Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Магазев, И. В. Широков, Интегрирование геодезических потоков на однородных пространствах. Случай дикой группы Ли, *ТМФ*, 2003, том 136, номер 3, 365–379

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf232>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 12:48:30

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПОТОКОВ НА ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ. СЛУЧАЙ ДИКОЙ ГРУППЫ ЛИ

Получены необходимые и достаточные условия интегрируемости в квадратурах геодезических потоков на однородных пространствах M с инвариантными и центральными метриками. Предложенный алгоритм интегрирования состоит в использовании специального канонического преобразования в пространстве T^*M , основанного на построении канонических координат на орбитах коприсоединенного представления и на симплектических листах пуассоновой алгебры инвариантных функций. Этот алгоритм применим при интегрировании геодезических потоков на однородных пространствах дикой группы Ли.

Ключевые слова: группа Ли, алгебра Ли, однородное пространство, геодезический поток, инвариантный оператор, скобка Пуассона.

1. ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемая статья посвящена проблеме интегрирования геодезических потоков на однородных пространствах. Мы рассматриваем два класса метрик на однородном правом G -пространстве $M = G/H$, связанных с группой преобразований: G -инвариантные метрики и так называемые *центральные* метрики, определение которых будет дано в разделе 2. В работе получены необходимые и достаточные условия интегрируемости в квадратурах геодезических потоков для рассматриваемых метрик. Эти условия выражаются через целые неотрицательные числа — степень вырождения, индекс и дефект однородного пространства, которые легко могут быть подсчитаны по известным структурным константам алгебры $\mathcal{G}$ группы G и подалгебры $\mathcal{H}$ группы изотропии H . Отметим, что пространства нулевого дефекта — это коммутативные пространства, частным случаем которых являются симметрические и слабосимметрические пространства.

Алгоритм интегрирования геодезических потоков состоит в использовании специального канонического преобразования в пространстве T^*M , основанного на построении канонических координат Дарбу на орбитах коприсоединенного представления и на симплектических листах пуассоновой алгебры инвариантных функций. В тривиальном

---

* Омский государственный университет, Омск, Россия. E-mail: shirokov@univer.omsk.su

случае коммутативной группы G это каноническое преобразование есть переход к переменным “действие–угол”. Как показано в данной работе, предлагаемый алгоритм интегрирования особенно полезен в случае, когда G – дикая группа Ли с нехаусдорфовым пространством орбит.

Исследование диких групп Ли представляет значительный интерес в теории представлений групп и в математической физике. Эти группы характерны тем, что для них существует несколько неэквивалентных способов разложения регулярного представления на неприводимые компоненты. Теорема Ауслендера–Костанта [1] дает критерий принадлежности односвязных разрешимых групп Ли к классу диких в терминах орбит коприсоединенного представления (К-орбит). В частности, группа Ли является дикой, если симплектическая форма Кириллова на К-орбите не является точной или пространство К-орбит этой группы неполуотделимо (и, как следствие, нехаусдорфово). В монографии [2] приведены примеры таких групп.

В данной работе нас интересуют дикие группы Ли с нехаусдорфовым пространством орбит. Этот интерес обусловлен прежде всего тем, что специфика нехаусдорфовости пространства К-орбит проявляется при интегрировании геодезических потоков на однородных пространствах с метриками, связанными с этой группой, а именно с G -инвариантными и с центральными метриками. В этих случаях геодезические потоки допускают бесконечнозначный интеграл движения, значения которого образуют плотную область на числовой прямой или на открытом отрезке. Ясно, что поверхность уровня такого интеграла не определена и стандартные методы интегрирования гамильтоновых систем здесь неприменимы.

Мы рассматриваем пятимерную разрешимую дикую группу Ли с неполуотделимым пространством К-орбит, приведенную в монографии [2]. Как показано в данной работе, существуют три неэквивалентных четырехмерных однородных G -пространства и только на одном из них группа G действует эффективно. С помощью перехода к каноническим координатам на К-орбите [3] нами проинтегрирован геодезический поток на этом однородном пространстве, снабженном центральной метрикой. В этой статье мы существенным образом используем результаты работ [3], [4].

2. ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ПОТОКИ НА ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С ЦЕНТРАЛЬНЫМИ МЕТРИКАМИ

Пусть G – связная вещественная n -мерная группа Ли, $\mathcal{G}$ – ее алгебра Ли, H – $(n - m)$ -мерная замкнутая подгруппа группы G , $\mathcal{H}$ – алгебра Ли группы H , $M = G/H$ – однородное правое m -мерное G -пространство, $\pi: G \rightarrow M$ – каноническая проекция группы G на пространство правых смежных классов M .

Определим невырожденную квадратичную форму $\mathbf{G}(\cdot, \cdot)$ на кокасательной плоскости в единице группы $\mathcal{G}^* = T_e^* G$. Невырожденная форма $\mathbf{G}$ задает метрику на группе G в единице. Действуя правыми и левыми сдвигами на форму $\mathbf{G}$, получим правоинвариантную $(\mathbf{G}_g^R = R_g^* \mathbf{G})$ и левоинвариантную $(\mathbf{G}_g^L = L_g^* \mathbf{G})$ метрики на группе в произвольной точке $g \in G$,

$$\mathbf{G}_g^R(\sigma, \tau) = \mathbf{G}(R_{g^{-1}}^* \sigma, R_{g^{-1}}^* \tau), \quad \mathbf{G}_g^L(\sigma, \tau) = \mathbf{G}(L_{g^{-1}}^* \sigma, L_{g^{-1}}^* \tau); \quad \sigma, \tau \in T_g^* G. \quad (1)$$

Спроецируем правоинвариантную метрику $\mathbf{G}_g^R$ на M : $\mathbf{G}_x^R = \pi^* \mathbf{G}_g^R$, $x = \pi(g)$:

$$\mathbf{G}_x^R(\pi^* \sigma, \pi^* \tau) \equiv \pi^* \mathbf{G}_g^R(\sigma, \tau) = \mathbf{G}(\pi^* R_{g^{-1}}^* \sigma, \pi^* R_{g^{-1}}^* \tau); \quad \sigma, \tau \in T_g^* G. \quad (2)$$

Так как при левом сдвиге $g \rightarrow hg$ на произвольный элемент $h \in H$ каждая точка $x \in M$ остается неподвижной, то можно показать, что определение (2) квадратичной формы $\mathbf{G}_x^R$ корректно только при условии H -инвариантности формы $\mathbf{G}$,

$$\mathbf{G}(\text{Ad}_h^* \cdot, \text{Ad}_h^* \cdot) = \mathbf{G}(\cdot, \cdot). \quad (3)$$

Поскольку группа G действует на M правыми сдвигами и метрика $\mathbf{G}_g^R$ правоинвариантна, для каждой H -инвариантной формы $\mathbf{G}$ квадратичная форма $\mathbf{G}_x^R$ на $T_x^* M$ G -инвариантна. Из очевидного равенства $\pi_*(\mathcal{H}) = 0$ следует, что в точке $x_0 = \pi(H) \in M$ пространство $T_{x_0}^* M$ естественным образом отождествляется с пространством $\mathcal{H}^\perp$,

$$T_{x_0}^* M \simeq \mathcal{H}^\perp = \{\lambda \in \mathcal{G}^* \mid \langle \lambda, \mathcal{H} \rangle = 0\} \subset \mathcal{G}^*.$$

