Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Гайнутдинов, А. М. Семихатов, И. Ю. Типунин,
Б. Л. Фейгин, Соответствие Каждана–Люстига для ка-
тегории представлений триплетной W -алгебры в логарифмических конформных теориях поля, *ТМФ*, 2006, том 148, номер 3, 398–427

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf2324>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 10:46:40

© 2006 г.

А. М. Гайнутдинов*, А. М. Семихатов†,
И. Ю. Типунин†, Б. Л. Фейгин‡

СООТВЕТСТВИЕ КАЖДАНА–ЛЮСТИГА ДЛЯ КАТЕГОРИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ТРИПЛЕТНОЙ W -АЛГЕБРЫ В ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ КОНФОРМНЫХ ТЕОРИЯХ ПОЛЯ

Для изучения категории представлений триплетной W -алгебры $\mathcal{W}(p)$, являющейся алгеброй симметрий $(1, p)$ -логарифмических моделей конформной теории поля, предлагается эквивалентная категория $\mathcal{C}_p$ конечномерных представлений “ограниченной” квантовой группы $\bar{\mathcal{U}}_q sl(2)$ при $q = e^{i\pi/p}$. Категория $\mathcal{C}_p$ полностью описана посредством классификации всех неразложимых представлений, которые исчерпываются проективными модулями и тремя сериями представлений, описываемых неразложимыми представлениями колчана Кронекера. Эквивалентность категорий $\mathcal{W}(p)$ - и $\bar{\mathcal{U}}_q sl(2)$ -представлений, которая предполагается для всех $p \geq 2$ и доказана при $p = 2$, приводит к отождествлению центров квантовой группы и логарифмической конформной теории поля, а также к отождествлению универсальной R -матрицы и матрицы сплетения.

Ключевые слова: соответствие Каздана–Люстига, квантовые группы, логарифмические конформные теории, неразложимые представления.

1. ВВЕДЕНИЕ

1.0. Соответствие Каздана–Люстига [1] между вертекс-операторными алгебрами (конформными теориями поля) и квантовыми группами, хотя и функториальное, не является непременно эквивалентностью (а также, строго говоря, не обязательно является соответствием с категорией представлений *квантовой группы*; роль последней нередко играет квазитензорная категория [2], не являющаяся категорией

*Физический факультет Московского государственного университета, Москва, Россия.
E-mail: azot@mccme.ru

†Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия.
E-mail: asemikha@td.lpi.ru

‡Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, Москва, Россия.
E-mail: feigin@mccme.ru

представлений какой бы то ни было квантовой группы). “Отклонения” от эквивалентности, как правило, происходят в *рациональных* конформных теориях поля [3]–[6]. Класс моделей конформной теории поля, в которых соответствие Каждана–Люстига представляет собой эквивалентность, дается $(1, p)$ -логарифмическими моделями. Это замечательное свойство можно отнести на счет того, что $(1, p)$ -модели не являются логарифмическими *расширениями* минимальных моделей конформной теории поля, просто потому что последние не существуют. Связанная с $(1, p)$ -моделью категория представлений вертекс-операторной алгебры неполупроста, и поэтому для соответствия Каждана–Люстига не требуется специального “полуупрощения” категории представлений квантовой группы. По поводу успехов в исследовании вертекс-операторных алгебр с неполупростой категорией представлений см. [7], [8], а также литературу, приведенную в этих работах и в [9].

В $(1, p)$ -логарифмических моделях вертекс-операторная алгебра – это триплетная W -алгебра $\mathcal{W}(p)$, “основанная на операторе $\phi_{3,1}$ ” [10], а ее двойственная по Каждану–Люстигу квантовая группа есть $\bar{\mathcal{U}}_q sl(2)$, т.е. так называемая “ограниченная” (restricted) квантовая группа $sl(2)$, при $q = e^{i\pi/p}$ [11]. Алгебра $\mathcal{W}(p)$ и квантовая группа $\bar{\mathcal{U}}_q sl(2)$ имеют одно и то же число $(2p)$ неприводимых представлений и тождественные fusion-кольца (для квантовой группы – кольцо Гротендика). Результаты, полученные в [11], [12], позволяют полагать, что квазитензорные категории $\mathcal{W}(p)$ -и $\bar{\mathcal{U}}_q sl(2)$ -представлений в действительности эквивалентны.

В данной работе мы докажем эквивалентность в наиболее явном случае $p = 2$. Доказательство обобщается на произвольные p , но требует более тщательного исследования, технические детали которого будут опубликованы отдельно. Общая стратегия состоит в построении бимодуля (правого $\bar{\mathcal{U}}_q sl(2)$ -модуля и левого $\mathcal{W}(p)$ -модуля), который разлагается на проективные модули с каждой стороны и тем самым устанавливает эквивалентность двух категорий представлений. При $p = 2$ эта конструкция особенно проста, поскольку участвующие в ней вертексные операторы “почти локальны” по отношению друг к другу.

Эквивалентность, которую мы предполагаем имеющей место для всех p , позволяет заменить изучение категории $\mathcal{W}(p)$ -представлений изучением категории конечномерных $\bar{\mathcal{U}}_q sl(2)$ -представлений. Последние несложно классифицировать, используя стандартные средства [13]; как мы покажем, помимо проективных модулей, все неразложимые представления перечисляются в терминах неразложимых представлений колчана Кронекера и легко могут быть построены явно; имеются четыре серии, пронумерованные целым $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, и две серии, пронумерованные посредством $(n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, z \in \mathbb{CP}^1)$. В силу эквивалентности это же относится и к представлениям алгебры $\mathcal{W}(p)$, прямая классификация которых представляется существенно более сложной задачей.

Эквивалентность категорий приводит к ряду отождествлений между “данными конформной теории поля” и “квантово-групповыми данными”, и весьма интересным является отождествление соответствующих *центров*. Центр $\mathcal{Z}_{\text{cft}}$ модели конформной теории поля – эндоморфизмы тождественного функтора в категории представлений соответствующей вертекс-операторной алгебры $\mathcal{A}$ – содержит “сильно нелокальные” операторы (состояния Ишибаши). Естественный базис в центре строится

в терминах конформных блоков на торе. В полупростом случае $\mathfrak{Z}_{\text{cft}}$ совпадает с пространством характеров конформной теории поля, но в логарифмических моделях $\mathfrak{Z}_{\text{cft}}$ не исчерпывается характерами. Это явление в последнее время изучалось с помощью различных методов [7], [14]–[16]. Общий подход к нахождению недостающих “расширенных характеров”, основанный на построении псевдоследов для класса вертекс-операторных алгебр с неполупростой категорией представлений, предложен в [7]. Расширенные характеры наряду с обычными являются решениями некоторых дифференциальных уравнений [16].

Коль скоро функтор Каждана–Люстига устанавливает эквивалентность между категориями представлений вертекс-операторной алгебры и квантовой группы, $\mathfrak{Z}_{\text{cft}}$ канонически отождествляется с *центром* $\mathfrak{Z}$ квантовой группы. Более того, по крайней мере в $(1, p)$ -моделях, это отождествление между $\mathfrak{Z}_{\text{cft}}$ и $\mathfrak{Z}$ продолжается на представления модулярной группы: $SL(2, \mathbb{Z})$ -представление на $\mathfrak{Z}_{\text{cft}}$, индуцированное преобразованиями $\tau \mapsto -1/\tau$ и $\tau \mapsto \tau + 1$, эквивалентно [11] $SL(2, \mathbb{Z})$ -действию на центре $\mathfrak{Z}$ квантовой группы, определяемому в весьма общих терминах ленточных сплетенных тензорных категорий [17]. Актуальное отождествление $\mathfrak{Z}_{\text{cft}}$ и $\mathfrak{Z}$ приводит к замечательному соотношению

$$\mathbf{v} = e^{2i\pi L_0},$$

где $\mathbf{v}$ – ленточный (ribbon) элемент (лежащий в центре квантовой группы), а L_0 – нулевая мода тензора энергии–импульса. Более того, R -матрицу, связанную с двойственной по Каждану–Люстигу квантовой группой $\mathfrak{G}$, можно отождествить с матрицей сплетения (braiding) в конформной теории поля, причем ее действие на вертексные операторы следует из конструкции квантовой группы $\mathfrak{G}$ в терминах экранирующих операторов (скринингов) и операторов снятия контура.

Заметим, что двойственная по Каждану–Люстигу квантовая группа $\mathfrak{G}$ сама по себе *не является* квазитреугольной (не обладает универсальной R -матрицей), по крайней мере в известных примерах логарифмических $(1, p)$ -моделей [11] и (p', p) -моделей. Но универсальная R -матрица существует для несколько большей квантовой группы, порожденной генераторами из $\mathfrak{G}$, а также квадратным корнем k из картановского генератора K в $\mathfrak{G}$ ($k^2 = K$). В конформной теории поля аналог произвола в определении $k = \sqrt{K}$ состоит в произволе выбора направления контуров, по которым переставляются операторы. Это приводит к *двум* матрицам сплетения B^+ и B^- , хорошо известным в (рациональных) конформных теориях поля [3]–[5], [15].

1.1. Определение. Пусть $\overline{\mathcal{U}}_q sl(2)$ – ограниченная квантовая группа $sl(2)$ при $q = e^{i\pi/p}$, порожденная элементами E , F и K с соотношениями

$$E^p = F^p = 0, \quad K^{2p} = 1$$

и со структурой алгебры Хопфа, задаваемой как

$$\begin{aligned} KEK^{-1} &= q^2 E, & KFK^{-1} &= q^{-2} F, & [E, F] &= \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}, \\ \Delta(E) &= 1 \otimes E + E \otimes K, & \Delta(F) &= K^{-1} \otimes F + F \otimes 1, & \Delta(K) &= K \otimes K, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\epsilon(E) = \epsilon(F) = 0, \quad \epsilon(K) = 1, \\ S(E) = -EK^{-1}, \quad S(F) = -KF, \quad S(K) = K^{-1}.\end{aligned}$$

Эта квантовая группа имеет $2p$ неэквивалентных неприводимых представлений, которые мы обозначаем как $\mathcal{X}_s^+$ и $\mathcal{X}_s^-$, $1 \leq s \leq p$. Модуль $\mathcal{X}_s^\pm$ имеет старший вес $\pm \mathfrak{q}^{s-1}$, при этом $\dim \mathcal{X}_s^\pm = s$.

Пусть $\mathcal{C}_p$ – категория конечномерных $\mathbb{Z}$ -градуированных $\overline{\mathcal{U}}_{\mathfrak{q}}\mathfrak{sl}(2)$ -модулей при $\mathfrak{q} = e^{i\pi/p}$. Она стандартным образом наделяется структурой ленточной сплетенной тензорной категории (необходимый для этого ленточный элемент вычисляется по стандартному рецепту из найденной в [11] универсальной R -матрицы для квантовой группы, содержащей $\overline{\mathcal{U}}_{\mathfrak{q}}\mathfrak{sl}(2)$ в качестве подалгебры; оказывается, что результат дает ленточный элемент именно для $\overline{\mathcal{U}}_{\mathfrak{q}}\mathfrak{sl}(2)$, а не для этой большей квантовой группы).

1.2. Алгебра $\mathcal{W}(p)$. Пусть $\varphi(z)$ – скалярное поле с операторным произведением

$$\varphi(z)\varphi(w) = \ln(z-w),$$

тогда алгебра Вирасоро с центральным зарядом $c = 13 - 6(p + 1/p)$ порождается тензором энергии–импульса (подразумевается нормальное упорядочение)

$$T = \frac{1}{2} \partial\varphi \partial\varphi + \frac{\alpha_0}{2} \partial^2\varphi,$$

где $\alpha_+ = \sqrt{2p}$, $\alpha_- = -\sqrt{2/p}$ и $\alpha_0 = \alpha_+ + \alpha_-$. Имеем скрининг-операторы

$$S_+ = \frac{1}{2i\pi} \oint du e^{\alpha_+ \varphi(u)}, \quad S_- = \frac{1}{2i\pi} \oint du e^{\alpha_- \varphi(u)}$$

и W -алгебру $\mathcal{W}(p)$ [10], порожденную тремя токами

$$W^-(z) = \phi_{3,1}(z) \equiv e^{-\alpha_+ \varphi}(z), \quad W^0(z) = [S_+, W^-(z)], \quad W^+(z) = [S_+, W^0(z)] \quad (1.1)$$

(которые суть примарные поля относительно алгебры Вирасоро с конформными размерностями $2p-1$).

Имеется $2p$ неприводимых $\mathcal{W}(p)$ -модулей, которые мы обозначаем как $\mathfrak{X}_s^+$ (“синглеты”, связанные с оператором $\phi_{1,s}$) и $\mathfrak{X}_s^-$ (“дублеты”, связанные с оператором $\phi_{2,s}$), $1 \leq s \leq p$, характеры которых имеют вид [12]

$$\begin{aligned}\chi_{\mathfrak{X}_s^+}(q) &= \frac{1}{\eta(q)} \left(\frac{s}{p} \theta_{p-s,p}(q) + 2\theta'_{p-s,p}(q) \right), \\ \chi_{\mathfrak{X}_s^-}(q) &= \frac{1}{\eta(q)} \left(\frac{s}{p} \theta_{s,p}(q) - 2\theta'_{s,p}(q) \right),\end{aligned} \quad 1 \leq s \leq p,$$

где

$$\eta(q) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n), \quad \theta_{s,p}(q, z) = \sum_{j \in \mathbb{Z} + s/(2p)} q^{pj^2} z^j,$$

и мы полагаем $\theta_{s,p}(q) = \theta_{s,p}(q, 1)$ и $\theta'_{s,p}(q) = z \frac{\partial}{\partial z} \theta_{s,p}(q, z) \Big|_{z=1}$. Правила слияния для $\mathcal{W}(2)$ были непосредственно вычислены в [18] (см. также [12] для $\mathcal{W}(p)$).

Подходящим выбором категории представлений для $\mathcal{W}(p)$ является категория $\mathcal{O}$.

1.3. Определение. Пусть $\mathfrak{C}_p$ обозначает категорию $\mathcal{O}$ представлений алгебры $\mathcal{W}(p)$, т.е. категорию модулей, в которых присоединенные собственные пространства оператора L_0 конечномерны, а спектр L_0 ограничен с одной стороны.

