Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Л. Верещагин, Солитонные решения интегрируемой
граничной задачи на полуоси для дискретной цепочки
Тоды, *ТМФ*, 2006, том 148, номер 3, 387–397

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf2323>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 14:06:11

© 2006 г.

В. Л. Верещагин*

СОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРИРУЕМОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ НА ПОЛУОСИ ДЛЯ ДИСКРЕТНОЙ ЦЕПОЧКИ ТОДЫ

Выписаны формулы для солитонных решений дискретной цепочки Тоды и поставлена интегрируемая граничная задача для этой цепочки. Найдены условия для параметров (точек дискретного спектра, коэффициентов прохождения и соответствующих множителей), выделяющие среди всех солитонных решений те, которые отвечают решениям интегрируемой граничной задачи. В результате построены две иерархии солитонных решений с четными и нечетными номерами указанной задачи, причем условия для параметров представлены в явном виде.

Ключевые слова: дискретная цепочка Тоды, интегрируемая краевая задача, солитон.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние десятилетия значительно вырос интерес к интегрируемым нелинейным уравнениям для величин, зависящих только от дискретных (целых) переменных. В работе [1] был приведен ряд важных примеров таких систем, в число которых вошел главный объект рассмотрения данной статьи – так называемая дискретная цепочка Тоды

$$q_{m+1,n} - 2q_{m,n} + q_{m-1,n} = \ln \frac{e^{q_{m,n+1}-q_{m,n}} + 1}{e^{q_{m,n}-q_{m,n-1}} + 1} \quad (1.1)$$

или, в обозначениях $v_{m,n} = e^{q_{m,n}}$,

$$v_{m-1,n} \left(\frac{1}{v_{m,n}} + \frac{1}{v_{m,n-1}} \right) = \frac{1}{v_{m+1,n}} (v_{m,n+1} + v_{m,n}),$$

где $q_{m,n}$, $m, n \in \mathbb{Z}$, – неизвестная функция двух дискретных аргументов. Была показана полная интегрируемость системы (1.1) в смысле наличия матричного представления нулевой кривизны

$$L_{m+1,n}(\lambda) A_{m,n}(\lambda) = A_{m,n+1}(\lambda) L_{m,n}(\lambda), \quad (1.2)$$

*Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, Уфа, Россия. E-mail: v_vereschagin@mail.ru

где

$$\begin{aligned} L_{m,n}(\lambda) &= \begin{pmatrix} \lambda + e^{q_{m,n}-q_{m-1,n}} & e^{q_{m,n}} \\ \lambda e^{-q_{m-1,n}} & 0 \end{pmatrix}, \\ A_{m,n}(\lambda) &= \begin{pmatrix} \lambda & e^{q_{m,n}} \\ \lambda e^{-q_{m,n-1}} & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

λ – комплексный спектральный параметр. Следствием полной интегрируемости является возможность явного решения задачи Коши (по аргументу m) в случае быстроубывающего или квазипериодического (по n) начального условия.

Сравнительно более новым и актуальным стал вопрос о корректной постановке интегрируемой граничной задачи для дискретной цепочки Тоды. Дело в том, что при произвольном выборе граничного (при фиксированном n) условия на $q_{m,n}$ система (1.1) теряет свойство интегрируемости, т.е. наличия полного набора законов сохранения. Поэтому актуальна проблема выбора таких граничных условий, которые позволяют сохранить свойство интегрируемости. Впервые ряд частных примеров был приведен в работе [2]. Оказалось, что при наложении таких (назовем их интегрируемыми) граничных условий остаются хотя и не все, но достаточно многие законы сохранения, необходимые для формирования полного набора атрибутов интегрируемости. Позже в работах [3]–[5] была построена соответствующая теория интегрируемых граничных условий и выписан набор примеров, обобщающих примеры, полученные в работе [2]. В частности, для уравнения (1.1) граничное условие в точке $n = 0$ имеет вид

$$\frac{1}{v_{m,0}} = \frac{\hat{a}v_{m,1}}{c^{4m}} + \frac{\hat{b}}{c^{2m}}, \quad (1.4)$$

где $\hat{a}, \hat{b}$ – константы, $v_{m,n} = e^{q_{m,n}}$, а параметр c в дальнейшем будем считать равным единице. Такое граничное условие называется совместимым с уравнением нулевой кривизны (1.2), т.е. линейное уравнение

$$Y_{m+1,0}(\lambda) = A_{m,0}(\lambda)Y_{m,0}(\lambda) \quad (1.5)$$

для (2×2) -матрицы Y при выполнении условия (1.4) обладает дополнительной точечной симметрией вида

$$\tilde{Y}_{m,0}(\tilde{\lambda}) = H_m(q, \lambda)Y_{m,0}(\lambda), \quad \tilde{\lambda} = \lambda^{-1}. \quad (1.6)$$

Существование матрицы $H_m(q, \lambda)$ и, таким образом, инволюции $\tilde{\lambda}(\lambda)$ является признаком интегрируемости граничного условия и обеспечивает интегрируемость потока по переменной m после наложения условия (1.4).

