(4 + 1)$ -расщепление пространства V^5 и совершить подходящее преобразование полученной 4-метрики и скалярного поля. На первом этапе при этом особых проблем не возникает, поскольку методы инвариантного расщепления пространств хорошо известны (см. например, [13]) и метрика достаточно проста. Однако в дальнейшем появляется проблема конформного масштабирования или конформной калибровки. Она связана с неоднозначностью введения физической метрики и скалярного поля в пространстве V^4 и с возможностью их конформного преобразования.

Используемая редукция и конформная калибровка метрики должны разделить динамические степени свободы рассматриваемой динамической системы. Эти процедуры можно сравнить с техникой ортогонализации линейной динамической системы и приведения ее к нормальному виду. При этом система распадается на совокупность невзаимодействующих осцилляторов, представляющих ее нормальные моды. Для нелинейных интегрируемых динамических систем вместо этого можно рассматривать процедуру перехода к переменным типа “действие–угол”. В рассматриваемом случае перехода от пятимерных метрических функций к четырехмерным физическим величинам нужно отделить одну переменную внутреннего пространства от метрических переменных физического пространства-времени, которые смешиваются при калибровочных преобразованиях. Заметим, что в сферически-симметричном решении вакуумных пятимерных уравнений Эйнштейна [2] существуют две независимые нетривиальные константы интегрирования, которые связаны некоторым образом со скалярным и гравитационным полями. В рассматриваемом симметричном случае пространства V^5 система находится в состоянии, когда имеется всего одна сохраняющаяся величина. В подходящем конфигурационном пространстве ей соответствует одна динамическая степень свободы, которую можно связать либо со скалярным, либо с гравитационным полем. Поэтому рассмотрим основные метрические анзацы теории Калуцы–Клейна с этой точки зрения.

Перепишем интервал (3) в $(4+1)$ -форме

$${}^{(5)}ds^2 = {}^{(5)}g_{AB} dx^A dx^B = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - W^2 dz^2, \quad (37)$$

где $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$. Как было показано, условие цилиндричности в рассматриваемом симметричном случае реализуется динамически. Поэтому величины $W, g_{\mu\nu}$ не зависят от координаты z и для действия (2) находим

$$I = -L \int \sqrt{{}^{(4)}g} W {}^{(4)}R d^4x, \quad (38)$$

где $L = 2\pi\sqrt{K_0 G}$ – период 5-координаты в случае $\epsilon = 1$, $K_0 G > 0$ или некоторая константа во всех остальных случаях.

Метрика $g_{\mu\nu}$ и скалярное поле W могут быть подвергнуты преобразованию $W = W(\varphi)$, $g_{\mu\nu} = f(\varphi)\tilde{g}_{\mu\nu}$. Поэтому метрика физического пространства-времени задается с точностью до конформного множителя. Преобразования следует выбрать так, чтобы “ортогонализировать” в некотором смысле действие (38) и, тем самым, отделить степени свободы, соответствующие скалярному и гравитационному полям. Одно из наиболее популярных представлений пятимерной метрики $V^{(5)}$ (см., например, [14], [15]) имеет вид

$${}^{(5)}ds^2 = e^{\varphi/\sqrt{3}} \tilde{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - e^{-2\varphi/\sqrt{3}} dz^2. \quad (39)$$

В этих переменных действие (38) переходит в действие для минимально взаимодействующих скалярного φ и гравитационного $\tilde{g}_{\mu\nu}$ полей,

$$I = -L \int d^4x \sqrt{{}^{(4)}g} \left\{ {}^{(4)}\tilde{R} - \frac{1}{2} \tilde{g}^{\mu\nu} \varphi_{,\mu} \varphi_{,\nu} \right\}. \quad (40)$$

Сравнивая (39) с (21), получаем скалярное поле и новую метрику,

$$\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2} \ln \left(-K_0 + \frac{G}{T^2} \right), \quad \tilde{g}_{\mu\nu} = \sqrt{-K_0 + \frac{G}{T^2}} g_{\mu\nu}, \quad (41)$$

где метрика $g_{\mu\nu}$ находится из решения (21). Новые поля φ и $\tilde{g}_{\mu\nu}$ являются функционально зависимыми и не могут представлять независимые динамические степени свободы системы. На этом основании мы должны отвергнуть анзац (39) как не соответствующий оптимальному представлению динамической системы с одной степенью свободы.