Это сплетенная ленточная квазитензорная категория; ее квазитензорная структура следует из операторного произведения в конформной теории поля, структура сплетения выводится из монодромии корреляционных функций, а ленточная структура задается оператором $e^{2i\pi L_0}$.

1.4. Теорема. Категории $\mathbb{C}_2$ и $\mathfrak{C}_2$ эквивалентны как ленточные сплетенные квазитензорные категории.

Как отмечено выше, доказательство этого утверждения значительно облегчается тем, что при $p = 2$ имеются “почти локальные” по отношению друг к другу поля в теории симплектических фермионов. В общем случае доказательство требует проработки ряда технических деталей, однако имеется мало сомнений в верности следующего утверждения.

1.5. Гипотеза. Для всякого целого $p \geq 2$ категории $\mathbb{C}_p$ и $\mathfrak{C}_p$ эквивалентны как ленточные сплетенные квазитензорные категории.

Полагая, что эквивалентность имеет место для всех p , можно описывать категорию $\mathcal{W}(p)$ -представлений, исследуя категорию $\overline{\mathcal{U}}_q \mathfrak{sl}(2)$ -представлений. Это представляет собой достаточно простую задачу, которая в значительной степени сводится к описанию неразложимых представлений колчана Кронекера. Приведем теперь список неразложимых модулей, а затем в 1.7 сформулируем результат.

1.6. Неразложимые модули. Ключевой факт состоит в том, что те из пространств $\text{Ext}_{\overline{\mathcal{U}}_q}^1$ расширений между неприводимыми представлениями, которые не являются нулевыми, двумерны (см. 2.3); в терминах базисов $\{x_i^+\}$ и $\{x_i^-\}$, $i = 1, 2$, выбранных в соответствующих пространствах $\mathbb{C}^2 = \text{Ext}_{\overline{\mathcal{U}}_q}^1(\mathcal{X}_s^+, \mathcal{X}_{p-s}^-)$ и $\mathbb{C}^2 = \text{Ext}_{\overline{\mathcal{U}}_q}^1(\mathcal{X}_{p-s}^-, \mathcal{X}_s^+)$, можно построить четыре семейства неразложимых модулей как указано ниже. В приводимых диаграммах $\mathcal{X}_1 \xrightarrow{x} \mathcal{X}_2$ обозначает расширение посредством $x \in \text{Ext}_{\overline{\mathcal{U}}_q}^1(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$, причем $\mathcal{X}_1$ является неприводимым подфактором, а $\mathcal{X}_2$ — неприводимым подмодулем.

Модули $\mathcal{W}_s^\pm(n)$. При $1 \leq s \leq p-1$, $a = \pm$ и целом $n \geq 2$ модуль $\mathcal{W}_s^a(n)$ определяется как

где n – число модулей $\mathcal{X}_s^a$. Базис и $\overline{\mathcal{U}}_{\mathfrak{q}}sl(2)$ -действие на $\mathcal{W}_s^a(n)$ явно описаны в [A.1.1](#) на примере $\mathcal{W}_s^a(2)$.

Модули $\mathcal{M}_s^\pm(n)$. При $1 \leq s \leq p-1$, $a = \pm$ и целом $n \geq 2$ модуль $\mathcal{M}_s^a(n)$ определяется как

где n – число модулей $\mathcal{X}_{p-s}^{-a}$. Базис и $\overline{\mathcal{U}}_{\mathfrak{q}}sl(2)$ -действие на $\mathcal{M}_s^a(n)$ явно описаны в [A.1.2](#) на примере $\mathcal{M}_s^a(2)$.

Модули $\mathcal{O}_s^\pm(n, z)$. При $1 \leq s \leq p-1$, $a = \pm$, целом $n \geq 1$ и $z \in \mathbb{CP}^1$ модуль $\mathcal{O}_s^a(n, z)$ определяется как

где n – полное число модулей $\mathcal{X}_s^a$, а $z = z_1: z_2 \in \mathbb{CP}^1$. Базис и $\overline{\mathcal{U}}_{\mathfrak{q}}sl(2)$ -действие на $\mathcal{O}_s^a(n, z)$ явно описаны в [A.1.3](#) на примере $\mathcal{O}_s^a(1, z)$.

Модули $\mathcal{P}_s^\pm$. При $1 \leq s \leq p-1$ и $a = \pm$ проективный модуль $\mathcal{P}_s^a$ определен в А.2; его структура подфакторов (см. 2.4 ниже) описывается диаграммой

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{X}_s^a & \\
 x_1^a \swarrow & & \searrow x_2^a \\
 \mathcal{X}_{p-s}^{-a} & & \mathcal{X}_{p-s}^{-a} \\
 x_2^a \searrow & & \swarrow x_1^a \\
 & \mathcal{X}_s^a &
 \end{array} \quad (1.2)$$

Следующая теорема показывает, что приведенный список исчерпывает конечномерные неразложимые $\bar{\mathcal{U}}_q \mathfrak{sl}(2)$ -модули.

1.7. Классификационная теорема для $\mathcal{C}_p$.

1) Категория $\mathcal{C}_p$ имеет разложение

$$\mathcal{C}_p = \bigoplus_{s=0}^p \mathcal{C}_p(s),$$

где каждая $\mathcal{C}_p(s)$ является полной подкатегорией.

2) Каждая из подкатегорий $\mathcal{C}_p(0)$ и $\mathcal{C}_p(p)$ полупроста и содержит ровно один неприводимый модуль, $\mathcal{X}_p^+$ и $\mathcal{X}_p^-$, соответственно.

3) Каждая подкатегория $\mathcal{C}_p(s)$, $1 \leq s \leq p-1$, содержит ровно два неприводимых модуля $\mathcal{X}_s^+$ и $\mathcal{X}_{p-s}^-$ и следующий набор неразложимых модулей:

- проективные модули $\mathcal{P}_s^+$ и $\mathcal{P}_{p-s}^-$;
- три серии неразложимых модулей:
 - модули $\mathcal{W}_s^+(n)$ и $\mathcal{W}_{p-s}^-(n)$ для всех целых $n \geq 2$,
 - модули $\mathcal{M}_s^+(n)$ и $\mathcal{M}_{p-s}^-(n)$ для всех целых $n \geq 2$,
 - модули $\mathcal{O}_s^+(n, z)$ и $\mathcal{O}_{p-s}^-(n, z)$ для всех $z \in \mathbb{CP}^1$ и целых $n \geq 1$.

Этим исчерпывается список неразложимых модулей в $\mathcal{C}_p(s)$.

Далее, для каждой подкатегории $\mathcal{C}_p(s)$ при $1 \leq s \leq p-1$ векторное пространство

$$\mathrm{Ext}_s^\bullet = \bigoplus_{n \geq 0} \mathrm{Ext}_{\bar{\mathcal{U}}_q}^n (\mathcal{X}_s^+ \oplus \mathcal{X}_{p-s}^-, \mathcal{X}_s^+ \oplus \mathcal{X}_{p-s}^-)$$

является ассоциативной алгеброй относительно произведения Йонеды. В следующей теореме мы описываем алгебраическую структуру $\mathrm{Ext}_s^\bullet$.

1.8. Теорема. Алгебра $\mathrm{Ext}_s^\bullet$ порождена элементами $x_i^\pm$, $i, j = 1, 2$, с определяющими соотношениями

$$x_i^+ x_j^+ = x_i^- x_j^- = x_1^+ x_2^- + x_2^+ x_1^- = x_1^- x_2^+ + x_2^- x_1^+ = 0.$$

Заметим, что производная категория категории представлений алгебры $\mathrm{Ext}_s^\bullet$ эквивалентна производной категории для $\mathcal{C}_p(s)$ (а потому и производной категории полной подкатегории $\mathcal{W}(p)$ -представлений).

Обозначения. Положим

$$q = e^{i\pi/p},$$

где $p = 2$ в разделе 4 и $p \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ в остальной статье. Ниже $\mathbb{Z}_+$ обозначает множество $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

Данная работа построена следующим образом. Доказательство классификационного результата 1.7 дано в разделе 2. В разделе 3 доказана теорема 1.8. Эквивалентность категорий представлений W -алгебры и квантовой группы доказана в разделе 4 для $p = 2$. Явные конструкции некоторых модулей приведены в приложении А. Необходимые факты о колчанах сообщаются в приложении Б.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО КЛАССИФИКАЦИОННОЙ ТЕОРЕМЫ

Докажем 1.7 путем непосредственного исследования структуры категории $\mathcal{C}_p$. Зафиксируем целое число $p \geq 2$. Схема доказательства такова. В 2.2, используя оператор Казимира, мы разложим категорию $\mathcal{C}_p$ в прямую сумму полных подкатегорий $\mathcal{C}_p(s)$. В 2.3 мы вычислим $\text{Ext}_{\bar{\mathcal{U}}_q}^1$ между неприводимыми представлениями в каждой $\mathcal{C}_p(s)$. В 2.4 строятся проективные модули в каждой полной подкатегории $\mathcal{C}_p(s)$. Далее заметим, что все проективные модули в $\mathcal{C}_p$ являются также инъективными. Этой информации достаточно для того, чтобы убедиться, что неразложимые модули с полупростой длиной 3 являются проективными модулями и что не существуют модули с полупростой длиной 4 или более. Поэтому для завершения доказательства 1.7 остается классифицировать неразложимые модули с полупростой длиной 2. Это сделано в 2.5 с использованием соответствия между модулями с полупростой длиной 2 и неразложимыми представлениями колчана Кронекера.

2.1. Некоторые соглашения и определения. В отношении обозначений и общих фактов о $\bar{\mathcal{U}}_q \equiv \bar{\mathcal{U}}_q sl(2)$, которые потребуются ниже, мы следуем главным образом работе [11].

2.1.1. Ограниченная квантовая группа $\bar{\mathcal{U}}_q sl(2)$. Алгебра Хопфа $\bar{\mathcal{U}}_q sl(2)$ порождена элементами E , F и K с соотношениями, приведенными в 1.1. Во всех $\bar{\mathcal{U}}_q sl(2)$ -модулях выберем базисы так, чтобы генератор K действовал диагонально (действие K на всяком модуле из $\mathcal{C}_p$ диагонализуемо, потому что $K^{2p} = 1$).

Пусть $\mathfrak{z}$ обозначает центр $\bar{\mathcal{U}}_q sl(2)$ (этот центр $(3p - 1)$ -мерен [11]).

2.1.2. Неприводимые модули. Неприводимые $\bar{\mathcal{U}}_q sl(2)$ -модули пронумерованы своими старшими весами q^{s-1} , где $s \in \mathbb{Z}/2p\mathbb{Z}$. Мы будем также параметризовать те же старшие веса как aq^{s-1} , где $a = \pm 1$ и $1 \leq s \leq p$. Тогда при $1 \leq s \leq p$ неприводимый модуль со старшим весом $\pm q^{s-1}$ обозначается как $\mathcal{X}_s^\pm$. Модуль $\mathcal{X}_s^\pm$ размерности s линейно порожден элементами $a_n^\pm$, $0 \leq n \leq s - 1$, где $a_0^\pm$ – вектор старшего веса, а действие алгебры задается как

$$\begin{aligned} K a_n^\pm &= \pm q^{s-1-2n} a_n^\pm, \\ E a_n^\pm &= \pm [n][s-n] a_{n-1}^\pm, \\ F a_n^\pm &= a_{n+1}^\pm, \end{aligned}$$

при этом мы полагаем $a_{-1}^{\pm} = a_s^{\pm} = 0$ и используем стандартное обозначение

$$[n] = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}.$$

Модуль $\mathcal{X}_1^+$ является тривиальным.

2.1.3. Расширения. Пусть A и C — левые $\overline{\mathcal{U}}_q sl(2)$ -модули. Будем говорить, что короткая точная последовательность $\overline{\mathcal{U}}_q sl(2)$ -модулей $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$, или эквивалентно,

$$A \mapsto B \twoheadrightarrow C,$$

является *расширением* C с помощью A . Пусть $\text{Ext}_{\overline{\mathcal{U}}_q}^1(C, A)$ обозначает множество классов эквивалентности (см., например, [19]) расширений C с помощью A .

2.1.4. Полупростая длина модуля. Пусть $\mathcal{N}$ — $\overline{\mathcal{U}}_q sl(2)$ -модуль. Определим *полупростую фильтрацию* модуля $\mathcal{N}$ как башню подмодулей

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_0 \supset \mathcal{N}_1 \supset \dots \supset \mathcal{N}_l = 0, \quad (2.1)$$

где каждый фактор $\mathcal{N}_i/\mathcal{N}_{i+1}$ полупрост. Число l назовем *длиной* фильтрации. На множестве полупростых фильтраций $\mathcal{N}$ существует фильтрация с минимальной длиной ℓ . Назовем ℓ *полупростой длиной* модуля $\mathcal{N}$.

Очевидно, полупростая длина неразложимого модуля не меньше 2. Всякий полупростой модуль имеет полупростую длину 1.

2.2. Разложение категории $\mathcal{C}_p$. Напомним, что элемент Казимира

$$C = EF + \frac{q^{-1}K + qK^{-1}}{(q - q^{-1})^2} = FE + \frac{qK + q^{-1}K^{-1}}{(q - q^{-1})^2} \in \mathfrak{Z}$$

удовлетворяет минимальному полиномиальному соотношению (см., например, [11])

$$\Psi_{2p}(C) = 0,$$

где

$$\Psi_{2p}(x) = (x - \beta_0)(x - \beta_p) \prod_{j=1}^{p-1} (x - \beta_j)^2, \quad \beta_j = \frac{q^j + q^{-j}}{(q - q^{-1})^2},$$

а потому порождает подалгебру в $\mathfrak{Z}$ размерности $2p$. Это соотношение дает такое разложение категории $\mathcal{C}_p$ в прямую сумму полных подкатегорий $\mathcal{C}_p(j)$, что $(C - \beta_j)$ действует нильпотентно на объектах из $\mathcal{C}_p(j)$. Поскольку $\beta_j \neq \beta_{j'}$ при $0 \leq j \neq j' \leq p$, имеется $p + 1$ полных подкатегорий $\mathcal{C}_p(s)$, $0 \leq s \leq p$. Этим доказана часть 1 теоремы 1.7.