Тем не менее остается открытым вопрос о конкретном виде решений упомянутых интегрируемых граничных задач для системы (1.1). Основной целью данной статьи является частичное заполнение этого пробела, а именно:

- а) выписывание солитонных решений дискретной цепочки Тоды (1.1);
- б) выделение в явном виде среди этих решений тех, которые решают интегрируемую граничную задачу.

Эти цели определяют структуру работы: в разделе 2 выписывается набор солитонных решений дискретной цепочки Тоды, в разделе 3 определяются условия,

налагаемые на дискретный спектр наличием граничного условия, в разделе 4 описываются остальные параметры солитонных решений, в разделе 5 предъявлена процедура построения явных формул для солитонных решений интегрируемой граничной задачи.

2. СОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ ДИСКРЕТНОЙ ЦЕПОЧКИ ТОДЫ

Метод обратной задачи рассеяния (см., например, книгу [6]), используемый здесь для отыскания солитонов, является стандартным и восходит к решению соответствующей задачи Римана.

Для удобства перепишем матрицы L , A в следующем виде:

$$\begin{aligned} L_{m,n}(\lambda) &= \begin{pmatrix} -\lambda + \frac{1}{\lambda} \frac{v_{m,n}}{v_{m-1,n}} & \frac{v_{m,n}}{\lambda} \\ -\frac{\lambda}{v_{m-1,n}} & 0 \end{pmatrix}, \\ A_{m,n}(\lambda) &= \frac{1}{\lambda\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\lambda^2 & v_{m,n} \\ -\frac{\lambda^2}{v_{m,n-1}} & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $v_{m,n} = e^{q_{m,n}}$. Если (2×2) -матрица $Y_{m,n}$ – решение линейного уравнения

$$Y_{m,n+1}(\lambda) = L_{m,n}(\lambda)Y_{m,n}(\lambda), \quad (2.2)$$

то, обозначив $\Psi_{m,n}(\lambda) = Y_{m,n}^{11}(\lambda)$, получим уравнение второго порядка для скалярной функции $\Psi_{m,n}(\lambda)$:

$$\psi_{m,n+1}(\lambda) = \left(-\lambda + \frac{v_{m,n}}{\lambda v_{m-1,n}} \right) \psi_{m,n}(\lambda) - \frac{v_{m,n}}{v_{m-1,n-1}} \psi_{m,n-1}(\lambda). \quad (2.3)$$

Будем искать солитонные, т.е. быстро стремящиеся к константе при $n \rightarrow \pm\infty$, решения $q_{m,n}$ системы (1.1). Следовательно, не теряя общности, при $n \rightarrow \pm\infty$ имеем оценку

$$L_{m,n}(\lambda) \rightarrow U \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix} U^{-1}, \quad (2.4)$$

где U – некоторая матрица, параметры λ и z связаны соотношением

$$\lambda^{-1} - \lambda = z^{-1} + z. \quad (2.5)$$

Имеем $\det U = \text{const} \cdot (z^2 - 1)$, следовательно, непрерывный спектр линейной задачи (2.2) имеет вид единичной окружности $|z| = 1$, а значения $z = \pm 1$ являются виртуальными уровнями.

Таким образом, можно определить две пары базисных решений уравнения (2.3) с помощью асимптотик при $n \rightarrow \pm\infty$ (переменную m пока считаем произвольной):

$$\begin{cases} \psi_n(z) \sim z^n, & n \rightarrow +\infty, \\ \phi_n(z) \sim z^{-n}, & n \rightarrow -\infty, \end{cases} \quad \begin{cases} \tilde{\psi}_n(z) \sim z^{-n}, & n \rightarrow +\infty, \\ \tilde{\phi}_n(z) \sim z^n, & n \rightarrow -\infty, \end{cases} \quad (2.6)$$