Рассмотрим теперь другой анзац [15]

$${}^{(5)}ds^2 = \left(1 + \frac{\psi}{\sqrt{6}} \right)^2 {}^{(4)}\tilde{ds}^2 - \left(\frac{1 - \frac{\psi}{\sqrt{6}}}{1 + \frac{\psi}{\sqrt{6}}} \right)^2 dz^2. \quad (42)$$

В этом случае выражение (38) приводит к действию

$${}^{(4)}I = -L \int d^4x \sqrt{{}^{(4)}g} \left\{ \left(1 - \frac{\psi^2}{6} \right) \tilde{R} - \tilde{g}^{\mu\nu} \psi_{,\mu} \psi_{,\nu} \right\}, \quad (43)$$

которое описывает взаимодействующие поля: гравитационное ($\tilde{g}_{\mu\nu}$) и конформно-инвариантное скалярное (ψ). Уравнения движения новой системы имеют вид

$$\left(\Delta - \frac{1}{6}R\right)\psi = 0, \quad (44)$$

$$G_{\mu\nu} = 4\pi t_{\mu\nu} \equiv 4\pi T_{\mu\nu} + \frac{1}{6}(G_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu + \tilde{g}_{\mu\nu}\Delta)\psi^2, \quad (45)$$

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(\psi_\mu \psi_\nu - \frac{1}{2} \tilde{g}_{\mu\nu} (\nabla\psi)^2 \right), \quad (46)$$

где $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \tilde{g}_{\mu\nu}R/2$, $R_{\mu\nu}$ – тензор Риччи, $t_{\mu\nu}$ – конформно-инвариантный тензор энергии-импульса скалярного поля ψ , $\Delta = \nabla^\mu \nabla_\mu$ и все величины вычисляются относительно метрики $\tilde{g}_{\mu\nu}$.

Метрика (42) совпадает по форме с метрикой (28). В результате сравнения этих метрик получаем скалярное поле и физическую метрику,

$$\psi = -\frac{\sqrt{6}}{4} \frac{\epsilon G}{(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2}, \quad \tilde{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}. \quad (47)$$

Интересно, что здесь конформный тензор энергии-импульса обращается в нуль, $t_{\mu\nu} = 0$. Полученное представление полностью связывает единственную степень свободы системы (обусловленную сохраняющимся зарядом G) с конформно-инвариантным скалярным полем ψ . Это соответствует условию задачи об отделении степеней свободы. Физическое пространство-время является плоским, а нетривиальное скалярное поле ψ – классическим духом. Оно имеет нулевую плотность энергии и не оказывает влияния на пространство-время.

Рассмотренный анзац легко обобщается на случай присутствия электромагнитного поля A_μ [15], когда вместо (37) используется метрика

$$^{(5)}ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - W^2 (dz + A_\mu dx^\mu)^2. \quad (48)$$

Она инвариантна относительно калибровочных преобразований

$$z = z' + f(x^\mu), \quad A_\mu = A'_\mu - f_{,\mu}. \quad (49)$$

Обратимся теперь к метрикам (33) и (34). Они уже записаны в $(4+1)$ -виде и удовлетворяют условиям отделения динамических степеней свободы. Здесь постоянная T_G не входит ни в скалярное поле ($\varphi = 0$), ни в четырехмерную метрику ($g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$). Она имеется в переменных U^A , описывающих смещение пространственно-временных гиперповерхностей V^4 относительно V^5 . Однако эти метрики не являются калибровочно-инвариантными относительно преобразований (49) и должны быть отброшены.