Каждая подкатегория $\mathcal{C}_p(s)$ при $1 \leq s \leq p - 1$ содержит ровно два неприводимых модуля $\mathcal{X}_s^+$ и $\mathcal{X}_{p-s}^-$, потому что элемент Казимира действует умножением на β_s в точности на этих двух неприводимых модулях. Неприводимые модули $\mathcal{X}_p^+$ и $\mathcal{X}_p^-$, отвечающие соответствующим собственным значениям β_p и β_0 , принадлежат к соответствующим категориям $\mathcal{C}_p(p)$ и $\mathcal{C}_p(0)$.

Для описания классов изоморфизмов неразложимых представлений опишем сначала расширения между неприводимыми представлениями. Непосредственный анализ показывает, что $\text{Ext}_{\mathcal{U}_q}^1(\mathcal{X}_s^a, \mathcal{X}_{p-s}^{-a}) \cong \mathbb{C}^2$, а все остальные $\text{Ext}_{\mathcal{U}_q}^1$ между неприводимыми представлениями в $\mathcal{C}_p(s)$ обращаются в нуль. Таким образом имеем следующую лемму.

2.3. Лемма. Для $1 \leq s \leq p$ и $a, a' = \pm$ имеются изоморфизмы векторных пространств

$$\text{Ext}_{\mathcal{U}_q}^1(\mathcal{X}_s^a, \mathcal{X}_{s'}^{a'}) \cong \begin{cases} \mathbb{C}^2 & \text{при } a' = -a, s' = p - s, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Кроме того, видно, что часть 2 в теореме 1.7 о неприводимых модулях из $\mathcal{C}_p(s)$ выполнена.

2.3.1. Замечание. Пространство $\mathbb{C}^2$ в этой лемме является фундаментальным представлением алгебры Ли $sl(2)$, посредством которой $\bar{\mathcal{U}}_q sl(2)$ расширяется до квантовой группы Люстига “с разделенными степенями”. Это есть в действительности еще одно проявление эквивалентности категорий $\bar{\mathcal{U}}_q sl(2)$ - и $\mathcal{W}(p)$ -представлений: появление алгебры Ли $sl(2)$ хорошо известно в $(1, p)$ -моделях конформной теории поля, где она является внешним автоморфизмом *триплетной* W -алгебры $\mathcal{W}(p)$, а потому действует на некоторых $\mathcal{W}(p)$ -представлениях, и в частности, на расширениях двух неприводимых представлений.

2.3.2. Модули Верма и базисы в $\mathbb{C}^2$. Для каждого $1 \leq s \leq p$ и $a = \pm$ пусть $\mathcal{V}_s^a$ обозначает модуль Верма со старшим весом aq^{s-1} , и пусть $\bar{\mathcal{V}}_s^a$ – контрагredientный модуль Верма со старшим весом aq^{-s-1} (он является контрагredientным к модулю Верма $\mathcal{V}_{p-s}^{-a}$)¹⁾. Заметим, что $\mathcal{V}_p^\pm = \bar{\mathcal{V}}_p^\pm = \mathcal{X}_p^\pm$.

Для каждого $1 \leq s \leq p-1$ выберем базис $\{x_i^+\}$ и $\{x_i^-\}$, $i = 1, 2$, в соответствующем пространстве $\mathbb{C}^2 = \text{Ext}_{\mathcal{U}_q}^1(\mathcal{X}_s^+, \mathcal{X}_{p-s}^-)$ и $\mathbb{C}^2 = \text{Ext}_{\mathcal{U}_q}^1(\mathcal{X}_{p-s}^-, \mathcal{X}_s^+)$ так, чтобы x_1^+ соответствовало модулю Верма $\mathcal{V}_s^+$, x_2^+ соответствовало контрагredientному модулю Верма $\bar{\mathcal{V}}_s^+$, x_1^- соответствовало $\mathcal{V}_{p-s}^-$, а x_2^- соответствовало $\bar{\mathcal{V}}_{p-s}^-$.

2.3.3. Замечание. В терминах действия $\bar{\mathcal{U}}_q sl(2)$ -генераторов E и F расширение $\mathcal{X}_s^+ \xrightarrow{x_1^+} \mathcal{X}_{p-s}^-$, дающее модуль Верма, устроено так, что F отправляет вектор *младшего* веса из подфактора $\mathcal{X}_s^+$ в вектор *старшего* веса в подмодуле $\mathcal{X}_{p-s}^-$; аналогично расширение, определяемое элементом x_2^+ и дающее контрагredientный модуль Верма, таково, что E отправляет вектор старшего веса из $\mathcal{X}_s^+$ в вектор младшего веса в $\mathcal{X}_{p-s}^-$. Расширения, определяемые элементами x_i^- , $i = 1, 2$, описываются аналогично.

2.4. Проективные модули. Опишем проективные модули в каждой подкатегории $\mathcal{C}_p(s)$ при $0 \leq s \leq p$. Для построения этих модулей используем тот факт, что всякий неразложимый проективный модуль можно получить как проективную накрывающую неприводимого модуля.

¹⁾Модуль Верма $\mathcal{V}_s^a$ и контрагredientный модуль Верма $\bar{\mathcal{V}}_s^a$ являются частными случаями соответствующих $\mathcal{O}_s^a(1, z)$ -модулей при $z = z_1 : z_2 = 1 : 0$ и $z = 0 : 1$.

2.4.1. Предложение. (1) *Проективными модулями в подкатегориях $\mathcal{C}_p(0)$ и $\mathcal{C}_p(p)$ являются соответствующие неприводимые модули $\mathcal{X}_p^+$ и $\mathcal{X}_p^-$.*

(2) *Для каждого s , $1 \leq s \leq p-1$, проективными модулями в подкатегории $\mathcal{C}_p(s)$ являются $\mathcal{P}_s^+$ и $\mathcal{P}_{p-s}^-$ (см. (1.2)).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Часть (1) очевидна, поскольку подкатегории $\mathcal{C}_p(0)$ и $\mathcal{C}_p(p)$ полупросты. Чтобы доказать часть (2), построим проективную накрывающую каждого неприводимого модуля. Сначала построим нетривиальное расширение модуля $\mathcal{X}_s^+$ максимальным числом неприводимых модулей $\mathcal{X}_{p-s}^-$, т.е. расширение посредством $\mathcal{X}_{p-s}^- \otimes \text{Ext}_{\bar{\mathcal{U}}_q}^1(\mathcal{X}_s^+, \mathcal{X}_{p-s}^-)$, что дает

$$\mathcal{X}_{p-s}^- \oplus \mathcal{X}_{p-s}^- \hookrightarrow \mathcal{M}_s^+(2) \twoheadrightarrow \mathcal{X}_s^+.$$

Неразложимый модуль $\mathcal{M}_s^+(2)$ явно описан в A.1.2.

Далее, чтобы найти проективную накрывающую модуля $\mathcal{X}_s^+$, расширим каждое слагаемое в подмодуле $\mathcal{X}_{p-s}^- \oplus \mathcal{X}_{p-s}^- \subset \mathcal{M}_s^+(2)$ посредством $\mathcal{X}_s^+ \otimes \text{Ext}_{\bar{\mathcal{U}}_q}^1(\mathcal{X}_{p-s}^-, \mathcal{X}_s^+)$. Условия совместности с соотношениями алгебры $\bar{\mathcal{U}}_q \mathfrak{sl}(2)$ (в частности, с $F^p = 0$ и $E^p = 0$) приводят к расширению, отвечающему модулю $\mathcal{P}_s^+$, который есть проективная накрывающая модуля $\mathcal{X}_s^+$. Этот модуль явно описан в A.2.

Подобная процедура дает проективную накрывающую $\mathcal{P}_{p-s}^-$ модуля $\mathcal{X}_{p-s}^-$. Модули $\mathcal{M}_{p-s}^-(2)$ и $\mathcal{P}_{p-s}^-$ описаны в A.1.2 и A.2, соответственно.

Таким образом, в каждой подкатегории $\mathcal{C}_p(s)$ при $1 \leq s \leq p-1$ имеются два неэквивалентных проективных модуля $\mathcal{P}_s^+$ и $\mathcal{P}_{p-s}^-$, которые накрывают соответствующие неприводимые модули. Чтобы показать, что эти проективные накрывающие исчерпывают все неразложимые проективные модули в категории $\mathcal{C}_p$, вспомним, что левое регулярное представление $\mathcal{R}$ алгебры $\bar{\mathcal{U}}_q \mathfrak{sl}(2)$ является прямой суммой по всем проективным модулям с кратностью каждого модуля, равной размерности его простого фактора. Размерности простых факторов в $\mathcal{P}_s^\pm$ равны s (см. A.2) и $\dim \mathcal{X}_p^\pm = p$, поэтому

$$\text{Reg} \supset \bigoplus_{s=1}^{p-1} s \mathcal{P}_s^+ \oplus \bigoplus_{s=1}^{p-1} s \mathcal{P}_{p-s}^- \oplus p \mathcal{X}_p^+ \oplus p \mathcal{X}_p^-.$$

С другой стороны, подсчет размерности правой части дает $\sum_{s=1}^{p-1} s \cdot 2p + \sum_{s=1}^{p-1} s \cdot 2p + p \cdot p + p \cdot p = 2p^3 = \dim \bar{\mathcal{U}}_q \mathfrak{sl}(2)$, а потому указанное включение является равенством, и имеет место утверждение (2) предложения.

2.4.2. Замечание. Из 2.4.1 следует также, что структура подфакторов в проективных модулях именно такая, как показано в (1.2).

Далее, “двойственная” процедура построения инъективных модулей в каждой подкатегории $\mathcal{C}_p(s)$ показывает, что они в действительности совпадают с проективными модулями (инъективные модули являются контрагredientными к проективным, но модуль, получаемый обращением всех стрелок в (1.2), очевидно, изоморфен исходному). Отсюда вытекает следующее предложение.

2.4.3. Предложение. *Проективные модули в $\mathcal{C}_p$ являются инъективными.*

2.4.4. Предложение. (1) В $\mathcal{C}_p$ не существуют модули с полупростой длиной, большей 3.

(2) Единственными неразложимыми модулями с полупростой длиной 3 являются проективные модули $\mathcal{P}_s^\pm$, где $1 \leq s \leq p-1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $1 \leq s \leq p-1$ пусть $\mathcal{N}$ – такой модуль, что $\mathcal{N}_0/\mathcal{N}_1$ из (2.1) содержит простое слагаемое $\mathcal{X}_s^\pm$. Это означает, что имеется ненулевое отображение $\mathcal{P}_s^\pm \rightarrow \mathcal{N}$, накрывающее $\mathcal{X}_s^\pm$. Для отображения $\mathcal{P}_s^\pm \rightarrow \mathcal{N}$ имеются две возможности: оно является вложением или оно имеет ненулевое ядро. В первом случае вспомним, что проективный модуль в то же время является инъективным, а потому существует прямое слагаемое в любом модуле, куда он вкладывается. Во втором случае ядро с необходимостью содержит подмодуль $\mathcal{X}_s^\pm$ модуля $\mathcal{P}_s^\pm$. Но это означает, что подфактор $\mathcal{X}_s^\pm$ модуля $\mathcal{N}$ в действительности принадлежит прямому слагаемому в $\mathcal{N}$ с полупростой длиной меньше или равной 2.

2.5. Модули с полупростой длиной 2. Для завершения доказательства части (3) в 1.7 остается классифицировать конечномерные модули с полупростой длиной $\ell = 2$.

2.5.1. Категория $\mathcal{C}_p^{(2)}(s)$. Для $1 \leq s \leq p-1$ пусть $\mathcal{C}_p^{(2)}(s)$ – полная подкатегория в $\mathcal{C}_p(s)$, состоящая из $\overline{\mathcal{U}}_q \text{sl}(2)$ -модулей с полупростой длиной $\ell \leq 2$. Очевидно, каждый модуль из категорий $\mathcal{C}_p^{(2)}(s)$ можно получить либо как

- расширение прямой суммы неприводимых модулей $\mathcal{X}_s^+$ прямой суммой неприводимых модулей $\mathcal{X}_{p-s}^-$ с помощью прямой суммы элементов $x^+ \in \text{Ext}_{\overline{\mathcal{U}}_q}^1(\mathcal{X}_s^+, \mathcal{X}_{p-s}^-)$, либо как

- расширение прямой суммы неприводимых модулей $\mathcal{X}_{p-s}^-$ прямой суммой неприводимых модулей $\mathcal{X}_s^+$ с помощью прямой суммы элементов $x^- \in \text{Ext}_{\overline{\mathcal{U}}_q}^1(\mathcal{X}_{p-s}^-, \mathcal{X}_s^+)$.

Для $X^+ \in \text{Ext}_{\overline{\mathcal{U}}_q}^1(\bigoplus_{j=1}^m \mathcal{X}_s^+, \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{X}_{p-s}^-)$ пусть $\mathcal{J}_{X^+}^+(m, n) \in \text{Ob}(\mathcal{C}_p^{(2)}(s))$ обозначает модуль, определяемый расширением

$$\bigoplus_{j=1}^m \mathcal{X}_s^+ \xrightarrow{X^+} \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{X}_{p-s}^-. \quad (2.2)$$

Для $X^- \in \text{Ext}_{\overline{\mathcal{U}}_q}^1(\bigoplus_{j=1}^m \mathcal{X}_{p-s}^-, \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{X}_s^+)$ определим модули $\mathcal{J}_{X^-}^-(m, n)$ аналогично. Положим также $\mathcal{J}_0^\pm(m, 0) = \bigoplus_{j=1}^m \mathcal{X}_s^\pm$ и $\mathcal{J}_0^\pm(0, n) = \bigoplus_{j=1}^n \mathcal{X}_{p-s}^\pm$.