причем функции $\psi_n(z)$, $\phi_n(z)$ аналитичны внутри круга с границей $|z| = 1$, а функции $\tilde{\psi}_n(z)$, $\tilde{\phi}_n(z)$ – вне его. Свяжем эти решения следующим образом:

$$\psi_n(z) = a(z)\tilde{\phi}_n(z) + b(z)\phi_n(z), \quad (2.7)$$

где $a(z)$, $b(z)$ зависят только от параметра z . На окружности $|z| = 1$ имеем

$$\tilde{\phi}_n(z) = \bar{\phi}_n(z), \quad \tilde{\psi}_n(z) = \bar{\psi}_n(z), \quad |z| = 1, \quad (2.8)$$

где черта сверху означает комплексное сопряжение. Отсюда, в частности, вытекают следующие свойства величин $a(z)$, $b(z)$:

$$|a(z)|^2 - |b(z)|^2 = 1, \quad a(-z) = a(z), \quad b(-z) = b(z), \quad |z| = 1. \quad (2.9)$$

Продолжим равенства (2.8) с окружности $|z| = 1$ на комплексную плоскость $\mathbb{C}$:

$$\tilde{\phi}_n(z) = \phi_n(z^{-1}), \quad \tilde{\psi}_n(z) = \psi_n(z^{-1}), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (2.10)$$

Теперь введем обозначения

$$\psi_n(z) = z^n \theta_n(z), \quad \tilde{\phi}_n(z) = z^n \tilde{\chi}_n(z), \quad \phi_n(z) = z^{-n} \chi_n(z), \quad (2.11)$$

откуда в силу (2.7) получаем

$$\frac{\theta_n(z)}{a(z)} = \tilde{\chi}_n(z) + r(z)\chi_n(z), \quad |z| = 1,$$

где $r(z) = b(z)/a(z)$. Сформулируем следующую задачу Римана с контуром в виде единичной окружности $|z| = 1$: построить кусочно-аналитическую функцию $\Phi_n(z)$ такую, что

$$\Phi_n(z) = \begin{cases} \frac{\theta_n(z)}{a(z)}, & |z| < 1, \\ \tilde{\chi}_n(z), & |z| > 1. \end{cases} \quad (2.12)$$

Функция $\Phi_n(z)$ имеет простые полюсы внутри круга $|z| < 1$ в нулях коэффициента $a(z)$: $a(z_k) = 0$, $k = 1, 2, \dots, N$, с вычетами

$$\text{Res}_{z=z_k} \Phi_n(z) = \text{Res}_{z=z_k} \frac{\theta_n(z)}{(z - z_k)a'(z_k)} = \frac{b_k z_k^{-2n} \tilde{\chi}_n(z_k^{-1})}{a'(z_k)}$$

в силу $\tilde{\chi}_n(z^{-1}) = \chi_n(z)$. Величины z_k являются точками дискретного спектра. На окружности $|z| = 1$ функция $\Phi_n(z)$ испытывает скачок, равный $z^{-2n} r(z) \chi_n(z)$. Нормируем $\Phi_n(z)$ при $|z| \rightarrow \infty$ условием $\Phi_n(z) \rightarrow 1$ и получаем решение задачи Римана (2.12):

$$\Phi_n(z) = 1 + \sum_{k=1}^N \frac{b_k z_k^{-2n} \tilde{\chi}_n(z_k^{-1})}{a'(z_k)} - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} \frac{\xi^{-2n} r(\xi) \chi_n(\xi) d\xi}{\xi - z}, \quad (2.13)$$

где b_k – коэффициент, связывающий ψ_n , ϕ_n в точке z_k : $\psi_n(z_k) = b_k \phi_n(z_k)$. Положив в формуле (2.13) $z = 0$, получаем

$$\begin{aligned} \Phi_n(0) &= \frac{\theta_n(0)}{a(0)} = 1 - \sum_{m=1}^N z_m^{-2n-1} b_m (a'(z_m))^{-1} \Gamma_n^{(m)} - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} \xi^{-2n-1} r(\xi) \chi_n(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (2.14)$$

где $\Gamma_n^{(m)} = \tilde{\chi}_n(z_m^{-1})$. С другой стороны, при $|z| > 1$ $\Phi_n(z) = \tilde{\chi}_n(z)$, и для $z = z_k^{-1}$ соотношение (2.13) дает

$$\Gamma_n^{(k)} = 1 + \sum_{m=1}^N z_m^{-2n} b_m (a'(z_m))^{-1} \frac{\Gamma_n^{(m)}}{z_k^{-1} - z_m} - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} \frac{\xi^{-2n} r(\xi) \chi_n(\xi) d\xi}{\xi - z_k^{-1}}, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (2.15)$$