Если использовать более общее $(4+1)$ -расщепление пространства V^5 с неголономным базисом [13], то метрику (34) (например, при $\epsilon = 1$) можно переписать в виде

$$^{(5)}ds^2 = -(\theta^5)^2 + \eta_{\mu\nu} (dx^\mu - U^\mu \theta^5) (dx^\nu - U^\nu \theta^5), \quad (50)$$

где $\theta^5 = dz + A_\mu dx^\mu$, $U^\mu = \eta^\mu T_G/T$ и $A_\mu = f_{,\mu}$. С этой расширенной точки зрения метрика (50) удовлетворяет вышеуказанным условиям и может рассматриваться как одна из моделей в пятимерной ОТО. Здесь отсутствуют скалярное, электромагнитное и гравитационное поля, но взамен появляется векторное поле U^μ . Физическое пространство-время представлено семейством плоских гиперповерхностей V^4 , вложенных в искривленное пространство V^5 с ненулевой внешней кривизной.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе показано, что для пространств пятимерной ОТО, допускающих максимально симметричные трехмерные сечения, условие цилиндричности реализуется динамически. Более того, здесь происходит то, что может быть названо спонтанной компактификацией. Условие регулярности “горизонтов” $\Lambda = \pm\sqrt{K_0 G}$ метрики (23) приводит к замкнутости пространства V^5 по пятой координате Z с действительным периодом $L = 2\pi\sqrt{K_0 G}$, где $K_0 G > 0$.

Среди возможных параметризаций 5-метрики мы выделяем параметризацию типа (42), которая используется в конформно-инвариантной теории взаимодействующих скалярного и гравитационного полей (43). Такая редукция этого решения к четырехмерному виду представляется наиболее естественной. Конформно-инвариантное представление (27) возможно, когда $K_0 = 1$, что определяет период $L = 2\pi\sqrt{G}$ и положительный знак заряда $G > 0$.

Таким образом, радиус $R_G = \sqrt{G} = L/2\pi$ горизонта событий пятимерной черной дыры с метрикой (23) играет роль фундаментального масштаба теории. После конформного преобразования $\Lambda = U(1 + G/4U^2)$ метрика принимает форму (28) с конформно-плоскими четырехмерными сечениями. Система имеет одну степень свободы, которая связана со скалярным полем, отвечающим классическому конформному духу (47) на фоне плоской физической метрики $\eta_{\mu\nu}$.

Теорию КК можно понимать, в некотором смысле, как предельный случай пространств пятимерной ОТО, допускающих максимально симметричные трехмерные сечения. Мы рассматриваем полученное решение как нижнее нетривиальное состояние 5-геометрии. Ее несимметричные возмущения, порождаемые классическими или квантовыми возбуждениями, можно трактовать как индуцированную материю [5]. Однако прежде необходимо изучить устойчивость пространства V^5 относительно малых возмущений типа $\delta g_{AB} e^{nx^4}$ по аналогии с метрикой Шварцшильда. Для стабильных мод эти возмущения можно трактовать как материю, индуцированную 5-геометрией.

ПРИЛОЖЕНИЕ

О метрике пространств постоянной кривизны

Рассмотрим псевдоевклидово пространство E^{n+1} с координатами $\{y^\alpha\}$ и метрикой

$$^{(n+1)}ds^2 = \epsilon_{\alpha\beta} dy^\alpha dy^\beta, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, n+1, \quad (\text{П.1})$$

где $\epsilon_{\alpha\beta} = c_\alpha \delta_{\alpha\beta}$ (здесь нет суммирования!), $c_\alpha = \pm 1$. Согласно [16] основные гиперповерхности второго порядка

$$\epsilon_{\alpha\beta} y^\alpha y^\beta = e \Lambda^2, \quad (\text{П.2})$$

где $e = \pm 1$, представляют единственные гиперповерхности S^n постоянной кривизны $K = e/\Lambda^2$ в пространстве E^{n+1} с метрикой (П.1).

Семейство гиперповерхностей (П.2) (где параметром семейства является Λ) индуцирует $(n+1)$ -расщепление E^{n+1} и всех величин на нем [13]. Параметр Λ можно назвать “радиусом” квадратичной гиперповерхности (П.2). В дальнейшем он играет роль “радиальной” координаты. Введем поле единичных векторов η^α по формулам

$$\eta^\alpha = \frac{y^\alpha}{\Lambda}, \quad \epsilon_{\alpha\beta} \eta^\alpha \eta^\beta = e \quad (\text{П.3})$$

и перейдем от координат $\{y^\alpha\}$ к новым координатам $\{\Lambda, \eta^\alpha\}$. Тогда

$$^{(n+1)}ds^2 = e d\Lambda^2 + ^{(n)}ds^2 = e d\Lambda^2 + \Lambda^2 d\Omega^2, \quad (\text{П.4})$$