Определим две полные подкатегории $\mathcal{C}_p^{(2),+}(s)$ и $\mathcal{C}_p^{(2),-}(s)$ в $\mathcal{C}_p^{(2)}(s)$ следующим образом. Объектом в $\mathcal{C}_p^{(2),+}(s)$ является или полупростой модуль, или такой модуль $\mathcal{N}$, что $\mathcal{N}/\mathcal{N}_1 = \bigoplus_{j=1}^m \mathcal{X}_s^+$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$, где $\mathcal{N}_1$ – максимальный полупростой подмодуль (цоколь); другими словами, объект в $\mathcal{C}_p^{(2),+}(s)$ – это модуль $\mathcal{J}_{X^+}^+(m, n)$ при некоторых $m, n \in \mathbb{Z}_+$. Объекты в $\mathcal{C}_p^{(2),-}(s)$ определяются аналогично при $\mathcal{N}/\mathcal{N}_1 = \bigoplus_{j=1}^m \mathcal{X}_{p-s}^-$. Заметим, что $\text{Ob}(\mathcal{C}_p^{(2)}(s)) = \text{Ob}(\mathcal{C}_p^{(2),+}(s)) \cup \text{Ob}(\mathcal{C}_p^{(2),-}(s))$.

²⁾Модули $\mathcal{W}_s^+(n)$, $\mathcal{M}_s^+(n)$ и $\mathcal{O}_s^+(n, z)$ в 1.6 являются частными случаями модулей $\mathcal{J}_{X^+}^+(m, n)$.

Теперь сведем классификацию модулей с полупростой длиной 2 к классификации неразложимых представлений колчана Кронекера $\mathbf{K}$. Читатель может обратиться к [13], [20] и к приложению Б по поводу необходимых фактов о колчанах.

2.5.2. Лемма. *Каждая из категорий $\mathcal{C}_p^{(2),+}(s)$ и $\mathcal{C}_p^{(2),-}(s)$ эквивалентна категории $\text{Rep}(\mathbf{K})$ представлений колчана Кронекера $\mathbf{K}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма почти очевидна, если заметить, что два отображения ε и $\bar{\varepsilon}$ в

$$\mathcal{X}_{p-s}^- \begin{array}{c} \xrightarrow{\bar{\varepsilon}} \\ \xrightarrow{\varepsilon} \end{array} \mathcal{M}_s^+(2)$$

составляют колчан в категории $\bar{\mathcal{U}}_q sl(2)$ -представлений; применением функторов Hom в каждую из двух категорий устанавливается эквивалентность. Несколько более формально эквивалентность, например, между категориями $\mathcal{C}_p^{(2),+}(s)$ и $\text{Rep}(\mathbf{K})$ дается функтором $\mathcal{F}$, который действует на объектах как

$$\mathcal{F}(\mathcal{J}_{\mathbf{X}^+}^+(m, n)) = ((V_0, V_1), (r_{01}, \bar{r}_{01})), \quad (2.3)$$

где

$$V_0 = \text{Hom}_{\bar{\mathcal{U}}_q}(\mathcal{M}_s^+(2), \mathcal{J}_{\mathbf{X}^+}^+(m, n)) = \mathbb{C}^m,$$

$$V_1 = \text{Hom}_{\bar{\mathcal{U}}_q}(\mathcal{X}_{p-s}^-, \mathcal{J}_{\mathbf{X}^+}^+(m, n)) = \mathbb{C}^n$$

и для двух линейно независимых гомоморфизмов $\varepsilon, \bar{\varepsilon} \in \text{Hom}_{\bar{\mathcal{U}}_q}(\mathcal{X}_{p-s}^-, \mathcal{M}_s^+(2)) = \mathbb{C}^2$ два линейных отображения $r_{01}, \bar{r}_{01} \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V_0, V_1)$ определяются как

$$r_{01}(\varphi) = \varphi \circ \varepsilon, \quad \bar{r}_{01}(\varphi) = \varphi \circ \bar{\varepsilon}$$

для всех $\varphi \in V_0$; кроме того, имеется естественное действие на морфизмах.

Существование такого функтора $\mathcal{G}$, что и $\mathcal{G}\mathcal{F}$, и $\mathcal{F}\mathcal{G}$ являются тождественными функторами очевидным образом вытекает из определений категорий $\mathcal{C}_p^{(2),+}(s)$ и $\text{Rep}(\mathbf{K})$.

Из 2.5.2 и Б.2.1 немедленно следует желаемая классификация конечномерных $\bar{\mathcal{U}}_q sl(2)$ -модулей с полупростой длиной $\ell = 2$, что и завершает доказательство 1.7.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.8

Схема доказательства такова. Сначала в п. 3.1 мы находим проективную и инъективную резольвенты неприводимых представлений. Далее в 3.2 вычисляется $\text{Ext}_{\bar{\mathcal{U}}_q}^n$ между неприводимыми представлениями в каждом $\mathcal{C}_p(s)$, а в 3.3 изучается алгебра $\text{Ext}^\bullet$.

3.1. Проективная и инъективная резольвенты неприводимых модулей.

Непосредственное рассмотрение показывает, что отображения, определяемые в следующей лемме, составляют резольвенту.

3.1.1. Лемма. Для каждого $1 \leq s \leq p-1$ модуль $\mathcal{X}_s^a$ имеет проективную резольвенту

$$\dots \xrightarrow{\partial_3} \mathcal{P}_s^a \oplus \mathcal{P}_s^a \oplus \mathcal{P}_s^a \xrightarrow{\partial_2} \mathcal{P}_{p-s}^{-a} \oplus \mathcal{P}_{p-s}^{-a} \xrightarrow{\partial_1} \mathcal{P}_s^a \xrightarrow{\partial_0} \mathcal{X}_s^a, \quad (3.1)$$

где n -й член для четных n имеет вид

$$\xrightarrow{\partial_n} \underbrace{\mathcal{P}_{p-s}^{-a} \oplus \dots \oplus \mathcal{P}_{p-s}^{-a}}_n \xrightarrow{\partial_{n-1}},$$

граничный морфизм есть сквозное отображение в

$$\partial_n: \underbrace{\mathcal{P}_s^a \oplus \dots \oplus \mathcal{P}_s^a}_{n+1} \twoheadrightarrow \mathcal{W}_s^a(n+1) \hookrightarrow \underbrace{\mathcal{P}_{p-s}^{-a} \oplus \dots \oplus \mathcal{P}_{p-s}^{-a}}_n;$$

n -й член и граничный морфизм ∂_n для нечетных n получаются заменой a на $-a$ и s на $p-s$.

Утверждение, двойственное 3.1.1, таково.

3.1.2. Лемма. Для каждого s , $1 \leq s \leq p-1$, модуль $\mathcal{X}_s^a$ имеет инъективную резольвенту

$$\mathcal{X}_s^a \xrightarrow{\delta_0} \mathcal{P}_s^a \xrightarrow{\delta_1} \mathcal{P}_{p-s}^{-a} \oplus \mathcal{P}_{p-s}^{-a} \xrightarrow{\delta_2} \mathcal{P}_s^a \oplus \mathcal{P}_s^a \oplus \mathcal{P}_s^a \xrightarrow{\delta_3} \dots, \quad (3.2)$$

где n -й член для четных n имеет вид

$$\xrightarrow{\delta_{n-1}} \underbrace{\mathcal{P}_{p-s}^{-a} \oplus \dots \oplus \mathcal{P}_{p-s}^{-a}}_n \xrightarrow{\delta_n},$$

кограничный морфизм есть сквозное отображение в

$$\delta_n: \underbrace{\mathcal{P}_{p-s}^{-a} \oplus \dots \oplus \mathcal{P}_{p-s}^{-a}}_n \twoheadrightarrow \mathcal{M}_{p-s}^{-a}(n+1) \hookrightarrow \underbrace{\mathcal{P}_s^a \oplus \dots \oplus \mathcal{P}_s^a}_{n+1};$$

n -й член и кограничный морфизм δ_n для нечетных n получаются заменой a на $-a$ и s на $p-s$.

Вычислим теперь $\text{Ext}_{\mathcal{U}_q}^n$ между неприводимыми модулями.

3.2. Лемма. При $1 \leq s \leq p-1$ и $a = \pm$ имеются изоморфизмы векторных пространств

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{\mathcal{U}_q}^n(\mathcal{X}_s^a, \mathcal{X}_s^a) &\cong \begin{cases} \mathbb{C}^{n+1}, & \text{если } n \text{ четно,} \\ 0, & \text{если } n \text{ нечетно,} \end{cases} \\ \text{Ext}_{\mathcal{U}_q}^n(\mathcal{X}_s^a, \mathcal{X}_{p-s}^{-a}) &\cong \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ четно,} \\ \mathbb{C}^{n+1}, & \text{если } n \text{ нечетно.} \end{cases} \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применение контравариантного функтора $\text{Hom}_{\overline{\mathcal{U}}_q}(-, \mathcal{X}_s^a)$ к проективной резольвенте модуля $\mathcal{X}_s^a$ дает коцепной комплекс

$$\begin{aligned} \mathbf{P}: 0 \xrightarrow{\delta_0} \text{Hom}_{\overline{\mathcal{U}}_q}(\mathcal{P}_s^a, \mathcal{X}_s^a) \xrightarrow{\delta_1} \text{Hom}_{\overline{\mathcal{U}}_q}(\mathcal{P}_{p-s}^{-a} \oplus \mathcal{P}_{p-s}^{-a}, \mathcal{X}_s^a) \xrightarrow{\delta_2} \\ \xrightarrow{\delta_2} \text{Hom}_{\overline{\mathcal{U}}_q}(\mathcal{P}_s^a \oplus \mathcal{P}_s^a \oplus \mathcal{P}_s^a, \mathcal{X}_s^a) \xrightarrow{\delta_3} \dots, \end{aligned}$$

где $(n+1)$ -й член для четных n имеет вид

$$\xrightarrow{\delta_n} \text{Hom}_{\overline{\mathcal{U}}_q}(\underbrace{\mathcal{P}_s^a \oplus \dots \oplus \mathcal{P}_s^a}_{n+1}, \mathcal{X}_s^a) \cong \mathbb{C}^{n+1} \xrightarrow{\delta_{n+1}},$$

а $(n+1)$ -й член для нечетных n имеет вид

$$\xrightarrow{\delta_n} \text{Hom}_{\overline{\mathcal{U}}_q}(\underbrace{\mathcal{P}_{p-s}^{-a} \oplus \dots \oplus \mathcal{P}_{p-s}^{-a}}_{n+1}, \mathcal{X}_s^a) \cong 0 \xrightarrow{\delta_{n+1}}.$$

Видим, что кограничные морфизмы $\delta_i = 0$, $i \geq 1$. Но тогда

$$\text{Ext}_{\overline{\mathcal{U}}_q}^n(\mathcal{X}_s^a, \mathcal{X}_s^a) = H^n(\mathbf{P}) = \ker(\delta_{n+1}) / \text{im}(\delta_n) = \begin{cases} \mathbb{C}^{n+1}, & \text{если } n \text{ четно,} \\ 0, & \text{если } n \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Для вычисления $\text{Ext}_{\overline{\mathcal{U}}_q}^n(\mathcal{X}_s^a, \mathcal{X}_{p-s}^{-a})$ применим функтор $\text{Hom}_{\overline{\mathcal{U}}_q}(-, \mathcal{X}_{p-s}^{-a})$ к (3.1), и этим завершим доказательство.

Заметим далее, что квантовая группа Люстига действует на проективной резольвенте модуля $\mathcal{X}_s^a$, и имеет место следующая лемма.

3.2.1. Лемма. Векторные пространства $\text{Ext}_{\overline{\mathcal{U}}_q}^n(\mathcal{X}_s^a, \mathcal{X}_s^a)$ и $\text{Ext}_{\overline{\mathcal{U}}_q}^n(\mathcal{X}_s^a, \mathcal{X}_{p-s}^{-a})$ являются неприводимыми $sl(2)$ -модулями.

3.3. Ассоциативная алгебра $\text{Ext}^\bullet$. Для каждой подкатегории $\mathcal{C}_p(s)$ при $1 \leq s \leq p-1$ рассмотрим полную Ext -группу

$$\text{Ext}^\bullet \equiv \text{Ext}_s^\bullet = \bigoplus_{n \geq 0} \text{Ext}_{\overline{\mathcal{U}}_q}^n(\mathcal{X}_s^+ \oplus \mathcal{X}_{p-s}^-, \mathcal{X}_s^+ \oplus \mathcal{X}_{p-s}^-).$$

В силу 3.2 имеется изоморфизм векторных пространств

$$\text{Ext}_{\overline{\mathcal{U}}_q}^n(\mathcal{X}_s^+ \oplus \mathcal{X}_{p-s}^-, \mathcal{X}_s^+ \oplus \mathcal{X}_{p-s}^-) \cong \mathbb{C}^{n+1} \oplus \mathbb{C}^{n+1}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Будем писать $\text{Ext}^\bullet$ вместо $\text{Ext}_s^\bullet$, поскольку его алгебраическая структура в действительности не зависит от s . Градуированное векторное пространство $\text{Ext}^\bullet$ снабжено структурой ассоциативной алгебры, определяемой произведением Йонеды.

Ниже, злоупотребляя обозначениями, будем писать просто представитель элемента из $\text{Ext}_{\overline{\mathcal{U}}_q}^n$ вместо соответствующего класса эквивалентности.

Напомним, что базис $\{x_i^+\} \cup \{x_i^-\}$, $i = 1, 2$, в $\text{Ext}_{\overline{\mathcal{U}}_q}^1(\mathcal{X}_s^+ \oplus \mathcal{X}_{p-s}^-, \mathcal{X}_s^+ \oplus \mathcal{X}_{p-s}^-) \cong \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2$ можно выбрать так, что

$$\begin{aligned} x_1^- : \mathcal{X}_s^+ &\rightarrow \mathcal{V}_{p-s}^- \rightarrow \mathcal{X}_{p-s}^-, & x_1^+ : \mathcal{X}_{p-s}^- &\rightarrow \mathcal{V}_s^+ \rightarrow \mathcal{X}_s^+, \\ x_2^- : \mathcal{X}_s^+ &\rightarrow \tilde{\mathcal{V}}_{p-s}^- \rightarrow \mathcal{X}_{p-s}^-, & x_2^+ : \mathcal{X}_{p-s}^- &\rightarrow \tilde{\mathcal{V}}_s^+ \rightarrow \mathcal{X}_s^+. \end{aligned}$$

3.3.1. Лемма. Алгебра $\text{Ext}^\bullet$ порождена элементами $x_i^\pm$, $i = 1, 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала $\text{Ext}_{\bar{\mathcal{U}}_q}^n(\mathcal{X}_s^a, \mathcal{X}_s^a)$ для четных n . В силу 3.2.1 пространство $\text{Ext}_{\bar{\mathcal{U}}_q}^n(\mathcal{X}_s^a, \mathcal{X}_s^a)$ есть неприводимый $sl(2)$ -модуль. Вектор старшего веса x_0 в этом модуле имеет вид

$$x_0 = \underbrace{x_1^{-a} \dots x_1^a x_1^{-a} x_1^a}_n.$$

Этот класс когомологий ненулевой, поскольку его ограничение на подалгебру $\mathbb{C}[F]$ в $\bar{\mathcal{U}}_q sl(2)$ ненулевое, в чем можно убедиться непосредственно. Ввиду $sl(2)$ -действия, получаем, что $\text{Ext}_{\bar{\mathcal{U}}_q}^n(\mathcal{X}_s^a, \mathcal{X}_s^a)$ порождается элементами $x_i^\pm$. Для $\text{Ext}_{\bar{\mathcal{U}}_q}^n(\mathcal{X}_s^a, \mathcal{X}_{p-s}^{-a})$ и нечетных n рассуждение аналогично.