Поэтому в точке x_0 форма $\mathbf{G}_{x_0}^R$ невырождена, если

$$\text{rank } \mathbf{G}|_{\mathcal{H}^\perp} = \dim M. \quad (4)$$

В силу G -инвариантности квадратичной формы $\mathbf{G}_x^R$ условие (4) является не только необходимым, но и достаточным для невырожденности этой формы в произвольной точке $x \in M$. Таким образом, невырожденная квадратичная форма $\mathbf{G}$ на $\mathcal{G}^*$, удовлетворяющая условиям (3), (4), определяет G -инвариантную риманову метрику $\mathbf{G}_x^R$ на M формулой (2). Отметим, что сигнатура этой римановой метрики определяется сигнатурой квадратичной формы $\mathbf{G}|_{\mathcal{H}^\perp}$.

Аналогичным образом определим квадратичную форму $\mathbf{G}_x^L$ на $T_x^* M$ проецированием левоинвариантной метрики $\mathbf{G}_g^L = \pi^* \mathbf{G}_g^L$,

$$\mathbf{G}_x^L(\pi^* \sigma, \pi^* \tau) \equiv \pi^* \mathbf{G}_g^L(\sigma, \tau) = \mathbf{G}(\pi^* L_{g^{-1}}^* \sigma, \pi^* L_{g^{-1}}^* \tau); \quad x = \pi(g), \quad \sigma, \tau \in T_g^* G. \quad (5)$$

В силу левой инвариантности метрики $\mathbf{G}_g^L$ определение квадратичной формы $\mathbf{G}_x^L$ (5) корректно при любом выборе формы $\mathbf{G}$. Условие (4) является условием невырожденности формы $\mathbf{G}_x^L$ в окрестности точки x_0 . Можно показать, что форма $\mathbf{G}_x^L$ невырождена во всех точках $x \in M$, если

$$\text{rank } \mathbf{G}(\text{Ad}_g^* \cdot, \text{Ad}_g^* \cdot)|_{\mathcal{H}^\perp} = \dim M. \quad (6)$$

Невырожденная квадратичная форма $\mathbf{G}_x^L$ (5), полученная проецированием левоинвариантной метрики $\mathbf{G}_g^L$ (1) на пространство правых смежных классов $M = G/H$, определяет риманову метрику на M , которую мы будем называть *центральной*. В силу того что в этом случае не требуется выполнения условия (3), центральные метрики образуют более широкий класс метрик на однородном пространстве, связанных с группой Ли, чем G -инвариантные метрики (2).

Пусть $\{e_A\}$ – базис в алгебре $\mathcal{G}$, $\{e^A\}$ – дуальный базис в $\mathcal{G}^*$: $\langle e^A, e_B \rangle = \delta_B^A$. Можно рассматривать линейное пространство $\mathcal{G}$ как дуальное пространство к $\mathcal{G}^*$, тогда форма $\mathbf{G}$ и левоинвариантная метрика $\mathbf{G}_g^L$ на группе G запишутся в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \mathbf{G}^{AB} e_A \otimes e_B, \quad \mathbf{G}(e^A, e^B) = \mathbf{G}^{CD} e_C(e^A) \otimes e_D(e^B) = \mathbf{G}^{AB}, \\ \mathbf{G}_g^L &= L_g^* \mathbf{G} = \mathbf{G}^{AB} [(L_g)_* e_A] \otimes [(L_g)_* e_B] = \mathbf{G}^{AB} \xi_A(g) \otimes \xi_B(g). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $\xi_A(g)$ – левоинвариантные векторные поля на группе G . Пусть $\{z^i\}$ ($i = 1, \dots, n$) – координаты элемента $g \in G$. В этих координатах компоненты левоинвариантной метрики имеют вид

$$g^{ij}(z) = \mathbf{G}_g^L(dz^i, dz^j) = \mathbf{G}^{AB} \xi_A^i(z) \xi_B^j(z). \quad (8)$$

Произвольный элемент группы можно представить как $g = hs(x)$, где $h \in H$, $s(x)$ – гладкое локальное сечение $s: G \rightarrow M$ главного расслоения (G, M, π, H) , $\pi \circ s = \text{id}$. Пусть $\{y^{\bar{a}}\}$ ($\bar{a} = 1, \dots, n-m$), $\{x^a\}$ ($a = 1, \dots, m$) – локальные координаты в слое H и на базе M , соответственно. В этих координатах

$$\xi_A(g) = X_A^a(x) \partial_{x^a} + \xi_A^{\bar{a}}(y, x) \partial_{y^{\bar{a}}}, \quad \pi_* \xi_A(g) = X_A^a(x) \partial_{x^a}. \quad (9)$$

Очевидно, что векторные поля $X_A(x, \partial_x) = X_A^a(x) \partial_{x^a}$ образуют алгебру Ли $\mathcal{G}$: $[X_A, X_B] = C_{AB}^C X_C$ и являются генераторами группы преобразований G , действующей на M (здесь C_{AB}^C – структурные константы алгебры $\mathcal{G}$ в базисе $\{e_A\}$). В локальных координатах компоненты центральной метрики имеют вид

$$g^{ab}(x) = \mathbf{G}^{AB} X_A^a(x) X_B^b(x). \quad (10)$$

Покажем, как связаны геодезические для метрик (8), (10) на G и M , соответственно. При этом мы полагаем, что связности согласованы с метриками.

На T^*G существует естественная симплектическая структура

$$p = p_i dz^i, \quad \omega = dp = dp_i \wedge dz^i. \quad (11)$$

С помощью соотношений (11) уравнение геодезических

$$\frac{d^2 z^i}{dt^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dz^j}{dt} \frac{dz^k}{dt} = 0$$

можно представить в гамильтоновом виде

$$\frac{dz^i}{dt} = \{\tilde{H}(z, p), z^i\}, \quad \frac{dp_i}{dt} = \{\tilde{H}(z, p), p_i\} \quad (12)$$

с гамильтонианом $\tilde{H}(z, p) = (1/2)g^{ij}(z)p_i p_j$, t – натуральный параметр геодезической.