Примем коэффициент отражения равным нулю: $r(z) \equiv 0$, т.е. будем рассматривать так называемый “безотражательный” случай. Тогда система (2.15) становится замкнутой относительно величин $\Gamma_n^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots, N$:

$$\Gamma_n^{(k)} = 1 + \sum_{m=1}^N z_m^{-2n} b_m (a'(z_m))^{-1} \frac{\Gamma_n^{(m)}}{z_k^{-1} - z_m}, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (2.16)$$

Решив систему (2.16), т.е. выразив $\Gamma_n^{(k)}$ через набор данных рассеяния $(z_k, b_k/a'(z_k))$, $k = 1, 2, \dots, N$, из (2.14) получим

$$\frac{\theta_n(0)}{a(0)} = 1 - \sum_{m=1}^N z_m^{-2n-1} b_m (a'(z_m))^{-1} \Gamma_n^{(m)}.$$

С другой стороны, рассматривая линейное уравнение (2.3) в окрестности точки $z = 0$, получим формулу для солитонного решения:

$$v_{m,n} = \text{const} \cdot \theta_{m,n}(0) = \hat{c} \left(1 - \sum_{j=1}^N z_j^{-2n-1} \beta_j^m \Gamma_n^{(j)} \right). \quad (2.17)$$

Осталось лишь найти динамику данных рассеяния по переменной m . Используем исходную линейную задачу (см. (2.1)):

$$\begin{aligned} \beta_j^m &= b_j^m (a'(z_j))^{-1}, \\ \left(\begin{array}{c} \phi_{m,n}(z) \\ Y_{m,n}^{21}(z) \end{array} \right) &\rightarrow \begin{cases} \tilde{c}_m \begin{pmatrix} z^{-n} \\ -\lambda z^{-n+1} \end{pmatrix}, & n \rightarrow -\infty, \\ \tilde{c}_m \begin{pmatrix} a_m z^{-n} + b_m z^n \\ -\lambda(a_m z^{-n+1} + b_m z^{n-1}) \end{pmatrix}, & n \rightarrow +\infty. \end{cases} \end{aligned}$$

Замыкая систему при $n \rightarrow -\infty$, получаем $\tilde{c}_m = (\lambda/z - 1)^m$ и принимая во внимание, что

$$Y_{m+1,n} \rightarrow \frac{1}{\lambda\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\lambda^2 & 1 \\ -\lambda^2 & -1 \end{pmatrix} Y_{m,n}$$

при $n \rightarrow +\infty$, выводим

$$a_m(z) \equiv a_0(z), \quad b_m(z) = b_0(z) \left[\frac{\lambda(1+z\lambda)}{z-\lambda} \right]^m, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (2.18)$$

Аналогичным образом выводится зависимость коэффициентов b_k^m от переменной m :

$$b_k^m = (\xi_k)^{2m} b_k^0, \quad \xi_k = \frac{z_k - \lambda_k^{-1}}{\sqrt{2}}. \quad (2.19)$$

Используя эти соотношения, найдем значение β_j^m , подставим его и получим солитонные решения дискретной цепочки Тоды. Простейшее односолитонное решение имеет вид

$$e^{q_{m,n}} = v_{m,n} = \hat{c} \frac{1 + \beta_1(\xi_1)^{2m}(z_1)^{-2(n+1)}}{1 + \beta_1(\xi_1)^{2m}(z_1)^{-2n}} \quad (2.20)$$

при условии, что

$$c_1 = -\frac{b_0^1}{a'(z_1)(z_1^{-1} - z_1)}, \quad \xi_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(z_1 - z_1^{-1} \pm \sqrt{z_1^2 + z_1^{-2} + 6} \right),$$

$\hat{c}$ – произвольная константа.

3. РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ

В работе [4] было представлено следующее граничное условие для системы (1.1):

$$\frac{1}{v_{m,0}} = \hat{a} v_{m,1} + \hat{b}, \quad (3.1)$$

где $\hat{a}$, $\hat{b}$ – произвольные постоянные, и было показано, что оно является интегрируемым с инволюцией $\tilde{\lambda} = \lambda^{-1}$. В данном разделе мы будем строить солитонные решения граничной задачи (1.1), (3.1). Прежде всего отметим, что условие (3.1) задает постоянные значения, к которым может стремиться солитонное решение при $m \rightarrow \pm\infty$:

$$v \rightarrow \hat{c}^{\pm} = \frac{-\hat{b} \pm \sqrt{\hat{b}^2 + 4\hat{a}}}{2\hat{a}}.$$

Следуя определению интегрируемости граничного условия, отметим существование матричной функции $H_m(q, \lambda)$ такой, что

$$H_{m+1}(q, \lambda) A_{m,0}(\lambda) = A_{m,0}(\tilde{\lambda}) H_m(q, \lambda). \quad (3.2)$$

Требуется среди всех решений $Y(\lambda)$ линейной задачи

$$Y_{m+1,n}(\lambda) = A_{m,n}(\lambda) Y_{m,n}(\lambda) \quad (3.3)$$

выделить те, которые при $n = 0$ удовлетворяют условию наличия дополнительной точечной симметрии:

$$\tilde{Y}_{m,0}(\tilde{\lambda}) = H_m(q, \lambda) Y_{m,0}(\lambda), \quad (3.4)$$

т.е. функция $\tilde{Y}$ снова должна быть решением уравнения (3.3) при $n = 0$.