Взяв произведения Йонеды приведенных выше коротких точных последовательностей, получаем следующие точные последовательности в пространстве $\text{Ext}_{\bar{\mathcal{U}}_q}^2(\mathcal{X}_s^+, \mathcal{X}_s^+) \cong \mathbb{C}^3$:

$$\begin{aligned} x_1^- x_1^+ : \mathcal{X}_s^+ &\rightarrow \mathcal{V}_{p-s}^- \rightarrow \mathcal{V}_s^+ \rightarrow \mathcal{X}_s^+, \\ x_2^- x_2^+ : \mathcal{X}_s^+ &\rightarrow \bar{\mathcal{V}}_{p-s}^- \rightarrow \bar{\mathcal{V}}_s^+ \rightarrow \mathcal{X}_s^+, \\ x_2^- x_1^+ : \mathcal{X}_s^+ &\rightarrow \bar{\mathcal{V}}_{p-s}^- \rightarrow \mathcal{V}_s^+ \rightarrow \mathcal{X}_s^+, \\ x_1^- x_2^+ : \mathcal{X}_s^+ &\rightarrow \mathcal{V}_{p-s}^- \rightarrow \bar{\mathcal{V}}_s^+ \rightarrow \mathcal{X}_s^+ \end{aligned}$$

и точные последовательности $x_1^+ x_1^-, x_2^+ x_2^-, x_2^+ x_1^-, x_1^+ x_2^-$ в $\text{Ext}_{\bar{\mathcal{U}}_q}^2(\mathcal{X}_{p-s}^-, \mathcal{X}_{p-s}^-) \cong \mathbb{C}^3$.

3.3.2. Лемма. $x_1^- x_2^+ + x_2^- x_1^+ = x_1^+ x_2^- + x_2^+ x_1^- = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эти соотношения следуют из существования проективных модулей. Рассуждение для $x_1^- x_2^+ + x_2^- x_1^+$ можно развить следующим явным образом. Рассмотрим короткую точную последовательность

$$\mathcal{X}_{p-s}^- \oplus \mathcal{X}_{p-s}^- \rightarrow \mathcal{M}_s^+(2) \rightarrow \mathcal{X}_s^+, \quad (3.3)$$

которая дает длинную точную Ext-последовательность

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \text{Hom}_{\bar{\mathcal{U}}_q}(\mathcal{X}_s^+, \mathcal{X}_s^+) \rightarrow \text{Hom}_{\bar{\mathcal{U}}_q}(\mathcal{M}_s^+(2), \mathcal{X}_s^+) \rightarrow \text{Hom}_{\bar{\mathcal{U}}_q}(\mathcal{X}_{p-s}^- \oplus \mathcal{X}_{p-s}^-, \mathcal{X}_s^+) \xrightarrow{\omega_0} \\ &\xrightarrow{\omega_0} \text{Ext}_{\bar{\mathcal{U}}_q}^1(\mathcal{X}_s^+, \mathcal{X}_s^+) \rightarrow \text{Ext}_{\bar{\mathcal{U}}_q}^1(\mathcal{M}_s^+(2), \mathcal{X}_s^+) \xrightarrow{\varphi} \text{Ext}_{\bar{\mathcal{U}}_q}^1(\mathcal{X}_{p-s}^- \oplus \mathcal{X}_{p-s}^-, \mathcal{X}_s^+) \xrightarrow{\omega_1} \\ &\xrightarrow{\omega_1} \text{Ext}_{\bar{\mathcal{U}}_q}^2(\mathcal{X}_s^+, \mathcal{X}_s^+) \rightarrow \dots, \end{aligned}$$

где ω_0 и ω_1 – связывающие гомоморфизмы, определяемые с точностью до знака произведением Йонеды на заданную короткую точную последовательность (3.3).

Рассмотрим короткую точную последовательность $y^+ \in \text{Ext}_{\bar{\mathcal{U}}_q}^1(\mathcal{M}_s^+(2), \mathcal{X}_s^+)$, имеющую вид

$$\mathcal{X}_s^+ \rightarrow \mathcal{P}_s^+ \rightarrow \mathcal{M}_s^+(2).$$

Расширение y^+ модуля $\mathcal{M}_s^+(2)$ определяет расширение подмодуля $\mathcal{X}_{p-s}^- \oplus \mathcal{X}_{p-s}^- \subset \mathcal{M}_s^+(2)$ как точную последовательность $\varphi(y^+) \in \text{Ext}_{\bar{\mathcal{U}}_q}^1(\mathcal{X}_{p-s}^- \oplus \mathcal{X}_{p-s}^-, \mathcal{X}_s^+)$, имеющую вид

$$\mathcal{X}_s^+ \hookrightarrow \mathcal{W}_{p-s}^-(2) \rightarrow \mathcal{X}_{p-s}^- \oplus \mathcal{X}_{p-s}^-.$$

Как следствие тождества $\omega_1 \circ \varphi = 0$ в $\text{Ext}_{\bar{\mathcal{U}}_q}^2(\mathcal{X}_s^+, \mathcal{X}_s^+)$ выполнено

$$0 = \omega_1 \circ \varphi(y^+) = \mathcal{X}_s^+ \hookrightarrow \mathcal{W}_{p-s}^-(2) \rightarrow \mathcal{M}_s^+(2) \rightarrow \mathcal{X}_s^+$$

или, что эквивалентно,

$$0 = \omega_1 \circ \varphi(y^+) = x_1^- x_2^+ + x_2^- x_1^+.$$

Равенство $x_1^+ x_2^- + x_2^+ x_1^- = 0$ устанавливается аналогично с помощью короткой точной последовательности $\mathcal{X}_s^+ \oplus \mathcal{X}_s^+ \hookrightarrow \mathcal{M}_{p-s}^-(2) \rightarrow \mathcal{X}_{p-s}^-$.

Из 3.3.1 и 3.3.2 следует, что алгебра $\text{Ext}^\bullet$ порождена элементами $x_i^\pm$, $i = 1, 2$, и имеет определяющие соотношения $x_1^- x_2^+ + x_2^- x_1^+ = 0$ и $x_1^+ x_2^- + x_2^+ x_1^- = 0$. Положим также $x_i^+ x_j^+ = x_i^- x_j^- = 0$, $i, j = 1, 2$, поскольку произведение Йонеды определено только для двух точных последовательностей, конец одной из которых совпадает с началом другой. Этим завершается доказательство теоремы 1.8.

4. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ КАТЕГОРИЙ ПРИ $P = 2$: ЯВНАЯ КОНСТРУКЦИЯ

Докажем теперь эквивалентность категорий $\mathcal{W}(p)$ - и $\bar{\mathcal{U}}_q sl(2)$ -представлений при $p = 2$. Доказательство значительно упрощается по сравнению со случаем общих p , потому что $\mathcal{W}(p)$ -генераторы явно строятся из симплектических фермионов [21]. Распространение доказательства на общие p требует должного обобщения симплектических фермионов, достигаемого введением мультиплета конформных полей первого порядка, несущих $\bar{\mathcal{U}}_q sl(2)$ -действие. Эта эквивалентность влечет, в частности, что приведенные в 1.6 диаграммы применимы в равной мере к неразложимым $\mathcal{W}(p)$ -модулям.

4.1. $\mathcal{W}(2)$ -алгебра и симплектические фермионы. При $p = 2$ W -алгебру $\mathcal{W}(2)$ [10], [22] (см. 1.2) удобно описывать в терминах так называемых симплектических фермионов [21] с операторным произведением (в голоморфном секторе, который мы и рассматриваем далее)

$$\theta(z)\bar{\theta}(w) = \ln(z - w).$$

Соответствующая алгебра Вирасоро с центральным зарядом $c = -2$ порождена тензором энергии-импульса (подразумевается нормальное упорядочение)

$$T(z) = -\partial\theta(z)\partial\bar{\theta}(z),$$

а алгебра $\mathcal{W}(2)$ порождена током $T(z)$ и двумя токами

$$W^+(z) = \partial^2\theta(z)\partial\theta(z), \quad W^-(z) = \partial^2\bar{\theta}(z)\partial\bar{\theta}(z).$$

(1, 2)-Модель содержит два сектора полей: поля, порожденные токами $\theta(z)$ и $\bar{\theta}(z)$ из оператора **1** (периодические граничные условия) и из так называемого оператора твиста $\mu_{\pm}(z)$ (антипериодические граничные условия); нижний индекс $\pm$ указывает на две *квантово-групповые* компоненты. В секторе периодических граничных условий имеем

$$\begin{aligned}\theta(z) &= \theta_0^* + \theta_0 \ln z - \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \theta_n z^{-n}, \\ \bar{\theta}(z) &= \bar{\theta}_0^* + \bar{\theta}_0 \ln z - \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \bar{\theta}_n z^{-n},\end{aligned}\tag{4.1}$$

а в секторе антипериодических граничных условий –

$$\begin{aligned}\theta(z) &= \sum_{n \in \mathbb{Z} + 1/2} \frac{1}{n} \theta_n z^{-n}, \\ \bar{\theta}(z) &= \sum_{n \in \mathbb{Z} + 1/2} \frac{1}{n} \bar{\theta}_n z^{-n}.\end{aligned}\tag{4.2}$$

Коммутационные соотношения между модами в секторе периодических граничных условий имеют вид ($[\cdot, \cdot]$ обозначает суперкоммутатор, а в данном случае – антикоммутатор)

$$[\theta_n, \bar{\theta}_m] = n\delta_{m+n,0}, \quad [\theta_n, \theta_m] = 0, \quad [\bar{\theta}_n, \bar{\theta}_m] = 0,$$

а единственные ненулевые коммутационные соотношения с участием θ_0^* и $\bar{\theta}_0^*$ суть³⁾

$$[\theta_0, \bar{\theta}_0^*] = 1, \quad [\bar{\theta}_0, \theta_0^*] = 1.$$

4.2. Бозонизация. Другое описание модели (как в 1.2) достигается в терминах свободного бозонного поля, являющегося решением “уравнения Риккати”

$$\frac{1}{2} \partial \varphi \partial \varphi(z) + \frac{1}{2} \partial^2 \varphi(z) = T(z).$$

Это уравнение имеет два решения $\varphi^+(z)$ и $\varphi^-(z)$, являющиеся скалярными полями с операторными произведениями

$$\varphi^{\pm}(z) \varphi^{\pm}(w) = \ln(z - w)$$

и связанные равенством

$$\varphi_0^+ = -\varphi_0^-,$$

где

$$\varphi_0^{\pm} = \frac{1}{2i\pi} \oint dz \partial \varphi^{\pm}(z).$$

³⁾ Действительно, поскольку $\theta(ze^{2i\pi}) = \theta(z) + 2i\pi\theta_0$, получаем, что антикоммутатор $[2i\pi\theta_0, \bar{\theta}(w)]$ дается приращением операторного произведения $\theta(z)\bar{\theta}(w)$, когда z продолжается посредством $z \rightarrow w + (z - w)e^{2i\pi}$, т.е. $\ln((z - w)e^{2i\pi}) - \ln(z - w) = 2i\pi$. Это выражение не зависит от w , а потому $[\theta_0, \bar{\theta}_0^*] = 1$, $[\theta_0, \theta_n] = 0$.

Симплектические фермионы можно описывать в любой из двух взаимно нелокальных картин, т.е. либо в терминах φ^+ , либо в терминах φ^- . В φ^+ -картине имеем

$$\partial\theta(z) = e^{-\varphi^+(z)}, \quad \bar{\theta}(z) = e^{\varphi^+(z)}, \quad (4.3)$$

а в φ^- -картине –

$$\theta(z) = -e^{\varphi^-(z)}, \quad \partial\bar{\theta}(z) = e^{-\varphi^-(z)}. \quad (4.4)$$

Специальную роль играют нулевые моды

$$\theta_0 = \frac{1}{2i\pi} \oint du \partial\theta(u) = \frac{1}{2i\pi} \oint du e^{-\varphi^+(u)}$$

и

$$\bar{\theta}_0 = \frac{1}{2i\pi} \oint du \partial\bar{\theta}(u) = \frac{1}{2i\pi} \oint du e^{-\varphi^-(u)}.$$

В φ^+ -картине θ_0 является скрининг-оператором, а $\bar{\theta}_0$ – (нелокальным) оператором снятия контура; в φ^- -картине θ_0 – оператор снятия контура, а $\bar{\theta}_0$ – скрининг-оператор.

В φ^- -картине конструкция из (1.1) воспроизводится выбором

$$W^-(z) = e^{-2\varphi^-(z)} = \partial^2\bar{\theta}(z)\partial\bar{\theta}(z), \quad S_+ = \frac{1}{2i\pi} \oint du e^{2\varphi^-(u)} = \frac{1}{2i\pi} \oint du \partial\theta(u)\theta(u).$$

Каждая из бозонизованных картин позволяет локально выразить компоненту оператора твиста. Начав для определенности с φ^+ -картины, положим

$$\mu_+(z) = e^{\varphi^+(z)/2}.$$

Тогда вторая компонента имеет вид

$$\mu_-(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_z} du e^{-\varphi^+(u)} e^{\varphi^+(z)/2}, \quad (4.5)$$

где C_z обозначает контур, проведенный из $-\infty$ к z . В φ^- -картине при этом имеем

$$\mu_-(z) \sim e^{\varphi^-(z)/2}.$$

Две компоненты являются векторами в двумерном представлении квантовой группы, см. ниже.