Левоинвариантные векторные поля $\xi_A(g)$ образуют базис касательного пространства $T_g G$ в каждой точке $g \in G$. Аналогично левоинвариантные 1-формы $\omega^A(g) = \omega_i^A(z) dz^i$ образуют базис кокасательного пространства $T_g^* G$, $\xi_A^i \omega_j^A = \delta_j^i$, $\xi_A^i \omega_i^B = \delta_A^B$ и любой вектор T^i или ковектор T_i разлагается по этому базису: $T^i = T^A \xi_A^i$, $T_i =$

$T_A \omega_i^A$. Очевидно, что тензор любой валентности может быть разложен по этому “тетрадному” базису, в частности, компоненты матрицы $\mathbf{G}^{AB}$ являются “тетрадными” компонентами метрики (8). В “тетрадных” компонентах $P_A = \xi_A^i p_i$ уравнения геодезических (12) принимают треугольный вид,

$$\frac{dP_A}{dt} = \{H(P), P_A\}^{\text{Lie}}, \quad (13)$$

$$\frac{dz^i}{dt} = \mathbf{G}^{AB} P_A(t) \xi_B^i(z). \quad (14)$$

Здесь $H(P) = (1/2) \mathbf{G}^{AB} P_A P_B$, $\{\cdot, \cdot\}^{\text{Lie}}$ – скобка Пуассона–Ли на $\mathcal{G}^*$,

$$\begin{aligned} \{\varphi, \psi\}^{\text{Lie}}(P) &= \langle P, [\nabla \varphi, \nabla \psi] \rangle = C_{AB}^C P_C \frac{\partial \varphi(P)}{\partial P_A} \frac{\partial \psi(P)}{\partial P_B}, \\ P &= P_A e^A \in \mathcal{G}^*, \quad \varphi, \psi \in C^\infty(\mathcal{G}^*). \end{aligned}$$

Отображение $\mu: T^*G \rightarrow \mathcal{G}^*$, задаваемое соотношением $\mu(z, p) = P_A e^A$, где $P_A = \xi^i(z) p_i$, называется *отображением момента*.

Таким образом, интегрирование геодезического потока для левоинвариантной метрики сводится к интегрированию гамильтоновой системы на коалгебре $\mathcal{G}^*$ (13), а затем к нахождению интегральной траектории левоинвариантного неавтономного векторного поля

$$\xi(t, g) = \mathbf{G}^{AB} P_A(t) \xi_B^i(z) \partial_{z^i}. \quad (15)$$

Введем симплектическую форму ω на T^*M : $p = p_a dx^a$, $\omega = dp = dp_a \wedge dx^a$ и представим уравнения геодезических на римановом пространстве M с центральной метрикой (10) в гамильтоновом виде

$$\frac{dx^a}{dt} = \{H(x, p), x^a\}, \quad \frac{dp_a}{dt} = \{H(x, p), p_a\}, \quad (16)$$

где

$$H(x, p) = \frac{1}{2} g^{ab}(x) p_a p_b = \frac{1}{2} \mathbf{G}^{AB} X_A(x, p) X_B(x, p); \quad X_A(x, p) \equiv X_A^a(x) p_a.$$

Введем отображение момента $\mu: T^*M \rightarrow \mathcal{G}^*$ стандартным образом, $\mu(x, p) = P_A e^A$, где $P_A = X_A(x, p)$, и представим гамильтонову систему (16) в виде уравнений (13) и уравнений

$$\frac{dx^a}{dt} = \mathbf{G}^{AB} P_A(t) X_B^a(x). \quad (17)$$

Отсюда видно, что интегрирование геодезического потока с центральной метрикой сводится к интегрированию гамильтоновой системы на коалгебре (13) и нахождению интегральных траекторий неавтономного векторного поля $X(t, x) = \mathbf{G}^{AB} P_A(t) X_B^a(x) \partial_{x^a}$, которое является проекцией на M левоинвариантного векторного поля $\xi(t, g)$ (15). Кроме того, как следует из формулы (9), система уравнений (14) состоит из системы (17) и дополнительной системы

$$\frac{dy^{\bar{a}}}{dt} = \mathbf{G}^{AB} P_A(t) \xi_B^{\bar{a}}(y, x).$$

Таким образом, уравнения геодезических (16) для центральной метрики (10) являются составной частью уравнений геодезических (12) для левоинвариантной метрики (8).

Сделаем следующее замечание. Если в случае левоинвариантной метрики в начальный момент времени координаты P_A ковектора $P = P_A e^A \in \mathcal{G}^*$ системы (13) могут принимать произвольные значения, то в случае центральной метрики начальные значения $P_A(0)$ (как, впрочем, и вся траектория $P_A(t)$) лежат на инвариантной поверхности $G\mathcal{H}^\perp \subset \mathcal{G}^*$, где $G\mathcal{H}^\perp$ – орбита коприсоединенного представления группы G пространства $\mathcal{H}^\perp$. Иначе говоря, образ симплектического многообразия T^*M при отображении момента $\mu(T^*M)$ есть не все пространство $\mathcal{G}^*$, а его инвариантное подпространство $G\mathcal{H}^\perp$.

Действительно, положим сначала $x(0) = x_0 = \pi(H)$. Тогда по определению подалгебры изотропии имеем $P_a^0 = X_a^b(x_0)p_b^0 = X_a^b(x_0, p^0) = 0$, что эквивалентно равенству $\langle P^0, e_a \rangle = 0$ или $\langle P^0, \mathcal{H} \rangle = 0$, т.е. $P^0 \in \mathcal{H}^\perp$. Пусть теперь начальная точка $x = x(0)$ не совпадает с точкой x_0 . Очевидно, что существует такой элемент g группы G , что $x = x_0 g$. Можно доказать (см., например, [4]) справедливость равенства $X_A(x, p) = (\text{Ad}_g)_A^B X_B(x_0, p^0)$, где $p = (R_g)^* p^0$. Итак, имеем $P_A(0) = (\text{Ad}_{g^{-1}}^* P^0)_A$, т.е. $P(0) = \text{Ad}_{g^{-1}}^* P^0 \in G\mathcal{H}^\perp$ (иначе говоря, отображение момента является *эквиариантным* отображением).

Выше мы рассмотрели связь между геодезическими потоками с левоинвариантными и центральными метриками. Далее, при рассмотрении вопросов интегрируемости нам удобно будет считать левоинвариантную метрику центральной, а группу G в этом случае – однородным правым G -пространством с тривиальной подгруппой стационарности.

3. ПОСТРОЕНИЕ КАНОНИЧЕСКОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Алгебра $\mathcal{G}$ операторов $X_A(x, \partial_x) = X_A^A(x) \partial_{x^A}$ допускает в общем случае алгебру инвариантных дифференциальных и псевдодифференциальных операторов $L(x, \partial_x)$:

$$[L(x, \partial_x), X_A(x, \partial_x)] = 0.$$

Для коммутативных пространств алгебра инвариантных операторов является центром обертывающего поля $E(\mathcal{G})$ и состоит из операторов Казимира $K(X(x, \partial_x))$. Аналогично функции $X_A(x, p) = X_A^a(x) p_a$ на T^*M образуют ту же алгебру Ли $\mathcal{G}$ относительно скобки Пуассона и допускают алгебру инвариантных функций $L(x, p)$ относительно пуассоновых преобразований, генерируемых алгеброй $\mathcal{G}$: $\{L(x, p), X_A(x, p)\} = 0$. Выберем базис независимых инвариантных функций $\{L_\mu(x, p)\}$. Очевидно, что скобка Пуассона функций $L_\mu(x, p)$ функционально выражается через этот набор,

$$\{L_\mu, L_\nu\} = \Omega_{\mu\nu}(L). \quad (18)$$

Пространство $\mathcal{F}$ с базисом $\{L_\mu(x, p)\}$ и нелинейными коммутационными соотношениями (18) называют *функциональной алгеброй* или *$\mathcal{F}$ -алгеброй* (квадратичной алгеброй, кубической алгеброй и т.д.).

