Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Маслов, Бозе-газ ангармонических осцилляторов
и уточнение закона Ципфа, *ТМФ*, 2006, том 148, номер 3, 495–496

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf2328>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 13:19:52

© 2006 г.

В. П. Маслов*

БОЗЕ-ГАЗ АНГАРМОНИЧЕСКИХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ И УТОЧНЕНИЕ ЗАКОНА ЦИПФА

Приводится логарифмический закон, в пределе переходящий в закон Ципфа.

Ключевые слова: закон Ципфа, бозе-газ.

Будем нумеровать частицы в газе Бозе–Эйнштейна в любом порядке на данном уровне, начиная от нижнего уровня. Тогда номер первой частицы N_k на уровне λ_k равен числу частиц, лежащих на всех предыдущих уровнях энергии:

$$N_k = \sum_{i=0}^k n_i = \sum_{i=0}^k \frac{1}{1 - e^{-\beta\lambda_i + \sigma}}.$$

Если $\lambda_i = i$, $k \gg 1$, $\beta \ll 1$, $\sigma \ll \beta$, то с точностью до β^3

$$N_k \sim \sum_{i=1}^k \frac{1}{\beta i + \beta^2 i^2} \sim \frac{1}{\beta} \int_0^k \frac{dx}{x + \beta x^2} = \frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{\lambda_k}{1 + \beta \lambda_k} \right).$$

Так как параметр β мал, то эту формулу (см. (6) в работе [1]), вообще говоря, нельзя применить для больших k . Но если осциллятор ангармоничен [2], то эта формула справедлива и для больших λ_k (при $\lambda_k = k$). Именно,

$$N_k = \frac{1}{\beta} \ln \frac{\lambda_k}{1 + \alpha \lambda_k},$$

где α порядка единицы.

Пусть N – число всех частиц, λ_s – самый высокий уровень, на котором есть частицы, т.е. на уровнях $\lambda_i > \lambda_s$ частиц нет. Если частицы пронумеровать от частицы, находящейся на уровне λ_s [3], $\lambda_s \gg 1$, то номер частицы (ранг) r будет равен $r_k = N - N_k$ – числу частиц на уровнях $\lambda_i \geq \lambda_k$. Вместе с тем

$$N = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta} \ln \frac{\lambda_k}{1 + \alpha \lambda_k} = \frac{1}{\beta} \ln \frac{1}{\alpha}.$$

Следовательно,

$$r_k = \frac{1}{\beta} \ln \left(1 + \frac{1}{\alpha \lambda_k} \right). \quad (1)$$

*Московский государственный университет, Москва, Россия. E-mail: v.p.maslov@mail.ru

Отметим, что если мы будем пропускать все те уровни, на которых нет частиц, оставляя только уровни λ'_k , на которых есть хотя бы одна частица, то формула (1) не изменится (ср. [3]). Тогда (1) будет соответствовать ранговому распределению типа распределения Ципфа.

В ранговых распределениях участвуют только целые числа – ранг (номер) r объекта и число встречаемости ω_r объекта: задается ранг и ему сопоставляется число встречаемости. Если разность между ближайшими числами встречаемости ω_l и ω_{l+1} больше единицы, то говорят, что имеется лакуна с $(\omega_l - \omega_{l+1} - 1)$ точками. Мы получаем ранговые распределения из обобщенного распределения типа Бозе–Эйнштейна для частиц [4], сопоставив частицам объекты более общего типа (например, слова в частотном словаре) и учитывая, что сумма всех частиц на уровнях $\lambda_i > \lambda_l$ есть ранг, отвечающий λ_l .

Это соотношение $\lambda_i = i + \gamma i^2$ (ангармоничность) получится, если мы сделаем дополнительное предположение относительно N_i : $N_{i+1} > N_i$ (предпочтение) в условиях теорем, приведенных в работах [4]–[6]. Полагая $\bar{\lambda}_i = \lambda_{i+1} - \lambda_i$, получим

$$\sum_{i=0}^s \bar{\lambda}_i N_i \equiv N_s \lambda_s - \sum_{i=0}^s n_i \lambda_i = \text{const},$$

а значит,

$$\lambda_j = \sum_{i=0}^j \bar{\lambda}_i, \quad N_k = \sum_{i=0}^k \frac{\text{const}}{1 - e^{-\beta \sum_{j=0}^i \bar{\lambda}_j}}. \quad (2)$$

Поэтому, если $\bar{\lambda}_j = j$, то $\sum_{j=0}^i \bar{\lambda}_j = (i^2 + i)/2$.

В более общем случае аналогично предыдущему получаем [5], [6]

$$r = \frac{T}{\alpha \gamma} \ln \left(1 + \frac{1}{\alpha \omega^\gamma} \right),$$

где ω – частота встречаемости объекта ранга r . При $\omega \rightarrow \infty$ имеется зависимость $r \sim T/(\gamma \alpha \omega^\gamma)$ (закон Ципфа [7]). Значит, в случае, когда $T \gg 1$, параметр γ может быть определен как $1/D$, где D – размерность, вычисленная из закона Ципфа, $T/(\gamma \alpha)$ – префактор [7]. Отсюда получаем

$$\omega = \left(\frac{1}{e^{\alpha \gamma r/T} - 1} \right)^D.$$

Эта формула, как сказано в аннотации к книге [6], есть “квантовое продолжение законов Ципфа–Мандельброта и Парето для распределения капиталов”.

Список литературы

- [1] В. П. Маслов, *Матем. заметки*, **80:2** (2006), 220–230.
- [2] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Физматгиз, М., 1963.
- [3] В. П. Маслов, *ТМФ*, **147:3** (2006), 511–512.
- [4] V. P. Maslov, *Russ. J. Math. Phys.*, **12:4** (2005), 483–488.
- [5] V. P. Maslov, *Russ. J. Math. Phys.*, **13:3** (2006), 315–325.
- [6] В. П. Маслов, *Квантовая экономика*, Наука, М., 2005.
- [7] Б. Мандельброт, *Фрактальная геометрия природы*, Институт компьютерных исследований, М., 2002.

Поступила в редакцию 3.08.2006