4.3. Квантовая группа. Как обычно, скрининг-оператор и оператор снятия контура порождают квантовую группу. В логарифмической $(1, p)$ -модели конформной теории поля эта квантовая группа есть $\bar{\mathcal{U}}_{\mathfrak{q}}\mathfrak{sl}(2)$ при $\mathfrak{q} = e^{i\pi/p}$.

В $(1, 2)$ -модели имеем $\mathfrak{q} = i$, а генераторы квантовой группы явно строятся как

$$E = \theta_0, \quad F = \pi\bar{\theta}_0 K \quad (4.6)$$

(причем $E^2 = F^2 = 0$), где

$$K = e^{\pm i\pi\varphi_0^\pm} = e^{-\frac{1}{2} \oint \partial\theta \bar{\theta}} = e^{\frac{1}{2} \oint \theta \partial\bar{\theta}}. \quad (4.7)$$

Нулевые моды θ_0^* и $\bar{\theta}_0^*$ можно при этом рассматривать как функции на квантовой группе. Имеем также

$$\theta_0\bar{\theta}_0 + \bar{\theta}_0\theta_0 = \frac{1 - K^2}{2i\pi}. \quad (4.8)$$

4.4. $\mathcal{W}(2)$ - и $\bar{\mathcal{U}}_q sl(2)$ -представления. Напомним [22], [23], [12], что алгебра $\mathcal{W}(2)$ имеет четыре неприводимых представления $\mathfrak{X}_1^\pm$ и $\mathfrak{X}_2^\pm$. Представления $\mathfrak{X}_2^\pm$ являются модулями Стейнберга (неприводимыми модулями, модулями Верма и проективными модулями одновременно). Нам понадобятся также проективные модули $\mathfrak{P}_1^\pm$, структура подфакторов которых описывается как

Поле, соответствующее вектору старшего веса в модуле $\mathfrak{P}_1^+$, есть $\mathbb{L}(z) = \theta(z)\bar{\theta}(z)$ (“логарифмический партнер” оператора **1**).

Чтобы построить $\mathcal{W}(2)$ -представление в терминах симплектических фермионов, введем вакуумный вектор $|0\rangle$, соответствующий оператору **1** (на который симплектические фермионы действуют целочисленными модами, см. (4.1)); он эквивалентным образом определяется условиями старшего веса

$$\begin{aligned}\theta_n|0\rangle &= 0, & n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \\ \bar{\theta}_n|0\rangle &= 0, & n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \\ K|0\rangle &= |0\rangle,\end{aligned}$$

где мы одновременно указали действие генератора K (4.7).

Пусть M – модуль, порожденный из $|0\rangle$ целочисленными модами $\theta_n \leq -1$ и $\bar{\theta}_n \leq -1$. “Целочисленный” модуль над симплектическими фермионами имеет тогда вид

$$M = M + \theta_0^* M + \bar{\theta}_0^* M + \bar{\theta}_0^* \theta_0^* M.$$

Как $\mathcal{W}(2)$ -модуль M разлагается в прямую сумму двух проективных модулей: модуля $\mathfrak{P}_1^+$, порожденного элементом $\theta_0^* \bar{\theta}_0^* |0\rangle$, и модуля $\mathfrak{P}_1^-$, порожденного элементом $\theta_{-1} \theta_0^* \bar{\theta}_0^* |0\rangle$.

Как $\bar{\mathcal{U}}_q sl(2)$ -модуль M разлагается в бесконечную сумму проективных модулей. Для любого состояния $|v\rangle = v|0\rangle \in M$, где v – однородный многочлен четного порядка по $\theta \leq -1$ и $\bar{\theta} \leq -1$, проективный $\bar{\mathcal{U}}_q sl(2)$ -модуль $\mathcal{P}_1^+$ (см. (1.2)) линейно порожден элементами $\{\bar{\theta}_0^* \theta_0^* |v\rangle, \theta_0^* |v\rangle, -\bar{\theta}_0^* |v\rangle, |v\rangle\}$. Аналогично для любого состояния $|v\rangle = v|0\rangle \in M$, где v – однородный многочлен нечетного порядка по $\theta \leq -1$ и $\bar{\theta} \leq -1$, проективный $\bar{\mathcal{U}}_q sl(2)$ -модуль $\mathcal{P}_1^-$ линейно порожден элементами $\{\bar{\theta}_0^* \theta_0^* |v\rangle, \theta_0^* |v\rangle, -\bar{\theta}_0^* |v\rangle, |v\rangle\}$.

Далее, пусть $|\mu_\pm\rangle$ – вектор, соответствующий оператору $\mu_\pm$, на который симплектические фермионы действуют полуцелыми модами, см. (4.2). Он эквивалентным

образом определяется условиями старшего веса

$$\begin{aligned}\theta_n|\mu_{\pm}\rangle &= 0, & n \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z} \geq 0, \\ \bar{\theta}_n|\mu_{\pm}\rangle &= 0, & n \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z} \geq 0, \\ K|\mu_{\pm}\rangle &= \pm i|\mu_{\pm}\rangle.\end{aligned}$$

Кроме того, он удовлетворяет соотношениям

$$\theta_0|\mu_{-}\rangle = \bar{\theta}_0|\mu_{+}\rangle = 0.$$

Векторы $|\mu_{\pm}\rangle$ являются двумя базисными векторами в двумерном представлении алгебры $\bar{\mathcal{U}}_{\mathfrak{q}}sl(2)$, причем скрининг-операторы θ_0 и $\bar{\theta}_0$ действуют, как указано в (4.5), а именно,

$$\theta_0|\mu_{+}\rangle = |\mu_{-}\rangle, \quad \bar{\theta}_0|\mu_{-}\rangle = \frac{i}{\pi}|\mu_{+}\rangle.$$

Пусть $N_{\pm}$ обозначает модуль над симплектическими фермионами, порожденный из $|\mu_{\pm}\rangle$ полуцелыми модами.

Как $\mathcal{W}(2)$ -модуль каждый из модулей $N_{\pm}$ разлагается в два стейнберговских $\mathcal{W}(2)$ -модуля $\mathfrak{X}_2^{+}$ и $\mathfrak{X}_2^{-}$.

Как $\bar{\mathcal{U}}_{\mathfrak{q}}sl(2)$ -модуль прямая сумма $\mathcal{W}(2)$ -модулей $N_{+} \oplus N_{-}$ разлагается в бесконечную сумму стейнберговских модулей. Стейнберговский модуль $\mathfrak{X}_2^{+}$ линейно порожден элементами $\{v|\mu_{+}\rangle, v|\mu_{-}\rangle\}$ для всякого однородного многочлена v четного порядка по $\theta \leq -1$ и $\bar{\theta} \leq -1$; аналогично стейнберговский модуль $\mathfrak{X}_2^{-}$ линейно порожден элементами $\{v|\mu_{+}\rangle, v|\mu_{-}\rangle\}$ для всякого однородного многочлена v нечетного порядка по $\theta \leq -1/2$ и $\bar{\theta} \leq -1/2$.

4.5. Эквивалентность Мориты и доказательство теоремы 1.4. Пусть $\mathbb{M}$ обозначает модуль

$$\mathbb{M} = M \oplus N_{+} \oplus N_{-}. \quad (4.9)$$

Как $\mathcal{W}(2)$ -модуль он разлагается в сумму *всех* проективных модулей $\mathfrak{P}_1^{+}$, $\mathfrak{P}_1^{-}$, $\mathfrak{X}_2^{+}$ и $\mathfrak{X}_2^{-}$ с кратностями, задаваемыми размерностями соответствующих квантово-групповых модулей:

$$\mathbb{M} = \mathfrak{P}_1^{+} \boxtimes \mathfrak{X}_1^{+} \oplus \mathfrak{P}_1^{-} \boxtimes \mathfrak{X}_1^{-} \oplus \mathfrak{X}_2^{+} \boxtimes \mathfrak{X}_2^{+} \oplus \mathfrak{X}_2^{-} \boxtimes \mathfrak{X}_2^{-}.$$

Как $\bar{\mathcal{U}}_{\mathfrak{q}}sl(2)$ -модуль $\mathbb{M}$ также разлагается в сумму *всех* проективных модулей, с “кратностями”, даваемыми $\mathcal{W}(2)$ -модулями:

$$\mathbb{M} = \mathfrak{X}_1^{+} \boxtimes \mathfrak{P}_1^{+} \oplus \mathfrak{X}_1^{-} \boxtimes \mathfrak{P}_1^{-} \oplus \mathfrak{X}_2^{+} \boxtimes \mathfrak{X}_2^{+} \oplus \mathfrak{X}_2^{-} \boxtimes \mathfrak{X}_2^{-}.$$

Тот факт, что $\mathbb{M}$ является одновременно и $\mathcal{W}(2)$ -модулем, и $\bar{\mathcal{U}}_{\mathfrak{q}}sl(2)$ -модулем и разлагается по проективным модулям в каждом случае, позволяет стандартным образом установить эквивалентность категорий представлений. Построим прежде всего функтор $\tilde{\mathcal{F}}: \mathfrak{C}_2 \rightarrow \mathfrak{C}_2$. Удобно сначала определить контравариантный функтор

$$\tilde{\mathcal{F}}(\mathcal{Y}) = \text{Hom}_{\bar{\mathcal{U}}_{\mathfrak{q}}sl(2)}(\mathbb{M}, \mathcal{Y}),$$

который дает $\mathcal{W}(2)$ -модуль для всякого $\overline{\mathcal{U}}_q sl(2)$ -модуля $\mathcal{Y}$, а далее взять его композицию с функтором $\mathbf{C}: \mathfrak{C}_2 \rightarrow \mathfrak{C}_2$, который заменяет каждый $\mathcal{W}(2)$ -модуль на его контрагредидентный. Таким образом, $\overline{\mathcal{F}} = \mathbf{C}\tilde{\mathcal{F}}: \mathfrak{C}_2 \rightarrow \mathfrak{C}_2$ является ковариантным функтором.

Аналогично построим функтор $\mathcal{F}: \mathfrak{C}_2 \rightarrow \mathfrak{C}_2$. Для любого $\mathcal{W}(2)$ -модуля $\mathfrak{X}$ полагаем

$$\mathcal{F}(\mathfrak{X}) = \mathcal{C} \operatorname{Hom}_{\mathcal{W}(2)}(\mathbb{M}, \mathfrak{X})$$

(что является $\overline{\mathcal{U}}_q sl(2)$ -модулем), где $\mathcal{C}: \mathfrak{C}_2 \rightarrow \mathfrak{C}_2$ – функтор взятия контрагредидентного модуля.

Функторы $\mathcal{F}$ и $\overline{\mathcal{F}}$ отправляют неприводимые представления в неприводимые, откуда немедленно следует, что

$$\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}} \sim \operatorname{Id}_{\mathfrak{C}_2}, \quad \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F} \sim \operatorname{Id}_{\mathfrak{C}_2}.$$

Естественная структура сплетения в конформной теории поля, определяемая манипуляциями с контурами в комплексной плоскости, совпадает со сплетением, определяемым квантово-групповой R -матрицей. Это иллюстрируется ниже на нескольких характерных примерах. Заметим сперва, что, как уже отмечалось во введении, квантовая группа $\overline{\mathcal{U}}_q sl(2)$ при $q = e^{i\pi/p}$ не является квазитреугольной, но является подалгеброй в большей квантовой группе, порожденной элементами E , F и k такими, что $k^2 = K$, которая является квазитреугольной [11]. При $p = 2$ универсальная R -матрица для этой большей квантовой группы принимает вид

$$R = \frac{1}{8} \sum_{n,m=0}^7 (i^{-nm/2} + 2i^{n-m-nm/2+1} E \otimes F) k^n \otimes k^m,$$

где выбрано, что $k = e^{+i\pi\varphi_0^+/2}$ соответствует матрице сплетения B^+ .

Ввиду справедливости равенств (4.6) определено действие R на вертексные операторы, что позволяет отождествить R с B^+ -матрицей. Рассматриваемую в этом качестве R -матрицу можно переписать в виде

$$R = \frac{1}{8} \sum_{n,m=0}^7 (i^{-nm/2} + 2\pi i^{n-m-nm/2+1} \theta_0 \otimes \bar{\theta}_0 e^{i\pi\varphi_0^+}) e^{i\pi n\varphi_0^+/2} \otimes e^{i\pi m\varphi_0^+/2}.$$

Отсюда получаем соотношения сплетения

$$\begin{aligned} A(z)B(w) &= RB(w)A(z) = \frac{1}{8} \sum_{n,m=0}^7 i^{-nm/2} e^{i\pi n\varphi_0^+/2} B(w) e^{i\pi m\varphi_0^+/2} A(z) - \\ &- \frac{1}{8} \sum_{n,m=0}^7 2\pi i^{-nm/2+1} e^{i\pi n\varphi_0^+/2} \theta_0 B(w) e^{i\pi(m+2)\varphi_0^+/2} \bar{\theta}_0 A(z) \end{aligned} \quad (4.10)$$

для любых двух полей $A(z)$ и $B(z)$, где z и w являются вещественными и $z > w$ (соотношения затем аналитически продолжаются с вещественной оси).