Ясно, что функции $\{L_\mu(x, p)\}$ являются независимыми интегралами движения гамильтоновой системы (16) и в силу произвольности матрицы $\mathbf{G}^{AB}$ других симметрий у

этой системы нет. Переход к треугольному виду (13) и (17) также может не привести к решению поставленной задачи. Если отвлечься от решения уравнений (13), то интегрирование системы (17) в силу ее неавтономности тоже может вызвать затруднения. Например, в случае левоинвариантной метрики система (14) допускает при произвольных функциях $P_A(t)$ алгебру симметрии $\mathcal{G}$ правоинвариантных векторных полей. Однако согласно теореме Ли n -мерная система обыкновенных дифференциальных уравнений интегрируема, если ее алгебра симметрии разрешима, что в общем случае не выполняется. Ниже мы покажем, что для решения уравнений геодезического потока (16) достаточно интегрируемости системы на коалгебре (13).

Интегрирование гамильтоновых систем производится следующим образом. Сначала ограничивают систему на поверхность уровня интегралов движения. Редуцированная система допускает некоторую коммутативную группу симметрии, порожденную гамильтоновыми потоками некоторых интегралов движения, чьи векторные поля лежат на поверхности уровня интегралов движения. Как говорилось во введении, встречаются случаи, когда поверхность уровня плохо определена, и тогда традиционный метод не применим. Ниже мы приведем альтернативный способ интегрирования гамильтоновых систем, который основан на построении специального канонического преобразования. Это преобразование мы будем строить, вводя локальные координаты, и поэтому далее не будем касаться вопросов глобального характера.

Максимальная размерность орбит коприсоединенного представления (К-орбит) равна $n - r$, где число $r = \text{ind } \mathcal{G}$ называется *индексом* алгебры $\mathcal{G}$. В общем случае инвариантное пространство $G\mathcal{H}^\perp$ состоит из сингулярных орбит. Пусть максимальная размерность К-орбиты, принадлежащей пространству $G\mathcal{H}^\perp$, равна $n - r - 2s_M$. Число s_M называется *степенью вырождения* однородного пространства M и определяется структурными константами алгебры $\mathcal{G}$ и подалгебры $\mathcal{H}$ по формуле [4]

$$s_M = \frac{1}{2} \text{rank} \langle \lambda, [\mathcal{G}, \mathcal{G}] \rangle - \frac{1}{2} \text{rank} \langle \lambda, [\mathcal{G}, \mathcal{H}] \rangle = \frac{1}{2} (\dim \mathcal{G}/\mathcal{G}^\lambda - \dim \mathcal{H}/\mathcal{H}^\lambda), \quad (19)$$

где λ — элемент общего положения пространства $\mathcal{H}^\perp$, $\mathcal{G}^\lambda$ — аннулятор ковектора $\lambda \in \mathcal{H}^\perp$, $\mathcal{H}^\lambda = \mathcal{H} \cap \mathcal{G}^\lambda$.

В общем случае функции $X_A(x, p)$ не являются функционально независимыми, между ними существуют функциональные соотношения $\Gamma(X(x, p)) = 0$, которые называются *тождествами*. Число независимых тождеств i_M называется *индексом* однородного пространства. Как было показано в работе [4], индекс однородного пространства $i_M = \text{codim } G\mathcal{H}^\perp$ и может быть найден по структурным константам алгебры $\mathcal{G}$ и ее подалгебры $\mathcal{H}$,

$$i_M = \dim \mathcal{H} - \text{rank} \langle \lambda, [\mathcal{G}, \mathcal{H}] \rangle = \dim \mathcal{H}^\lambda. \quad (20)$$

Введем дуальное к $\mathcal{F}$ пространство $\mathcal{F}^* = \{a_\mu\}$ с образующими a_μ и в пространстве гладких функций на $\mathcal{F}^*$ определим скобку Пуассона, превращая тем самым $C^\infty(\mathcal{F}^*)$ в пуассонову алгебру,

$$\{\varphi, \psi\}^{\mathcal{F}}(a) \equiv \Omega_{\mu\nu}(a) \frac{\partial \varphi(a)}{\partial a_\mu} \frac{\partial \psi(a)}{\partial a_\nu}. \quad (21)$$

Введем также отображение момента $\tilde{\mu}: T^*M \rightarrow \mathcal{F}^*$ соотношением $L_\mu(x, p) = a_\mu$. Отображения моментов $\mu: T^*M \rightarrow G\mathcal{H}^\perp$ и $\tilde{\mu}: T^*M \rightarrow \mathcal{F}^*$ определяют *бирасслоение*. Как показано в работе [5], симплектические листы $\Omega \subset G\mathcal{H}^\perp$ и $\tilde{\Omega} \subset \mathcal{F}^*$ находятся во взаимно однозначном соответствии друг с другом: $\tilde{\Omega} = \tilde{\mu}(\mu^{-1}(\Omega))$. Это означает, что количество нетривиальных функций Казимира $K_m(P)$ на $G\mathcal{H}^\perp$ совпадает с количеством функций Казимира $Z_m(a)$ на $\mathcal{F}^*$ и их можно выбрать согласованным образом:

$$Z_m \circ \tilde{\mu} = K_m \circ \mu \leftrightarrow Z_m(L(x, p)) = K_m(X(x, p)); \quad m = 1, \dots, \text{ind } \mathcal{F}. \quad (22)$$

По аналогии с алгебрами Ли число нетривиальных функций Казимира на $\mathcal{F}^*$ мы называем *индексом* ($\text{ind } \mathcal{F}$) $\mathcal{F}$ -алгебры. Согласованные симплектические листы $\Omega_\kappa, \tilde{\Omega}_\kappa$, пронумерованные $(\text{ind } \mathcal{F})$ -мерным параметром κ , определяются соотношениями

$$\Omega_\kappa = \{P \in G\mathcal{H}^\perp \mid K_m(P) = \kappa_m\}, \quad \tilde{\Omega}_\kappa = \{a \in \mathcal{F}^* \mid Z_m(a) = \kappa_m\}. \quad (23)$$

Размерность и индекс $\mathcal{F}$ -алгебры могут быть найдены по формулам [4]

$$\dim \mathcal{F} = i_M + 2m - n, \quad \text{ind } \mathcal{F} = r + 2s_M - i_M. \quad (24)$$

Размерность симплектического листа $\tilde{\Omega}$ есть $\dim \tilde{\Omega} = \dim \mathcal{F} - \text{ind } \mathcal{F} = 2d(M)$. Целое неотрицательное число $d(M)$ называется *дефектом* однородного пространства M . Алгебра инвариантных операторов для пространств нулевого дефекта коммутативна, принадлежит центру обертывающего поля [4]. Следовательно, пространства нулевого дефекта являются коммутативными пространствами. К коммутативным относятся все симметрические и слабосимметрические пространства [6]. В обзоре [7] коммутативные пространства исследуются геометрическими методами. Отметим в этой связи, что для установления факта коммутативности пространства достаточно определить его дефект

$$d(M) = m + i_M - s_M - \frac{1}{2}(n + r) = \frac{1}{2} \dim \mathcal{G}/\mathcal{G}^\lambda - \dim \mathcal{H}/\mathcal{H}^\lambda. \quad (25)$$