Подберем калибровочное преобразование

$$A_m(\lambda) \rightarrow \hat{A}_m(\lambda) = F_{m+1}(\lambda) A_m(\lambda) F_m^{-1}(\lambda), \quad (3.5)$$

соответствующее условию (3.4), так, что матрица $\hat{A}_m(\lambda)$ “не чувствует” инволюции $\tilde{\lambda}$:

$$\hat{A}_m(\tilde{\lambda}) = \hat{A}_m(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (3.6)$$

ЛЕММА 1. Матрица $F_m(\lambda)$, задающая калибровочное преобразование (3.5) при условии (3.6), имеет вид

$$F_m(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \begin{pmatrix} \sqrt{-\hat{a}} \lambda & 1 \\ \sqrt{-\hat{a}} \lambda \eta & \eta \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

где $\eta = (\lambda^{-1} - \lambda)\sqrt{-\hat{a}} - \hat{b}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим матрицу $\hat{A}_m(\lambda)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} \hat{A}_m(\lambda) &= \hat{A}_m(\tilde{\lambda}) = F_{m+1}(\tilde{\lambda})A_m(\tilde{\lambda})F_m^{-1}(\tilde{\lambda}) = \\ &= F_{m+1}(\tilde{\lambda})H_{m+1}(\lambda)F_{m+1}^{-1}(\lambda)\hat{A}_m(\lambda)F_m(\lambda)H_m^{-1}(\lambda)F_m^{-1}(\tilde{\lambda}), \end{aligned}$$

где

$$H_m(\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{\lambda^2 \hat{b}}{1-\lambda^2} & 1 \\ -\hat{a} & \frac{\hat{b}}{1-\lambda^2} \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Считаем матрицу $F_m(\lambda)H_m^{-1}(\lambda)F_m^{-1}(\lambda^{-1})$ скалярной, т.е. имеем

$$x(\lambda)F_m(\lambda) = F_m(\lambda^{-1})H_m(\lambda), \quad (3.9)$$

где $x(\lambda)$ – скалярный множитель. Из равенства $x(\lambda)x(\lambda^{-1})E = H_m(\lambda)H_m(\lambda^{-1})$ выводим

$$x(\lambda) = \frac{\lambda \hat{b}}{1-\lambda^2} \pm \sqrt{-\hat{a}} = \frac{\eta(\lambda^{-1})}{\lambda - \lambda^{-1}}.$$

Матричное уравнение (3.9) эквивалентно следующей системе уравнений для элементов матрицы $F_m(\lambda)$:

$$\begin{aligned} f_{11}(\lambda) &= x^{-1}(\lambda) \left[f_{11}(\lambda^{-1})\lambda^2 \frac{\hat{b}}{1-\lambda^2} - \hat{a}f_{12}(\lambda^{-1}) \right], \\ f_{12}(\lambda) &= x^{-1}(\lambda) \left[f_{12}(\lambda^{-1}) \frac{\hat{b}}{1-\lambda^2} + f_{11}(\lambda^{-1}) \right]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Пара уравнений на f_{21} и f_{22} аналогична (3.10) при условии замены $f_{11} \rightarrow f_{21}$, $f_{12} \rightarrow f_{22}$. Система (3.10) решается делением уравнений друг на друга, что дает

$$\frac{f_{11}(\lambda)}{f_{12}(\lambda^{-1})} = \lambda^{-1}, \quad \frac{f_{22}(\lambda)}{f_{22}(\lambda^{-1})} = \lambda^{-1} \frac{\hat{b} + (\lambda - \lambda^{-1})\sqrt{-\hat{a}}}{\hat{b} - (\lambda - \lambda^{-1})\sqrt{-\hat{a}}}$$

и искомые частные решения вида $f_{12}(\lambda) = \lambda^{-1/2}$, $f_{22}(\lambda) = \lambda^{-1/2}\eta$.