В частности, имеем

$$\theta(z)\bar{\theta}(w) = -\bar{\theta}(w)\theta(z) - 2i\pi, \quad \bar{\theta}(z)\theta(w) = -\theta(w)\bar{\theta}(z), \quad z > w. \quad (4.11)$$

Эти соотношения можно проиллюстрировать процедурой перестановки операторов в комплексной плоскости. В первом соотношении в (4.11) в φ^+ -картине (см. (4.3)), оператор $\theta(z)$ является нелокальным, $\theta(z) = \int^z du e^{-\varphi^+(u)}$, что можно представить контуром интегрирования из бесконечности в точку, где находится оператор:

Обнесение его по полуокружности (по часовой стрелке) вокруг w изменяет контур интегрирования, что приводит к появлению дополнительного слагаемого, равного $-2i\pi$. Такого слагаемого не возникает во втором соотношении в (4.11), что можно представить как

Аналогично для поля $\mathbb{L}(z) = \theta(z)\bar{\theta}(z)$, которое является логарифмическим партнером оператора **1**, из (4.10) следует, что

$$\mathbb{L}(z)\mathbb{L}(w) = \mathbb{L}(w)\mathbb{L}(z) - 2i\pi\theta(w)\bar{\theta}(z),$$

а для оператора твиста имеем

$$\begin{aligned} \mu_{\pm}(z)\mu_{\pm}(w) &= e^{i\pi/4}\mu_{\pm}(w)\mu_{\pm}(z), & \mu_{+}(z)\mu_{-}(w) &= e^{i\pi/4}\mu_{-}(w)\mu_{+}(z), \\ \mu_{-}(z)\mu_{+}(w) &= e^{i\pi/4}(\mu_{+}(w)\mu_{-}(z) + 2i\mu_{-}(w)\mu_{+}(z)). \end{aligned}$$

Ленточная структура $\bar{\mathcal{U}}_q s\ell(2)$ задается центральным элементом

$$\mathbf{v} = \frac{1-i}{2\sqrt{2}}((e^{i\pi/4} - 2e^{-i\pi/4}KFE)(\mathbf{1} + K^2) + (K + 2iFE)(\mathbf{1} - K^2)).$$

С учетом (4.6) получаем элемент

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{1-i}{2\sqrt{2}}((e^{i\pi/4} + 2\pi e^{i\pi(2\varphi_0^+ - 1/4)}\bar{\theta}_0\theta_0)(\mathbf{1} + e^{2i\pi\varphi_0^+}) + \\ &\quad + 2(\mathbf{1} - 2i\pi\bar{\theta}_0\theta_0)e^{i\pi\varphi_0^+}(\mathbf{1} - e^{2i\pi\varphi_0^+})), \end{aligned}$$

который действует на пространстве состояний как

$$\mathbf{v} = e^{2i\pi L_0}.$$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В силу эквивалентности Каждана–Люстига структура неразложимых модулей, изображенных в 1.6, одновременно описывает структуру неразложимых $\mathcal{W}(p)$ -модулей. Проективная резольвента (3.1) также применима к алгебре $\mathcal{W}(p)$, и ее можно поэтому использовать в конформной теории поля подобно известным резольвентам (фельдеровского типа) в рациональных конформных теориях поля.

В качестве применения найденной в 1.8 алгебры $\text{Ext}^\bullet$ заметим следующее. Для подкатегории $\mathcal{C}_p(s)$ в категории $\mathcal{C}_p$ (рассматриваемой либо как категория $\mathcal{W}(p)$ -представлений, либо как категория $\bar{\mathcal{U}}_q \mathfrak{sl}(2)$ -представлений), ее производная категория эквивалентна производной категории когерентных пучков на некотором некоммутативном расширении $\mathbb{CP}^1$ [24]. Алгебра $\text{Ext}^\bullet$ является координатным кольцом этого некоммутативного расширения.

Кроме установления эквивалентности категорий, построенный в (4.9) бимодуль $\mathbb{M}$ имеет и другое применение: этот бимодуль можно использовать при построении *полной* конформной теории поля [3], [4], [25]. Имея $\mathbb{M}$ (модуль над квантовой группой и над алгеброй $\mathcal{W}(p)$ в голоморфном секторе) и его второй экземпляр $\bar{\mathbb{M}}$, где действие алгебры $\mathcal{W}(p)$ заменено ее действием в антиголоморфном секторе, можно стандартным образом построить полную конформную теорию путем взятия тензорного произведения $\mathbb{M} \otimes_{\mathfrak{G}} \bar{\mathbb{M}}$ над квантовой группой $\mathfrak{G} = \bar{\mathcal{U}}_q \mathfrak{sl}(2)$. Другие возможности состоят в том, чтобы взять $\mathbb{M} \otimes_{\mathfrak{G}} N \otimes_{\mathfrak{G}} \bar{\mathbb{M}}$, где N – любой $\mathfrak{G}$ -бимодуль с ассоциативным произведением $N \otimes N \rightarrow N$, согласованным со структурой бимодуля. Бимодуль $\mathbb{M}$ можно также использовать для получения пространства, двойственного к центру квантовой группы, – пространства “расширенных характеров” в логарифмических конформных моделях. “Расширенные характеры” можно получать взятием следа оператора $e^{2i\pi\tau L_0}$ по бимодулю $\mathbb{M}$ (по компоненте, отвечающей вертекс-операторной алгебре), что должно давать версию общей конструкции из [7].

ПРИЛОЖЕНИЕ А

$\bar{\mathcal{U}}_q \mathfrak{sl}(2)$ -модули

А.1. Модули $\mathcal{W}_s^\pm(2)$, $\mathcal{M}_s^\pm(2)$ и $\mathcal{O}_s^\pm(1, z)$.

А.1.1. Модуль $\mathcal{W}_s^\pm(2)$. Пусть s – целое, $1 \leq s \leq p-1$, и $a = \pm$. Модуль $\mathcal{W}_s^a(2)$ (см. 1.6) имеет три подфактора: $\mathcal{X}_s^a$ (“левый”), $\mathcal{X}_{p-s}^{-a}$ (“нижний”) и $\mathcal{X}_s^a$ (“правый”). Базис можно выбрать как

$$\{\mathbf{a}_n, \mathbf{b}_n\}_{0 \leq n \leq s-1} \cup \{\mathbf{x}_k\}_{0 \leq k \leq p-s-1},$$

где $\{\mathbf{a}_n\}_{0 \leq n \leq s-1}$ – базис, соответствующий правому модулю $\mathcal{X}_s^a$, $\{\mathbf{b}_n\}_{0 \leq n \leq s-1}$ – левому модулю $\mathcal{X}_s^a$, а $\{\mathbf{x}_k\}_{0 \leq k \leq p-s-1}$ – нижнему модулю $\mathcal{X}_{p-s}^{-a}$, причем $\bar{\mathcal{U}}_q \mathfrak{sl}(2)$ -

действие задается формулами

$$\begin{aligned} K\mathbf{a}_n &= aq^{s-1-2n}\mathbf{a}_n, & K\mathbf{b}_n &= aq^{s-1-2n}\mathbf{b}_n, & 0 \leq n \leq s-1, \\ K\mathbf{x}_k &= -aq^{p-s-1-2k}\mathbf{x}_k, & 0 \leq k \leq p-s-1, \\ E\mathbf{x}_k &= -a[k][p-s-k]\mathbf{x}_{k-1}, & 0 \leq k \leq p-s-1 & \quad (\mathbf{x}_{-1} \equiv 0), \\ E\mathbf{a}_n &= \begin{cases} a[n][s-n]\mathbf{a}_{n-1}, & 1 \leq n \leq s-1, \\ \mathbf{x}_{p-s-1}, & n = 0, \end{cases} \\ E\mathbf{b}_n &= a[n][s-n]\mathbf{b}_{n-1}, & 0 \leq n \leq s-1 & \quad (\mathbf{b}_{-1} \equiv 0), \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} F\mathbf{a}_n &= \mathbf{a}_{n+1}, & 0 \leq n \leq s-1 & \quad (\mathbf{a}_s \equiv 0), \\ F\mathbf{b}_n &= \begin{cases} \mathbf{b}_{n+1}, & 0 \leq n \leq s-2, \\ \mathbf{x}_0, & n = s-1, \end{cases} \\ F\mathbf{x}_k &= \mathbf{x}_{k+1}, & 0 \leq k \leq p-s-1 & \quad (\mathbf{x}_{p-s} \equiv 0). \end{aligned}$$

А.1.2. Модуль $\mathcal{M}_s^\pm(2)$. Пусть s – целое, $1 \leq s \leq p-1$, и $a = \pm$. Модуль $\mathcal{M}_s^a(2)$, являющийся расширением

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{X}_s^+ & \\ & \bullet & \\ x_1^+ \swarrow & & \searrow x_2^+ \\ \mathcal{X}_{p-s}^- & & \mathcal{X}_{p-s}^- \\ \bullet & & \bullet \end{array}, \quad (\text{A.1})$$

имеет базис

$$\{\mathbf{a}_n\}_{0 \leq n \leq s-1} \cup \{\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k\}_{0 \leq k \leq p-s-1},$$

где базис $\{\mathbf{a}_n\}_{0 \leq n \leq s-1}$ соответствует верхнему модулю $\mathcal{X}_s^a$ в (A.1), базис $\{\mathbf{x}_k\}_{0 \leq k \leq p-s-1}$ – левому $\mathcal{X}_{p-s}^{-a}$, а базис $\{\mathbf{y}_k\}_{0 \leq k \leq p-s-1}$ – правому $\mathcal{X}_{p-s}^{-a}$, причем $\bar{\mathcal{U}}_q sl(2)$ -действие задается формулами

$$\begin{aligned} K\mathbf{a}_n &= aq^{s-1-2n}\mathbf{a}_n, & 0 \leq n \leq s-1, \\ K\mathbf{x}_k &= -aq^{p-s-1-2k}\mathbf{x}_k, & Ky_k &= -aq^{p-s-1-2k}\mathbf{y}_k, & 0 \leq k \leq p-s-1, \\ E\mathbf{x}_k &= -a[k][p-s-k]\mathbf{x}_{k-1}, \\ E\mathbf{y}_k &= -a[k][p-s-k]\mathbf{y}_{k-1}, & 0 \leq k \leq p-s-1 & \quad (\mathbf{x}_{-1} \equiv \mathbf{y}_{-1} \equiv 0), \\ E\mathbf{a}_n &= \begin{cases} a[n][s-n]\mathbf{a}_{n-1}, & 1 \leq n \leq s-1, \\ \mathbf{x}_{p-s-1}, & n = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} F\mathbf{x}_k &= \mathbf{x}_{k+1}, & F\mathbf{y}_k &= \mathbf{y}_{k+1}, & 0 \leq k \leq p-s-1 & \quad (\mathbf{x}_{p-s} \equiv \mathbf{y}_{p-s} \equiv 0), \\ F\mathbf{a}_n &= \begin{cases} \mathbf{a}_{n+1}, & 0 \leq n \leq s-2, \\ \mathbf{y}_0, & n = s-1. \end{cases} \end{aligned}$$

А.1.3. Модуль $\mathcal{O}_s^\pm(1, z)$. Пусть s – целое, $1 \leq s \leq p-1$, $a = \pm$ и $z = z_1 : z_2$. При $n = 1$ диаграмма $\mathcal{O}_s^a(1, z)$ модуля из 1.6 принимает вид

В терминах соответствующих базисов $\{a_n\}_{0 \leq n \leq s-1}$ и $\{x_k\}_{0 \leq k \leq p-s-1}$ в $\mathcal{X}_s^a$ и $\mathcal{X}_{p-s}^{-a}$, модуль $\mathcal{O}_s^a(1, z)$ имеет базис

$$\{a_n\}_{0 \leq n \leq s-1} \cup \{x_k\}_{0 \leq k \leq p-s-1}, \quad (\text{A.2})$$

причем $\overline{\mathcal{U}}_q \mathfrak{sl}(2)$ -действие задается формулами

$$K a_n = a q^{s-1-2n} a_n, \quad K x_k = -a q^{p-s-1-2k} x_k, \quad 0 \leq n \leq s-1, \quad 0 \leq k \leq p-s-1,$$

$$E a_n = \begin{cases} a[n][s-n] a_{n-1}, & 1 \leq n \leq s-1, \\ z_2 x_{p-s-1}, & n = 0, \end{cases}$$

$$E x_k = -a[k][p-s-k] x_{k-1}, \quad 0 \leq k \leq p-s-1,$$

где мы полагаем $x_{-1} = 0$, и

$$F a_n = \begin{cases} a_{n+1}, & 0 \leq n \leq s-2, \\ z_1 x_0, & n = s-1, \end{cases}$$

$$F x_k = x_{k+1}, \quad 0 \leq k \leq p-s-1,$$

где мы полагаем $x_{p-s} = 0$. Тот факт, что тем самым определяется $\overline{\mathcal{U}}_q \mathfrak{sl}(2)$ -модуль, проверяется прямым вычислением.

А.2. Проективные модули $\mathcal{P}_s^\pm$. Пусть s – целое, $1 \leq s \leq p-1$, и $a = \pm$. Проективный модуль $\mathcal{P}_s^a$ имеет базис

$$\{a_n, b_n\}_{0 \leq n \leq s-1} \cup \{x_k, y_k\}_{0 \leq k \leq p-s-1},$$

где базис $\{b_n\}_{0 \leq n \leq s-1}$ соответствует верхнему модулю $\mathcal{X}_s^a$ в (1.2), базис $\{a_n\}_{0 \leq n \leq s-1}$ – нижнему $\mathcal{X}_s^a$, базис $\{x_k\}_{0 \leq k \leq p-s-1}$ – правому $\mathcal{X}_{p-s}^{-a}$, а базис $\{y_k\}_{0 \leq k \leq p-s-1}$ – левому модулю $\mathcal{X}_{p-s}^{-a}$, причем $\overline{\mathcal{U}}_q \mathfrak{sl}(2)$ -действие задается как

$$K x_k = -a q^{p-s-1-2k} x_k, \quad K y_k = -a q^{p-s-1-2k} y_k, \quad 0 \leq k \leq p-s-1,$$

$$K a_n = a q^{s-1-2n} a_n, \quad K b_n = a q^{s-1-2n} b_n, \quad 0 \leq n \leq s-1,$$

$$E x_k = -a[k][p-s-k] x_{k-1}, \quad 0 \leq k \leq p-s-1 \quad (x_{-1} \equiv 0),$$

$$E y_k = \begin{cases} -a[k][p-s-k] y_{k-1}, & 1 \leq k \leq p-s-1, \\ a_{s-1}, & k = 0, \end{cases}$$

$$E a_n = a[n][s-n] a_{n-1}, \quad 0 \leq n \leq s-1 \quad (a_{-1} \equiv 0),$$

$$E b_n = \begin{cases} a[n][s-n] b_{n-1} + a_{n-1}, & 1 \leq n \leq s-1, \\ x_{p-s-1}, & n = 0, \end{cases}$$

и

$$\begin{aligned}
 Fx_k &= \begin{cases} x_{k+1}, & 0 \leq k \leq p-s-2, \\ a_0, & k = p-s-1, \end{cases} \\
 Fy_k &= y_{k+1}, \quad 0 \leq k \leq p-s-1 \quad (y_{p-s} \equiv 0), \\
 Fa_n &= a_{n+1}, \quad 0 \leq n \leq s-1 \quad (a_s \equiv 0), \\
 Fb_n &= \begin{cases} b_{n+1}, & 0 \leq n \leq s-2, \\ y_0, & n = s-1. \end{cases}
 \end{aligned}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Колчан Кронекера

Напомним основные понятия, относящиеся к колчанам [13], [20].