Пусть $(\text{ind } \mathcal{F})$ -мерный вещественный параметр j нумерует орбиты максимальной размерности в $G\mathcal{H}^\perp$, $\lambda(j)$ — представитель орбиты $\mathcal{O}_{\lambda(j)} \subset G\mathcal{H}^\perp$. Введем на орбите $\mathcal{O}_{\lambda(j)}$ координаты Дарбу (π_α, q^α) , в которых симплектическая форма Кириллова [1] имеет канонический вид

$$\sum_{\alpha=1}^{(n-r)/2 - s_M} d\pi_\alpha \wedge dq^\alpha.$$

В подавляющем большинстве случаев для ковектора $\lambda \in \mathcal{G}^*$ существует нормальная поляризация $\mathcal{P} \subset \mathcal{G}^c$:

$$\dim \mathcal{P} = \dim \mathcal{G} - \frac{1}{2} \dim \mathcal{O}_\lambda, \quad \langle \lambda, [\mathcal{P}, \mathcal{P}] \rangle = 0, \quad \lambda + \mathcal{P}^\perp \subset \mathcal{O}_\lambda.$$

В этом случае переход к каноническим координатам задается выражением [3]

$$P_A = P_A(q, \pi, j) = P_A^\alpha(q) \pi_\alpha + \chi_A(q, \lambda(j)), \quad (26)$$

причем

$$K_m(P(q, \pi, j)) = \kappa_m(j) = \overline{\kappa_m(j)}; \quad \det \left\| \frac{\partial \kappa_m(j)}{\partial j^k} \right\| \neq 0; \quad m, k = 1, \dots, \text{ind } \mathcal{F}. \quad (27)$$

Аналогично перейдем к каноническим координатам (u, v) на симплектическом листе $\tilde{\Omega}_{\kappa(j)}$ (23):

$$a_\mu = a_\mu(u, v, j); \quad Z_m(a(u, v, j)) = \kappa_m(j). \quad (28)$$

Расширим симплектическое пространство $\Omega \times \tilde{\Omega}$ с формой $d\pi \wedge dq + dv \wedge du$ до симплектического пространства K , гомеоморфного пространству T^*M , путем добавления $\text{ind } \mathcal{F}$ пар канонически-сопряженных величин (τ, j) и определения на K симплектической формы

$$\tilde{\omega} = \sum_{\alpha=1}^{(n-r)/2-s_M} d\pi_\alpha \wedge dq^\alpha + \sum_{\bar{\alpha}=1}^{d(M)} dv_{\bar{\alpha}} \wedge du^{\bar{\alpha}} + \sum_{m=1}^{\text{ind } \mathcal{F}} dj_m \wedge d\tau^m. \quad (29)$$

Далее определим (локально) взаимно однозначный переход от координат (x, p) на T^*M к координатам (q, π, u, v, j, τ) на K так, что $\omega = dp \wedge dx = \tilde{\omega}$.

Отображения моментов $\mu, \tilde{\mu}$ являются пуассоновыми отображениями $T^*M \rightarrow K$,

$$\begin{aligned} \{\varphi \circ \mu, \psi \circ \mu\} &= \{\varphi, \psi\}^{\text{Lie}} \circ \mu, & \{f \circ \tilde{\mu}, h \circ \tilde{\mu}\} &= \{f, h\}^{\mathcal{F}} \circ \tilde{\mu}; \\ \varphi, \psi &\in C^\infty(\mathcal{G}^*); & f, h &\in C^\infty(\mathcal{F}^*), \end{aligned}$$

и в локальных координатах имеют вид

$$X_A(x, p) = P_A(q, \pi, j), \quad L_\mu(x, p) = a_\mu(u, v, j). \quad (30)$$

Соотношения (30) неявным образом определяют переменные (q, π, u, v, j) как функции от переменных (x, p) , в частности, равенства $K_m(X(x, p)) = \kappa_m(j)$ неявно определяют функции $j_m = j_m(x, p)$.

Определим еще отображение $T: T^*M \rightarrow K$ соотношением

$$T^m(x, p) = \tau^m. \quad (31)$$

Очевидно, что отображение $\Lambda = (\mu, \tilde{\mu}, T): T^* \rightarrow K$ будет симплектическим, т.е. будет переводить форму ω в форму $\tilde{\omega}$ тогда и только тогда, когда функции $T^m(x, p)$ удовлетворяют уравнениям

$$\{T^m, j_k\} = \delta_k^m, \quad \{T^m, q^\alpha\} = \{T^m, \pi_\alpha\} = \{T^m, u^{\bar{\alpha}}\} = \{T^m, v_{\bar{\alpha}}\} = 0. \quad (32)$$

Здесь предполагается, что переменные q, π, u, v, j являются функциями от x и p , определяемыми из соотношений (30).

В силу того что формы $\omega, \tilde{\omega}$ невырождены и размерность пространства T^*M равна размерности пространства K , отображение Λ , определяемое соотношениями (30), (31), является локальным симплектическим биективным отображением и осуществляет тем самым искомое каноническое преобразование.

Отметим, что в случае коммутативной группы G симплектические листы $\Omega, \tilde{\Omega}$ нульмерны и координаты q, π, u, v отсутствуют. В этом случае каноническим преобразованием служит переход к переменным “действие–угол”, где j – переменные типа “действие”, τ – “угловые” переменные.

4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКОГО ПОТОКА С G -ИНВАРИАНТНЫМИ МЕТРИКАМИ

Так как гамильтониан геодезического потока для G -инвариантной метрики является G -инвариантной функцией относительно индуцированного действия группы на T^*M , то он является функцией от базисных инвариантов $L_\mu(x, p)$, т.е. $H = H(L(x, p))$. Это же относится и к произвольной G -инвариантной функции $H(x, p)$ на T^*M . Поэтому ниже мы будем исследовать интегрируемость системы (16), где гамильтониан H – произвольная G -инвариантная функция на T^*M .

После канонического преобразования (30), (31) гамильтониан $H(L(x, p))$ перейдет в гамильтониан $\tilde{H}(u, v, j) = H(a(u, v, j))$ и уравнения (16) примут вид

$$\frac{du^{\bar{\alpha}}}{dt} = \frac{\partial \tilde{H}(u, v, j)}{\partial v_{\bar{\alpha}}}, \quad \frac{dv_{\bar{\alpha}}}{dt} = -\frac{\partial \tilde{H}(u, v, j)}{\partial u^{\bar{\alpha}}}, \quad (33)$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{d\pi}{dt} = \frac{dj}{dt} = 0, \quad \frac{d\tau^m}{dt} = \frac{\partial \tilde{H}(u, v, j)}{\partial j_m}. \quad (34)$$

Система уравнений (34) элементарно интегрируется, если известно решение системы (33). Таким образом, интегрируемость исходной гамильтоновой G -инвариантной системы эквивалентна интегрируемости системы (33).