СЛЕДСТВИЕ. Матрица $\hat{A}_m$ имеет вид

$$\hat{A}_m(\mu) = -\frac{1}{2\sqrt{-2\hat{a}}} \begin{pmatrix} -\mu\sqrt{-2\hat{a}} + 2\hat{a}v_{m,1} + \hat{b} & 1 \\ 4\hat{a} - \hat{b}^2 - 2\hat{a}\mu^2 & -\mu\sqrt{-2\hat{a}} - 2\hat{a}v_{m,1} - \hat{b} \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

где $\mu = -(\lambda + \lambda^{-1})/\sqrt{2}$.

Таким образом, представлено уравнение

$$Y_{m+1}(\mu) = \hat{A}_m(\mu)Y_m(\mu), \quad (3.12)$$

решения которого удовлетворяют условию существования точечной симметрии (3.4). В солитонном случае спектр линейной задачи состоит из конечного набора собственных значений, причем этот набор инвариантен относительно обоих потоков по t и по n . Спектр, отвечающий решениям уравнения (3.12), не меняется при заменах $\lambda \rightarrow \lambda^{-1}$ или $z \rightarrow -z^{-1}$. Калибровочное преобразование, связывающее A_m и $\bar{A}_m$, не меняет спектра. Таким образом, приходим к следующему утверждению.

УТВЕРЖДЕНИЕ. *Набор точек дискретного спектра, соответствующего граничной задаче (1.1), (3.1), удовлетворяет условию инвариантности относительно инволютивного преобразования $\tilde{\lambda} = \lambda^{-1}$ или, в терминах переменной z , $\tilde{z} = -z^{-1}$.*

4. ПОСТРОЕНИЕ СОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ

Воспользуемся сформулированным выше утверждением и будем строить солитонные решения задачи (1.1), (3.1) с помощью следующей рекуррентной процедуры.

1. Начнем с тривиального решения задачи (1.1), (3.1).
2. Имея на k -м шагу решение задачи (1.1), (3.1), определим $(k+1)$ -е решение по формуле (2.17) путем добавления к дискретному спектру пары точек $\{z_{k+1}, -z_{k+1}^{-1}\}$, а также зададим дополнительную пару параметров

$$\beta_{2k+1} = \frac{b_{2k+1}}{a'(z_{k+1})}, \quad \beta_{2k+2} = \frac{b_{2k+2}}{a'(-z_{k+1}^{-1})} \quad (4.1)$$

для (2.17).

Таким образом, необходимо ответить на вопрос: каковы условия для величин b_{2k+1} , b_{2k+2} , $a'(z_{k+1})$, $a'(-z_{k+1}^{-1})$, позволяющие на k -м шагу рекурсии получить решение задачи (1.1), (3.1)? Относительно $a'(z_{k+1})$, $a'(-z_{k+1}^{-1})$ ответ простой: в солитонном случае, когда спектр исключительно дискретный, $b(z) \equiv 0$, функция $a(z) = W(\phi_n, \psi_n)/(z^{-1} - z)$, где W – вронскиан, аналитична внутри единичного круга, удовлетворяет условию $|a(z)| = 1$ при $|z| = 1$ и, следовательно, определяется своими нулями:

$$a(z) = \prod_{j=1}^k \frac{z^2 + z(z_j^{-1} - z_j) - 1}{z^2 - z(z_j^{-1} - z_j) - 1}. \quad (4.2)$$

Связь между параметрами b_{2k+1} , b_{2k+2} задается следующей леммой (ср. с работой [7]).

ЛЕММА 2. *Имеет место соотношение*

$$b_{2k+2} = -\frac{g_{21}^{(k)}}{b_{2k+1}g_{12}^{(k)}}, \quad (4.3)$$

где $g_{ij}^{(k)}$ – элементы матрицы

$$\begin{aligned} G^{(k)} &= [Y^{(k)}(\lambda_{2k+2})]^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \hat{a} & 0 \end{pmatrix} Y^{(k)}(\lambda_{2k+1}), \\ Y^{(k)}(\lambda) &= \begin{pmatrix} \psi_{m,1}^{(k)}(\lambda) & \phi_{m,1}^{(k)}(\lambda) \\ -\lambda\psi_{m,0}^{(k)}(\lambda) & -\lambda\phi_{m,0}^{(k)}(\lambda) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

$\psi^{(k)}, \phi^{(k)}$ – собственные функции, заданные условиями (2.6) и соответствующие k -солитонному решению.

Доказательство проводится путем вычисления матрицы (4.4) при условии $\psi^{(k)}(\lambda_j) = b_j \phi^{(k)}(\lambda_j)$.