Б.1. Колчаны и их представления. Колчан Q – это ориентированный граф, т.е. четверка $Q = (I, A, s, t)$, состоящая из конечного набора I вершин, конечного набора A ориентированных ребер (стрелок) и двух отображений s и t из A в I . Ориентированное ребро $a \in A$ начинается в вершине $s(a)$ и заканчивается в $t(a)$.

Представление колчана Q (над $\mathbb{C}$) – это набор конечномерных векторных пространств V_i над $\mathbb{C}$, по одному для каждой вершины $i \in I$, и $\mathbb{C}$ -линейных отображений $r_{ij}: V_i \rightarrow V_j$, по одному для каждого ориентированного ребра $\bullet \xrightarrow{a} \bullet$. *Размерность* представления ρ колчана Q есть элемент из $\mathbb{Z}[I]$, определяемый размерностями V_i , $i \in I$: $\dim(\rho) = \sum_{i \in I} \dim_{\mathbb{C}}(V_i) i$.

Морфизм из представления ρ колчана Q в другое его представление ρ' есть I -градуированное $\mathbb{C}$ -линейное отображение $\phi = \bigoplus_{i \in I} \phi_i: \bigoplus_{i \in I} V_i \rightarrow \bigoplus_{i \in I} V'_i$, удовлетворяющее свойству $r'_{ij} \phi_i = \phi_j r_{ij}$ для каждого ориентированного ребра $\bullet \xrightarrow{a} \bullet$. Это дает категорию представлений колчана Q , обозначаемую далее $\text{Rep}(Q)$.

Если в колчане Q нет ориентированных циклов, то классы изоморфизмов простых объектов в $\text{Rep}(Q)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с вершинами колчана Q . Простой объект, соответствующий вершине $i \in I$, задается векторными пространствами

$$V_j = \begin{cases} \mathbb{C} & \text{при } j = i, \\ 0 & \text{в других случаях} \end{cases}$$

и $\mathbb{C}$ -линейными отображениями

$$r_{ij} = 0 \quad \text{для всех } i, j \in I.$$

Говорят, что колчан имеет *конечный* тип, если лежащий в его основе неориентированный граф есть граф Дынкина конечного типа. Аналогично, колчан имеет *аффинный* тип, если этот неориентированный граф есть граф Дынкина аффинного типа. Говорят, что колчан имеет *однократные связи*, если в нем нет пар вершин, соединенных более чем одной стрелкой.

Б.2. Категория $\text{Rep}(\mathbf{K})$ представлений колчана Кронекера. В колчане Кронекера $\mathbf{K}$ присутствуют две вершины, связанные двумя сонаправленными ребрами; другими словами, $\mathbf{K} = (\{0, 1\}, \{f, g\}, s, t)$, где $s(f) = s(g) = 0$ и $t(f) = t(g) = 1$:

Представлением ρ колчана $\mathbf{K}$ является четверка $((V_0, V_1), (r_{01}, \bar{r}_{01}))$, состоящая из двух $\mathbb{C}$ -линейных пространств V_0 и V_1 и двух линейных отображений $r_{01}, \bar{r}_{01} \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V_0, V_1)$. Размерность представления ρ есть $\dim(\rho) = (\dim_{\mathbb{C}}(V_0), \dim_{\mathbb{C}}(V_1))$. Простые объекты в категории $\text{Rep}(\mathbf{K})$ задаются двумя представлениями $\rho_0 = ((\mathbb{C}, 0), (0, 0))$ и $\bar{\rho}_0 = ((0, \mathbb{C}), (0, 0))$. Напомним классификацию неразложимых представлений колчана Кронекера $\mathbf{K}$, суммированную ниже в Б.2.1.

Имеется соответствие между неразложимыми представлениями колчана и множеством Δ_+ положительных корней алгебры Ли, соответствующей графу Дынкина, связанному с колчаном. Это соответствие является взаимно однозначным для колчанов конечного типа с однократными связями [26]. А именно, представление ρ колчана Q неразложимо, если и только если $\dim(\rho) \in \Delta_+$, и, обратно, для каждого $\alpha \in \Delta_+$, имеется с точностью до изоморфизма единственное неразложимое представление ρ колчана Q такое, что $\dim(\rho) = \alpha$.

Для колчанов аффинного типа биекция между классами изоморфизмов неразложимых представлений и положительными корнями соответствующей аффинной алгебры Ли имеет место только для положительных вещественных корней $\alpha \in \Delta_+^{\text{re}}$ [27]. Для всякого положительного мнимого корня $\alpha \in \Delta_+^{\text{im}}$ существует несчетное множество Ind_{α} неизоморфных неразложимых представлений, соответствующих α . В действительности множество Ind_{α} не зависит от $\alpha \in \Delta_+^{\text{im}}$ [28]. Если $\alpha \in \mathbb{Z}[I]$ не лежит в Δ_+ , то множество неразложимых представлений размерности α пусто.

Неориентированный граф, связанный с колчаном Кронекера $\mathbf{K}$, есть расширенный граф Дынкина $A_1^{(1)}$. Как известно, $\alpha \in \Delta_+$ является положительным вещественным корнем для $A_1^{(1)}$, если $\alpha = (n+1, n)$ или $\alpha = (n, n+1)$, и $\alpha \in \Delta_+$ является положительным мнимым корнем, если $\alpha = (n+1, n+1)$, где $n \in \mathbb{Z}_+$. В частности, $\alpha_0 = (1, 0)$ и $\bar{\alpha}_0 = (0, 1)$ – простые корни, а $\delta = (1, 1)$ – первый мнимый корень. Простые корни α_0 и $\bar{\alpha}_0$ отвечают соответствующим простым объектам $\rho_0 = ((\mathbb{C}, 0), (0, 0))$ и $\bar{\rho}_0 = ((0, \mathbb{C}), (0, 0))$ в категории $\text{Rep}(\mathbf{K})$. Остальные вещественные корни находятся во взаимно однозначном соответствии с неразложимыми представлениями $\rho_n = ((\mathbb{C}^{n+1}, \mathbb{C}^n), (R, \bar{R}))$ и $\bar{\rho}_n = ((\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^{n+1}), (R^t, \bar{R}^t))$, где R и $\bar{R}$ – прямоугольные матрицы,

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Первый мнимый корень δ соответствует семейству Ind_δ неразложимых представлений $((\mathbb{C}, \mathbb{C}), (r_{01}, \bar{r}_{01}))$ для некоторых $r_{01}, \bar{r}_{01} \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, параметризованных точками из $\mathbb{CP}^1$. Но для положительного мнимого корня α множество Ind_α не зависит от α , а потому $\text{Ind}_\alpha = \mathbb{CP}^1$ для любого мнимого корня α . Сводкой этих результатов является следующее хорошо известное предложение (см., например, [29]), впервые полученное в [30].

Б.2.1. Предложение.

1. Если $\alpha \notin \Delta_+$, то множество неразложимых представлений колчана $\mathbf{K}$ размерности α пусто.
2. Если $\alpha \in \Delta_+^{\text{re}}$, то неразложимое представление колчана $\mathbf{K}$ размерности α есть либо представление ρ_n , если $\alpha = (n+1, n)$, либо представление $\bar{\rho}_n$, если $\alpha = (n, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}_+$.
3. Если $\alpha \in \Delta_+^{\text{im}}$, то $\text{Ind}_\alpha = \mathbb{CP}^1$ и неразложимые представления имеют размерность $(n+1, n+1)$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}_+$.

Благодарности. Авторы благодарны С. Арики, Т. Миве и И. Тютину за полезные замечания, а также Ю. Фуксу за ценные обсуждения и литературные указания. Часть данной работы была написана во время пребывания авторов в университете Киото, и они благодарят Т. Миву за теплое гостеприимство. Данная работа была частично поддержана РФФИ (гранты № 04-01-00303, 05-02-17451) и Программой поддержки ведущих научных школ (грант № 1578.2003.2), а также РФФИ–ЯОПН (грант № 05-01-02934ЯФ_a).

Список литературы

- [1] D. Kazhdan, G. Lusztig, *J. Amer. Math. Soc.*, **6** (1993), 905; 949; **7** (1994), 335; 383.
- [2] M. Finkelberg, *Geom. and Funct. Anal.*, **6** (1996), 249; V. G. Turaev, *Quantum Invariants of Knots and 3-Manifolds*, Walter de Gruyter, Berlin–New York, 1994.
- [3] G. Moore, N. Seiberg, “Lectures on RCFT”, *Superstrings 89*, Proc. Spring School (Trieste, Italy, April 3–14, 1989), eds. M. Green, R. Iengo, S. Randjbar-Daemi, E. Sezgin, A. Strominger, World Scientific, Singapore, 1990, 263.
- [4] J. Fuchs, I. Runkel, C. Schweigert, *Nucl. Phys. B*, **646** (2002), 353; [hep-th/0204148](#).
- [5] E. Frenkel, D. Ben-Zvi, *Vertex Algebras and Algebraic Curves*, Math. Surv. Monographs, **28**, AMS, Providence, RI, 2001; B. Bakalov, A. A. Kirillov, *Lectures on Tensor Categories and Modular Functors*, AMS, Providence, RI, 2001; J. Fuchs, I. Runkel, C. Schweigert, *Nucl. Phys. B*, **678** (2004), 511; [hep-th/0306164](#).
- [6] J. Fuchs, I. Runkel, C. Schweigert, *Ribbon categories and (unoriented) CFT: Frobenius algebras, automorphisms, reversions*, [math.CT/0511590](#).
- [7] M. Miyamoto, *A theory of tensor products for vertex operator algebra satisfying C_2 -cofiniteness*, [math.QA/0309350](#).
- [8] Y.-Z. Huang, J. Lepowsky, L. Zhang, *A logarithmic generalization of tensor product theory for modules for a vertex operator algebra*, [math.QA/0311235](#).
- [9] J. Fuchs, *On non-semisimple fusion rules and tensor categories*, [hep-th/0602051](#).
- [10] H. G. Kausch, *Phys. Lett. B*, **259** (1991), 448.
- [11] B. L. Feigin, A. M. Gainutdinov, A. M. Semikhatov, I. Yu. Tipunin, *Commun. Math. Phys.*, **265** (2006), 47; [hep-th/0504093](#).
- [12] J. Fuchs, S. Hwang, A. M. Semikhatov, I. Yu. Tipunin, *Commun. Math. Phys.*, **247** (2004), 713; [hep-th/0306274](#).

- [13] M. Auslander, I. Reiten, S.O. Smalø, *Representation Theory of Artin Algebras*, Cambridge Studies Adv. Math., **36**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
- [14] M. A. I. Flohr, *Int. J. Mod. Phys. A*, **11** (1996), 4147; [hep-th/9509166](#).
- [15] T. Kerler, V. V. Lyubashenko, *Non-Semisimple Topological Quantum Field Theories for 3-Manifolds with Corners*, Lect. Notes in Math., **1765**, Springer, Berlin, 2001.
- [16] M. Flohr, M. R. Gaberdiel, *J. Phys. A*, **39** (2006), 1955; [hep-th/0509075](#).
- [17] V. Lyubashenko, *Commun. Math. Phys.*, **172** (1995), 467; [hep-th/9405167](#); “Modular properties of ribbon abelian categories”, *Proc. 2nd Gauss Symposium. Conference A: Mathematical and Theoretical Physics* (Münich, Germany, August 2–7, 1993), eds. M. Behara, R. Fritish, R. G. Lintz, de Gruyter, Berlin, 1995, 529; [hep-th/9405168](#); *J. Pure Applied Algebra*, **98** (1995), 279; V. Lyubashenko, S. Majid, *J. Algebra*, **166** (1994), 506.
- [18] M. R. Gaberdiel, H. G. Kausch, *Nucl. Phys. B*, **477** (1996), 293; [hep-th/9604026](#).
- [19] S. MacLane, *Homology*, Springer, Berlin, 1963.
- [20] W. Crawley-Boevey, *Lectures on representations of quivers*, Lectures in Oxford in 1992, available at <http://www.amsta.leeds.ac.uk/~pmtwc/>.
- [21] H. G. Kausch, *Nucl. Phys. B*, **583** (2000), 513; [hep-th/0003029](#).
- [22] M. R. Gaberdiel, H. G. Kausch, *Phys. Lett. B*, **386** (1996), 131; [hep-th/9606050](#).
- [23] H. G. Kausch, *Curiosities at $c = -2$* , [hep-th/9510149](#).
- [24] S. Arkhipov, R. Bezrukavnikov, V. Ginzburg, *J. Am. Math. Soc.*, **17** (2004), 595; [math.RT/0304173](#).
- [25] Y.-Z. Huang, L. Kong, *Full field algebras*, [math.QA/0511328](#).
- [26] P. Gabriel, *Manuscripta Math.*, **6** (1972), 71; *correction*, *ibid.*, **6** (1972), 309; И. Н. Бернштейн, И. М. Гельфанд, В. А. Пономарев, *УМН*, **28:2(170)** (1973), 19.
- [27] Л. А. Назарова, *Изв. АН СССР, сер. матем.*, **37** (1973), 752; P. Donovan, M. R. Freislich, *The representation theory of finite graphs and associated algebras*, Carleton Math. Lect. Notes, No. 5, Ottawa, Ont., Canada, Carleton University, 1973.
- [28] V. Dlab, C. M. Ringel, *Mem. Am. Math. Soc.*, **173** (1976), 1.
- [29] I. Frenkel, A. Malkin, M. Vybornov, *Affine Lie algebras and tame quivers*, [math.RT/0005119](#).
- [30] L. Kronecker, *Sitzungsber. Akad. Berlin*, **1890** (1890), 1225.

Поступила в редакцию 31.12.2005