Ясно, что гамильтонова система (33) есть результат редукции исходной гамильтоновой системы (16) на симплектический лист $\tilde{\Omega}_{\kappa(j)}$ размерности $2d(M)$. При $d(M) = 0$, что соответствует случаю коммутативного пространства, переменные u, v отсутствуют, как и система (33). Гамильтонова система (33) интегрируема также при $d(M) = 1$. В этом случае, используя гамильтониан $\tilde{H}$ в качестве интеграла движения, нетрудно получить решения в квадратурах. Очевидно, что при $d(M) > 1$ система (33) в общем случае не интегрируема.

Отметим, что нахождение алгебры инвариантных функций, построение канонических переменных на симплектических листах $\Omega, \tilde{\Omega}$ и функций $T^m(x, p)$ сводится к квадратурам. Таким образом, приходим к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 1. *Произвольная G -инвариантная гамильтонова система на T^*M редуцируется к автономной $2d(M)$ -мерной гамильтоновой системе и, в частности, интегрируема в квадратурах тогда и только тогда, когда $d(M) < 2$.*

В работах [8], [9] приводится критерий интегрируемости произвольных G -инвариантных гамильтоновых систем на T^*M в классе интегралов Нётер. В наших обозначениях этот критерий выглядит следующим образом:

$$\dim \mathcal{G}^\lambda / \mathcal{H}^\lambda + \frac{1}{2} \dim \mathcal{G} / \mathcal{G}^\lambda = \dim \mathcal{G} / \mathcal{H}.$$

Из формулы (25) следует, что это условие представляет собой условие нулевого дефекта, $d(M) = 0$. Однако никакого противоречия с теоремой 1 здесь нет, так как при $d(M) = 1$ гамильтониан H системы (16) не принадлежит к классу интегралов Нётер. Напомним, что класс интегралов Нётер состоит из функций на T^*M вида $\varphi \circ \mu$, $\varphi \in C^\infty(\mathcal{G}^*)$. Таким образом, как следствие, мы получаем следующий критерий коммутативности однородного пространства.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Произвольная G -инвариантная гамильтонова система на T^*M интегрируема в классе интегралов Нётер тогда и только тогда, когда пространство M коммутативно.*

Приведем пример. Рассмотрим неразрешимую пятимерную группу Ли G , алгебра которой $\mathcal{G}$ имеет следующие ненулевые коммутационные соотношения:

$$\begin{aligned} [e_1, e_4] &= -e_1, & [e_1, e_5] &= e_2, & [e_2, e_3] &= e_1, & [e_2, e_4] &= e_2, \\ [e_3, e_4] &= -2e_3, & [e_3, e_5] &= e_4, & [e_4, e_5] &= -2e_5. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что $r = \text{ind } \mathcal{G} = 1$.

Пусть $M = G/H$ – четырехмерное однородное пространство с одномерной подгруппой изотропии H и ее одномерная алгебра Ли $\mathcal{H}$ порождается вектором e_5 . По формулам (19), (20), (24), (25) находим: $s_M = 0$, $i_M = 0$, $\dim \mathcal{F} = 3$, $\text{ind } \mathcal{F} = 1$, $d(M) = 1$. Таким образом, пространство M некоммутативно, алгебра инвариантных функций имеет три порождающих, допускает одну независимую функцию Казимира и произвольная G -инвариантная гамильтонова система на T^*M интегрируема в квадратурах, но не в классе интегралов Нётер.

Введем локальные координаты x на группе G : $g = e^{x_5 e_5} \dots e^{x_1 e_1}$. В этих координатах функции $X(x, p)$ и $L(x, p)$ имеют вид

$$\begin{aligned} X_1 &= p_1, & X_2 &= p_2, & X_3 &= x_2 p_1 + p_3, \\ X_4 &= -x_1 p_1 + x_2 p_2 - 2x_3 p_3 + p_4, & X_5 &= x_1 p_2 - x_3^2 p_3 + x_3 p_4, \\ L_1 &= -e^{x_4} (x_3 p_1 + p_2), & L_2 &= -p_4, & L_3 &= e^{-x_4} (p_1 p_4 - x_3 p_1 p_3 - p_2 p_3). \end{aligned}$$

Алгоритм нахождения алгебры инвариантных операторов на однородных пространствах приведен в работе [4] где, в частности, разобран и пример этого G -пространства.

Рассмотрим гамильтонову систему с наиболее общим гамильтонианом, отвечающим G -инвариантной метрике,

$$H = H(L(x, p)) = \frac{1}{2} (c_1 L_1^2(x, p) + c_2 L_2^2(x, p) + c_3 L_1(x, p) L_2(x, p) + c_4 L_3(x, p)),$$

где c_i – постоянные. Отметим, что рассматриваемая метрика нештекелева, т.е. соответствующее уравнение Гамильтона–Якоби не интегрируется методом разделения переменных.

Канонические координаты, соответствующие поляризации $\mathcal{P} = \{e_1, e_2, e_5\}$, на невырожденной К-орбите, проходящей через ковектор $\lambda = (1, 0, 0, 0, j)$, имеют вид

$$P_1 = q_1, \quad P_2 = -q_2, \quad P_3 = q_1 \pi_2, \quad P_4 = -q_2 \pi_2 + q_1 \pi_1, \quad P_5 = q_2 \pi_1 + \frac{j}{q_1^2}.$$

В данном случае существует одна функция Казимира $K = P_1 P_2 P_4 + P_1^2 P_5 - P_2^2 P_3 = j$. Базисные элементы алгебры инвариантных функций удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\{L_1, L_2\} = L_3, \quad \{L_1, L_3\} = 0, \quad \{L_2, L_3\} = L_3.$$

В пространстве $C^\infty(\mathcal{F}^*)$ существует одна функция Казимира $Z(a) = a_1 a_3$, причем $Z(L(x, p)) = K(X(x, p))$. Элементарно находятся канонические координаты на симплектическом листе $\tilde{\Omega} = \{a \in \mathcal{F}^* \mid a_1 a_3 = j\}$: $a_1 = u$, $a_2 = -uv$, $a_3 = j/u$. Нетрудно также найти функцию $T(x, p) = [p_1^2(p_1 x_3 + p_2)]^{-1}$.