ЛЕММА 3. С точностью до постоянного множителя вид функции $G^{(k)}$ не зависит от номера шага итерации.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся тем, что соседние члены иерархии $Y^{(k)}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, связаны условием (3.4) и очевидным равенством (см. (3.8))

$$H^{-1}(\lambda^{-1}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \hat{a} & 0 \end{pmatrix} H(\lambda) = \text{const} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \hat{a} & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$G^{(k+1)} = [Y^{(k)}(\lambda_{2k+2})]^{-1} H^{-1}(\lambda_{2k+2}^{-1}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \hat{a} & 0 \end{pmatrix} H(\lambda_{2k+1}) Y^{(k)}(\lambda_{2k+1}) = \text{const} \cdot G^{(k)},$$

что и требовалось доказать.

Для окончательного определения параметров солитона нужно еще удовлетворить условию нормировки при $n \rightarrow \pm\infty$. Оценим решения $\Gamma^{(k)}$ линейной системы (2.16) при $n \rightarrow \pm\infty$:

$$\Gamma^{(k)} \sim -\frac{z_k^{2n}}{\beta_k} \frac{\det A_k}{\det A}, \quad n \rightarrow +\infty, \quad |z_k| < 1, \quad (4.5)$$

где $(A)_{ij} = 1/(z_i^{-1} - z_j)$, A_k – матрица, полученная из A заменой k -го столбца на столбец $(1, 1, \dots, 1)^T$. Подставляя оценку (4.5) в формулу

$$v_{m,n} = \hat{c} \left(1 - \sum_{k=1}^N z_k^{-2n-1} \beta_k \Gamma^{(k)} \right),$$

получим условие на $+\infty$:

$$v_{m,n} \sim v^+ = \hat{c} \sum_{|z_k| < 1} z_k^{-1} \frac{\det A_k}{\det A}. \quad (4.6)$$

Аналогично на $-\infty$:

$$v_{m,n} \sim v^- = \hat{c} \sum_{|z_k| < 1} z_k \frac{\det A_k}{\det A}. \quad (4.7)$$

Подставив (4.6) и (4.7) в граничное условие (3.1), получим дополнительное условие для спектра:

$$\frac{v^+}{v^-} = \frac{-\hat{b} + \sqrt{\hat{b}^2 + 4\hat{a}}}{-\hat{b} - \sqrt{\hat{b}^2 + 4\hat{a}}} = \frac{\sum_{|z_k| < 1} z_k \det A_k}{\sum_{|z_k| < 1} z_k^{-1} \det A_k}. \quad (4.8)$$

Теперь имеем следующую теорему.

ТЕОРЕМА. *Солитонные решения задачи (1.1), (3.1) порождаются рекуррентной процедурой (4.1) при следующих условиях на параметры:*

1) *на каждом шаге к дискретному спектру добавляется пара точек $\{z_{k+1}, -z_{k+1}^{-1}\}$;*

2) *коэффициент $a(z)$ вычисляется по формуле*

$$a(z) = \prod_{j=1}^N \frac{z^2 + z(z_j^{-1} - z_j) - 1}{z^2 - z(z_j^{-1} - z_j) - 1};$$

3) *параметры b_k и b_{k+1} связаны равенством $b_{k+1} = -g_{21}^{(k)}/b_k g_{12}^{(k)}$ (см. матрицу $G^{(k)}$ (4.4), вычисляемую ниже отдельно для четных (5.2) и нечетных (5.6) N);*

4) *выполнено условие нормировки*

$$\frac{\sum_{|z_k| < 1} z_k \det A_k}{\sum_{|z_k| < 1} z_k^{-1} \det A_k} = \frac{-\hat{b} + \sqrt{\hat{b}^2 + 4\hat{a}}}{-\hat{b} - \sqrt{\hat{b}^2 + 4\hat{a}}}.$$

Таким образом, начиная с тривиальных 0- и 1-солитонных решений граничной задачи (1.1), (3.1), мы можем построить две отдельные иерархии решений с четными и нечетными номерами.

5. КОНКРЕТНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РЕШЕНИЙ

Построим набор солитонных решений задачи (1.1), (3.1) с четными номерами. Исходным пунктом является постоянное решение

$$v^{\pm} = \frac{-\hat{b} \pm \sqrt{\hat{b}^2 + 4\hat{a}}}{2\hat{a}}. \quad (5.1)$$

Ему соответствует тривиальная пара собственных функций: $\psi_n(z) = z^n$, $\phi_n(z) = z^{-n}$. Подставляя их в (4.3), (4.4), получим связь для параметров b_k , b_{k+1} :

$$b_{k+1} = b_k^{-1}. \quad (5.2)$$

Так, для 2-солитонного решения имеем формулу

$$v_{m,n} = \hat{c} \frac{\gamma_{m,n+1}}{\gamma_{m,n}}, \quad (5.3)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_{m,n} = & 1 + \beta_1 \frac{z_1^{2n}}{z_1 - z_1^{-1}} + \beta_2 \frac{z_2^{2n}}{z_2 - z_2^{-1}} + \\ & + \beta_1 \beta_2 (z_1 z_2)^{-2n} \frac{z_1 z_2^{-1} - 2 + z_1^{-1} z_2}{(z_1 - z_1^{-1})(z_2 - z_2^{-1})(z_1 - z_2^{-1})(z_2 - z_1^{-1})}, \end{aligned}$$

$$\hat{c}^{-1} = \hat{c}\hat{a} + \hat{b}, \quad \beta_j = \frac{b_j}{a'(z_j)}, \quad z_2 = -z_1^{-1}, \quad a(z) = \frac{z^2 + z(z_1^{-1} - z_1) - 1}{z^2 - z(z_1^{-1} - z_1) - 1},$$

$$b_2 = b_1^{-1}, \quad z_{1,2}^2 = \frac{-\hat{b} \mp \sqrt{\hat{b}^2 + 4\hat{a}}}{-\hat{b} \pm \sqrt{\hat{b}^2 + 4\hat{a}}}.$$

Теперь опишем рекуррентную процедуру для нечетных номеров. Исходным пунктом будут 1-солитонное решение вида (2.20)

$$v_{m,n} = \hat{c} \frac{1 + \beta_1 \xi_1^m z_1^{-2n}}{1 + \beta_1 \xi_1^m z_1^{-2n+2}}, \quad (5.4)$$

где

$$\hat{c} = \frac{-\hat{b} \pm \sqrt{\hat{b}^2 + 4\hat{a}}}{2\hat{a}}, \quad z_1^2 = -\hat{a}\hat{c}^2, \quad \xi_1 = \frac{z_1 + \lambda_1}{z_1^{-1} - \lambda_1^{-1}},$$

и соответствующая пара собственных функций

$$\psi_n = -\frac{z^n}{\xi_1} \left[\alpha \lambda - \frac{p_{m,n-1}}{p_{m-1,n-1}} (z + \lambda) \right],$$

$$\phi_n = z^{-n} \left[\alpha \lambda^{-1} - \frac{p_{m,n-1}}{p_{m-1,n-1}} (\lambda^{-1} - z^{-1}) \right], \quad (5.5)$$

где

$$p_{m,n} = 1 + \beta_1 \xi_1^m z_1^{-2n}, \quad \alpha = \frac{z_1 - z_1^{-1}}{z_1 \xi_1^{-1} - z_1^{-1}}, \quad \lambda^{-1} - \lambda = z + z^{-1}.$$

Подставив (5.5) в (4.3), (4.4), получим связь для параметров b_k, b_{k+1} :

$$b_{k+1} = \left(\frac{z_k^{-1} - \lambda_k^{-1}}{z_k + \lambda_k} \right)^2 b_k^{-1}, \quad (5.6)$$

что заканчивает описание рекуррентной процедуры сформулированной выше теоремы для нечетных номеров солитонных решений.

Благодарности. Автор выражает признательность И. Т. Хабибуллину за полезные советы и обсуждения. Работа частично поддержана Программой РАН “Математические методы в нелинейной динамике”, Фондом содействия отечественной науке и РФФИ (грант № 04-01-00190).

Список литературы

- [1] E. Date, M. Jimbo, T. Miwa, *J. Phys. Soc. Japan*, **51** (1982), 4116–4124; 4125–4131; **52** (1983), 761–765; 766–771.
- [2] Ю. Б. Сурис, *Алгебра и анализ*, **2:2** (1990), 141–157.
- [3] Т. Г. Казакова, *ТМФ*, **138:3** (2004), 422–436.
- [4] Т. Г. Казакова *Конечномерные редукции дискретных систем*, Дисс. ... канд. физ.-матем. наук, ИМ с ВЦ УНЦ РАН, Уфа, 2005.
- [5] I. T. Habibullin, T. G. Kazakova, *J. Phys. A*, **34** (2001), 10369–10376.
- [6] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, П. П. Пятаевский, *Теория солитонов. Метод обратной задачи*, Наука, М., 1980.
- [7] И. Т. Хабибуллин, *ТМФ*, **114:1** (1998), 115–125.

Поступила в редакцию 2.02.2006