где величина

$$d\Omega^2 = \epsilon_{\alpha\beta} d\eta^\alpha d\eta^\beta = \epsilon_{ik} d\eta^i d\eta^k + c_{n+1} (d\eta^{n+1})^2, \quad i, k = 1, \dots, n, \quad (\text{П.5})$$

определяет метрику на стандартной гиперповерхности $S_0^n = \{\eta^\alpha \in E^{n+1} : \epsilon_{\alpha\beta} \eta^\alpha \eta^\beta = e\}$ с фиксированной “единичной” кривизной $K_0 = e$. Легко видеть, что $d\Lambda = e n_\alpha dy^\alpha$, поэтому

$$^{(n)}ds^2 = \Lambda^2 d\Omega^2 = ^{(n+1)}ds^2 - e d\Lambda^2 = (\epsilon_{\alpha\beta} - e n_\alpha n_\beta) dy^\alpha dy^\beta. \quad (\text{П.6})$$

Таким образом, тензор $h_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta} - e n_\alpha n_\beta$ представляет собой индуцированный метрический тензор (вырожденный) на гиперповерхностях S^n в координатах y^α .

Перейдем теперь от внешних координат y^α к внутренним координатам. В простейшем случае их можно ввести (локально) с помощью нормальной проекции S_0^n на гиперплоскость $y^{n+1} = \eta^{n+1} = 0$. Используя соотношение $\eta_\alpha d\eta^\alpha = \eta_i d\eta^i + c_{n+1} \eta^{n+1} d\eta^{n+1} = 0$, исключим из (П.5) координату η^{n+1} . Тогда

$$d\eta^{n+1} = -c_{n+1} \frac{\eta_i d\eta^i}{\eta^{n+1}} \quad (\text{П.7})$$

и

$$d\Omega^2 = g_{ik} d\eta^i d\eta^k, \quad (\text{П.8})$$

где

$$g_{ik} = \epsilon_{ik} + \frac{c_{n+1} \eta^i \eta^k}{(\eta^{n+1})^2} \quad (\text{П.9})$$

— метрика пространства S_0^n , а $\epsilon_{ik} = c_i \delta_{ik}$ (здесь нет суммирования!).

Вместо координат η^i удобнее использовать координаты, связанные с обобщенной стереографической проекцией S_0^n [7]. Для этого сначала введем особые точки проекции,

или полюсы, $\{N, M\} \in S_0^n$. По определению – это точки с координатами $\eta^\mu = \{\eta^i = 0, \eta^{n+1}\}$. Из (П.3) находим

$$\eta^{n+1} = \pm 1 \quad \text{при условии, что} \quad c_{n+1} = e. \quad (\text{П.10})$$

Поэтому для полюсов $\{N, M\}$ можно положить $N^\mu = \{N^i = 0, 1\}$ и $S^\mu = \{S^i = 0, -1\}$. Введем гиперплоскость $E^n \subset E^{n+1}$, которая касается гиперповерхности S_0^n в полюсе S . Точка $X \in E^n$ имеет координаты $X^\mu = \{x^i, -1\}$. Уравнение прямой, которая проходит через полюс $N^\mu \in S_0^n$ и любую точку $\eta^\mu \in S_0^n$, можно записать в виде

$$X^\mu = \lambda \eta^\mu + (1 - \lambda) N^\mu, \quad (\text{П.11})$$

где параметр λ выбирается так, что при $\lambda = 0 \Rightarrow X^\mu = N^\mu$, а при $\lambda = 1 \Rightarrow X^\mu = \eta^\mu$. Если положить $X^\mu = \{x^i, -1\} \in E^n$, то соотношение (П.11) будет задавать отображение $S_0^n \rightarrow E^n$, которое определяет обобщенную стереографическую проекцию гиперповерхности S_0^n из полюса $N^\mu \in S_0^n$ на гиперплоскость E^n . Из уравнения (П.11) имеем

$$\frac{X^\mu - N^\mu}{\eta^\mu - N^\mu} = \lambda, \quad \mu = 1, \dots, n+1. \quad (\text{П.12})$$