Искомое каноническое преобразование $(x, p) \rightarrow (q, \pi, u, v, j, \tau)$ неявно определяется из уравнений

$$\begin{aligned} p_1 &= q_1, & p_2 &= -q_2, & x_2 p_1 + p_3 &= q_1 \pi_2, \\ -x_1 p_1 + x_2 p_2 - 2x_3 p_3 + p_4 &= q_1 \pi_1 - q_2 \pi_2, \\ x_1 p_2 - x_3^2 p_3 + x_3 p_4 &= q_2 \pi_1 + \frac{j}{q_1^2}, & -e^{x_4}(x_3 p_1 + p_2) &= u, & p_4 &= uv, \\ e^{-x_4}(p_1 p_4 - x_3 p_1 p_3 - p_2 p_3) &= \frac{j}{u}, & p_1^2(p_1 x_3 + p_2) &= \tau^{-1}. \end{aligned}$$

Гамильтониан принимает вид $\tilde{H} = H(a(u, v, j)) = (c_1 u^2 + c_2 u^2 v^2 - c_3 u^2 v + c_4 j/u)/2$. Гамильтонова система с гамильтонианом $\tilde{H}$ и с фазовыми переменными (u, v) просто интегрируется в квадратурах, переменные q, π, j в данном случае будут константами, зависимость от времени для переменной τ определяется интегрированием,

$$\tau(t) = \int \frac{\partial \tilde{H}(u(t), v(t), j)}{\partial j} dt = \int \frac{c_4 dt}{u(t)}.$$

5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПОТОКОВ ДЛЯ ЦЕНТРАЛЬНЫХ МЕТРИК. СЛУЧАЙ ДИКОЙ АЛГЕБРЫ ЛИ

Уравнения геодезического потока (16) для произвольной центральной метрики вида (10) допускают $\mathcal{F}$ -алгебру интегралов движения $\mathcal{F} = \{L(x, p)\}$. После канонического преобразования (30), (31) эти уравнения принимают вид

$$\frac{dq^\alpha}{dt} = \frac{\partial \tilde{H}(q, \pi, j)}{\partial \pi_\alpha}, \quad \frac{d\pi_\alpha}{dt} = -\frac{\partial \tilde{H}(q, \pi, j)}{\partial q^\alpha}, \quad (35)$$

$$\frac{d\tau^m}{dt} = \frac{\partial \tilde{H}(q, \pi, j)}{\partial j_m}, \quad \frac{du^{\bar{\alpha}}}{dt} = \frac{dv_{\bar{\alpha}}}{dt} = \frac{dj_m}{dt} = 0, \quad (36)$$

где $\tilde{H}(q, \pi, j) = (1/2)\mathbf{G}^{AB}P_A(q, \pi, j)P_B(q, \pi, j)$. Система (36) элементарно интегрируется, если известно решение гамильтоновой системы (35). Количество фазовых переменных (q, π) в системе (35) равно $\dim \mathcal{O}_\lambda$, где $\lambda \in \mathcal{H}^\perp$.

ТЕОРЕМА 2. *Геодезический поток на однородном пространстве с произвольной центральной метрикой редуцируется к автономной $\dim \mathcal{O}_\lambda$ -мерной гамильтоновой системе и интегрируем в квадратурах тогда и только тогда, когда*

$$\frac{1}{2} \dim \mathcal{O}_\lambda = \frac{n-r}{2} - s_M < 2.$$

В случае $\dim \mathcal{O}_\lambda = 0$ гамильтониан $\tilde{H} = \tilde{H}(j)$, т.е. уравнений (35) нет. Этот случай соответствует G -инвариантной метрике, когда $H(x, p)$ является функцией Казимира:

$H(x, p) = K \circ \mu$. При $\dim \mathcal{O}_\lambda = 2$ центральная метрика неинвариантна, и этот случай более интересен. Приведем нетривиальный пример, иллюстрирующий полезность применения канонического преобразования (30), (31).

Рассмотрим группу G матриц (эта группа приведена в монографии [1] как пример дикой группы Ли с неполнотделым пространством К-орбит) вида

$$\begin{pmatrix} e^{it} & 0 & z \\ 0 & e^{i\alpha t} & \omega \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где α – иррациональное число (параметр), $t \in \mathbf{R}^1$, $z, \omega \in \mathbf{C}^1$. Группа G является полупрямым произведением одномерной подгруппы $z = \omega = 0$ и четырехмерной нормальной коммутативной подгруппы $t = 0$, а как топологическое пространство G гомеоморфно евклидову пространству $\mathbf{R}^5$. В некотором базисе $\{e_A\}$ алгебра $\mathcal{G}$ группы G имеет следующие ненулевые коммутационные соотношения:

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_1, e_3] = -e_2, \quad [e_1, e_4] = \alpha^2 e_5, \quad [e_1, e_5] = -e_4.$$

В пространстве $C^\infty(\mathcal{G}^*)$ существует три независимых функции Казимира, т.е. $r = \text{ind } \mathcal{G} = 3$. Введем “полярную” систему координат на $\mathcal{G}^*$,

$$P_1 = \sigma, \quad P_2 = \gamma \sin \varphi, \quad P_3 = \gamma \cos \varphi, \quad P_4 = \rho \sin \psi, \quad P_5 = \frac{\rho}{\alpha} \cos \psi. \quad (37)$$

В этих координатах функции Казимира записываются как $K_1 = \gamma$, $K_2 = \rho$, $K_3 = \psi - \alpha\varphi$. В силу того что переменные φ, ψ определены по модулю 2π , а α – иррациональное число, функция K_3 бесконечнозначна и в каждой точке из $\mathcal{G}^*$ область ее значений образует плотное множество на полуотрезке $[0, 2\pi)$. Вследствие этого поверхность уровня для интеграла $K_3 \circ \mu$ на T^*M не определена. Попытаемся проинтегрировать уравнения геодезического потока для центральной метрики на четырехмерном однородном пространстве.

С данной группой движений существуют три неэквивалентных однородных пространства с одномерными подалгебрами изотропии: $\{e_1\}$, $\{e_2\}$, $\{e_4\}$. В пространствах с подгруппами изотропии $\{e_2\}$, $\{e_4\}$ группа G действует неэффективно, поэтому ниже мы будем рассматривать однородное пространство M с подалгеброй изотропии $\{e_1\}$.

В некоторых координатах функции $X_A(x, p)$ имеют вид

$$X_1 = x^3 p_2 - x^2 p_3 + x^1 p_4 - \alpha^2 x^4 p_1, \quad X_2 = p_2, \quad X_3 = p_3, \quad X_4 = p_4, \quad X_5 = p_1.$$

В качестве гамильтониана геодезического потока с центральной метрикой (16) возьмем функцию $H(x, p) = (1/2) \mathbf{G}^{AB} X_A(x, p) X_B(x, p)$, где $\mathbf{G}^{AB}$ – произвольная постоянная матрица, удовлетворяющая условию (4).

По формулам (19), (20), (24), (25) находим: $s_M = 0$, $i_M = 0$, $\dim \mathcal{F} = 3$, $\text{ind } \mathcal{F} = 3$, $d(M) = 0$, $G\mathcal{H}^\perp = \mathcal{G}^*$. Так как $\dim \mathcal{O}_\lambda = 2$, то выполнено условие теоремы 2 и, следовательно, для произвольной центральной метрики на M гамильтонов поток интегрируем. Легко найти четверку коммутирующих интегралов для гамильтоновой системы (16).

Кроме самого гамильтониана в эту четверку входят три функции Казимира $K_m \circ \mu$, $m = 1, 2, 3$. Однако для функции $K_3 \circ \mu$ (а также и для произвольной функции от этой функции) невозможно определить поверхность уровня, и поэтому стандартный метод редукции гамильтоновых систем здесь не применим. Проинтегрируем систему (16), используя каноническое преобразование.

Используя поляризацию $\mathcal{P} = \{e_2, e_3, e_4, e_5\}$ функционала $\lambda = (0, 0, j_1, \alpha j_2 \sin j_3, j_2 \cos j_3)$, выпишем канонические координаты на К-орбите $\mathcal{O}_{\lambda(j)}$,

$$P_1 = \pi, \quad P_2 = j_1 \sin q, \quad P_3 = j_1 \cos q, \quad P_4 = \alpha j_2 \sin(j_3 + \alpha q), \quad P_5 = j_2 \cos(\alpha q + j_3)$$

(мы не рассматриваем здесь частный случай орбит, проходящих через точку $j_1 = 0$ или $j_2 = 0$). Легко можно указать связь канонических координат (π, q, j_1, j_2, j_3) с “полярными” координатами на $\mathcal{G}^*$ (37): $\sigma = \pi$, $\gamma = j_1$, $\varphi = q$, $\rho = \alpha j_2$, $\psi = j_3 + \alpha q$. Невырожденные двумерные орбиты представляют собой одномерное расслоение с локальными координатами в слое $\sigma = \pi$ над кривой $\psi - \alpha\varphi = j_3 - \text{const}$ на торе. Так как α – иррациональное число, то эта кривая образует плотную обмотку тора.

Нехаусдорфовость пространства орбит в данном случае проявляется в том, что величина j_3 , будучи определенной с точностью до $2\pi(n - \alpha m)$, где $n, m \in \mathbf{Z}$, не может быть одной из трех координат в пространстве орбит. Функция Казимира K_3 , представленная в канонических координатах, бесконечнозначна и имеет вид $K_3 = j_3 + 2\pi(n - \alpha m)$. Если в начальный момент времени зафиксировать величину j_3 , то в процессе эволюции (определяемой системой (12)) числа n и m будут испытывать скачки, т.е. значения функции Казимира K_3 будет скачками переходить с одной ветви на другую. На рисунке в качестве иллюстрации изображено значение функции Казимира $K_3 = \arctg(P_4/\alpha P_5) - \alpha \arctg(P_2/P_3)$, полученное численным методом для гамильтониана системы (13) $H = (P_1^2 + 2P_1P_3 + 2P_1P_4 - P_4^2 + P_5^2)/2$.

Отметим, что неоднозначность величины j_3 не препятствует интегрированию геодезического потока с центральной метрикой путем использования канонического преобразования (30), (31), поскольку эта величина фигурирует лишь в составе функций $\sin(j_3 - \alpha q)$, $\cos(j_3 - \alpha q)$, а переменная q определена по модулю 2π .

Функции $T^m(x, p)$ в данном случае имеют вид

$$T^1(x, p) = \frac{x^2 p_2 + x^3 p_3}{\sqrt{p_2^2 + p_3^2}}, \quad T^2(x, p) = \frac{x^1 p_1 + x^4 p_4}{\sqrt{p_1^2 + p_4^2/\alpha^2}}, \quad T^3(x, p) = \alpha x^4 p_1 - \frac{x^1 p_4}{\alpha}.$$

Таким образом, каноническое преобразование $(x, p) \rightarrow (q, \pi, j, \tau)$ определяется выражениями

$$\begin{aligned} x^3 p_2 - x^2 p_3 + x^1 p_4 - \alpha^2 x^4 p_1 &= \pi, \\ p_2 &= j_1 \sin q, \quad p_3 = j_1 \cos q, \quad p_4 = \alpha j_2 \sin(j_3 + \alpha q), \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} p_1 &= j_2 \cos(\alpha q + j_3), \\ \frac{x^2 p_2 + x^3 p_3}{\sqrt{p_2^2 + p_3^2}} &= \tau^1, \quad \frac{x^1 p_1 + x^4 p_4}{\sqrt{p_1^2 + p_4^2/\alpha^2}} = \tau^2, \quad \alpha x^4 p_1 - \frac{x^1 p_4}{\alpha} = \tau^3. \end{aligned} \quad (39)$$

Для произвольной матрицы $\mathbf{G}^{AB}$ гамильтонова система (35) двумерна и с помощью интеграла “энергии” $\tilde{H}(q, \pi, j) = \mathbf{G}^{11} \pi^2/2 + A(q, j)\pi + B(q, j)/2$, где

$$\begin{aligned} A(q, j) &= j_1 (\mathbf{G}^{13} \cos q + \mathbf{G}^{12} \sin q) + j_2 (\mathbf{G}^{15} \cos(j_3 + \alpha q) + \mathbf{G}^{14} \sin(j_3 + \alpha q)), \\ B(q, j) &= \frac{1}{2} j_2^2 \alpha^2 \mathbf{G}^{44} (1 - \cos 2(j_3 + \alpha q)) + \\ &+ \alpha j_1 j_2 \mathbf{G}^{34} (\sin(j_3 + \alpha q + q) + \sin(j_3 + \alpha q - q)) + j_1^2 \mathbf{G}^{23} \sin 2q + \\ &+ \alpha j_1 j_2 \mathbf{G}^{24} (\cos(j_3 + \alpha q - q) + \cos(j_3 + \alpha q + q)) + \frac{1}{2} j_1^2 (\mathbf{G}^{22} + \mathbf{G}^{33}) - \\ &- \frac{1}{2} j_1^2 (\mathbf{G}^{22} - \mathbf{G}^{33}) \cos 2q + \frac{1}{2} j_2^2 \mathbf{G}^{55} (1 + \cos 2(j_3 + \alpha q)) + \\ &+ \alpha j_2^2 \mathbf{G}^{45} \sin 2(j_3 + \alpha q) + j_1 j_2 \mathbf{G}^{25} (\sin(j_3 + \alpha q + q) - \sin(j_3 + \alpha q - q)) + \\ &+ j_1 j_2 \mathbf{G}^{35} (\cos(j_3 + \alpha q + q) + \cos(j_3 + \alpha q - q)), \end{aligned}$$

интегрируется в квадратурах.

Список литературы

- [1] *L. Auslander, B. Kostant.* Bull. Am. Math. Soc. 1967. V. 73. P. 692.
- [2] *А. А. Кириллов.* Элементы теории представлений. М.: Наука, 1978.
- [3] *И. В. Широков.* ТМФ. 2000. Т. 123. № 3. С. 407.
- [4] *И. В. Широков.* ТМФ. 2001. Т. 126. № 3. С. 393.
- [5] *М. В. Карасев, В. П. Маслов.* Нелинейные скобки Пуассона. Геометрия и квантование. М.: Наука, 1991.
- [6] *D. N. Akhiezer, E. B. Vinberg.* Transform. Groups. 1999. V. 4. № 1. P. 3.
- [7] *Э. Б. Винберг.* УМН. 2001. Т. 56. Вып. 1(337). С. 3.
- [8] *И. В. Микитюк.* Мат. сб. 1986. Т. 129(171). № 3. С. 514.
- [9] *И. В. Микитюк.* Изв. АН СССР. Сер. матем. 1983. Т. 47. № 6. С. 1248.

Поступила в редакцию 10.XI.2002 г.