Отсюда для точек $X^\mu \in E^n$ находим

$$\frac{x^i}{\eta^i} = \frac{x^{n+1} - N^{n+1}}{\eta^{n+1} - N^{n+1}} = \frac{2}{1 - \eta^{n+1}}. \quad (\text{П.13})$$

В итоге мы получаем соотношение между координатами точек на гиперповерхности S_0^n и координатами точек на гиперплоскости E^n при обобщенной стереографической проекции

$$x^i = \frac{2\eta^i}{1 - \eta^{n+1}}. \quad (\text{П.14})$$

Обратное отображение определяется формулами

$$\eta^{n+1} = \frac{\frac{e}{4}S^2 - 1}{\frac{e}{4}S^2 + 1}, \quad \eta^i = \frac{x^i}{\frac{e}{4}S^2 + 1}, \quad S^2 \equiv \epsilon_{ik}x^i x^k. \quad (\text{П.15})$$

В результате обобщенной стереографической проекции S_0^n на E^n новый метрический тензор на S_0^n принимает вид

$$\tilde{g}_{kl} = g_{ik} \frac{\partial \eta^i}{\partial x^k} \frac{\partial \eta^j}{\partial x^l} = \epsilon_{kl} \left(1 + \frac{e}{4}S^2\right)^{-2}. \quad (\text{П.16})$$

Таким образом, метрика пространства S^n постоянной кривизны $K = e/\Lambda^2$ в обобщенных стереографических координатах записывается как

$$^{(n)}ds^2 = \Lambda^2 d\Omega^2, \quad (\text{П.17})$$

где

$$d\Omega^2 = \frac{\epsilon_{kl} dx^k dx^l}{\left(1 + \frac{K_0}{4}S^2\right)^2}, \quad S^2 \equiv \epsilon_{ik}x^i x^k, \quad (\text{П.18})$$

задает метрику пространства S_0^n единичной кривизны $K_0 = \pm 1$, причем $K_0 = e = c_{n+1}$.

Благодарности. Автор благодарит Ю. С. Владимирову и М. П. Коркину за обсуждение затронутых в статье вопросов.

Список литературы

- [1] Д. Крамер, Х. Штефани, М. Мак-Калум, Э. Херльт. Точные решения уравнений Эйнштейна. М.: Энергоиздат, 1982.
- [2] D. Kramer. Acta Phys. Polon. B. 1970. V. 2. P. 807.
- [3] K. A. Bronikov, V. N Melnikov. Gen. Rel. Gravit. 1995. V. 27. P. 465.
- [4] S. S. Kokarev, V. G. Krechet. Gravit. Cosmology. 1996. V. 2. P. 107.
- [5] J. M. Overduin, P. S. Wesson. Phys. Rept. 1997. V. 283. P. 303.
- [6] A. Davidson. Phys. Rev. D. 1987. V. 2. P. 1811.
- [7] B. Karliga. Contrib. Alg. Geom. 1996. V. 37. P. 329.
- [8] W. C. Hernandez, G. C. Misner. Astrophys. J. 1968. V. 143. P. 452; M. E. Cahill, G. C. McVittie. J. Math. Phys. 1970. V. 11. P. 1382.
- [9] F. R. Tangherlini. Nuovo Cimento. 1963. V. 27. P. 636.
- [10] E. Witten. Commun. Math. Phys. 1981. V. 80. P. 381.
- [11] P. Painlevé. C. R. Acad. Sci. (Paris). 1921. V. 173. P. 677.
- [12] A. Chodos, S. Detweiler. Phys. Rev. D. 1980. V. 21. P. 2167.
- [13] V. D. Gladush. Acta Phys. Polon. B. 1999. V. 30. P. 3; V. D. Gladush, R. A. Konoplya. J. Math. Phys. 1999. V. 40. P. 955.
- [14] M. J. Duff. Kaluza–Klein theory in perspective. hep-th/9410046.
- [15] В. Д. Гладуш. Изв. вузов. Физика. 1979. № 11. С. 58.
- [16] L. P. Eisenhart. Riemannian Geometry. Princeton: Princeton Univ. Press, 1926.

Поступила в редакцию 17.IX.2002 г.,
после доработки 10.X.2002 г.