Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Ю. Шведов, Метод комплексного роста Маслова для систем со связями первого рода, *ТМФ*, 2003, том 136, номер 3, 418–435

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf233>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 18:21:37

© 2003 г.

О. Ю. Шведов*

МЕТОД КОМПЛЕКСНОГО РОСТКА МАСЛОВА ДЛЯ СИСТЕМ СО СВЯЗЯМИ ПЕРВОГО РОДА

Развивается квазиклассическая механика систем со связями первого рода. Удобным способом квантования оказывается метод, основанный на модификации скалярного произведения теории. Рассматриваются квазиклассические состояния типа волновых пакетов (с малыми неопределенностями как координат, так и импульсов), возникающие в теории комплексного роста Маслова в точке. Показано, что эти состояния имеют ненулевую норму, если только классические координаты и импульсы лежат на поверхности связи. Множество квазиклассических состояний типа волновых пакетов образует (“квазиклассическое”) расслоение, базой которого является множество допустимых классических состояний, а слоями – пространства функций, задающих форму волнового пакета. В ряде случаев разность двух квазиклассических состояний имеет нулевую норму, поэтому можно ввести отношение калибровочной эквивалентности. Квазиклассические калибровочные преобразования, являющиеся автоморфизмами квазиклассического расслоения, образуют квазигруппу Баталина. Изучено также действие квазиклассических наблюдаемых величин и квазиклассических преобразований эволюции: показано, что они сохраняют норму, отношение калибровочной эквивалентности; что наблюдаемые, совпадающие на поверхности связи, действуют на квазиклассические состояния одинаково с точностью до калибровочной инвариантности.

Ключевые слова: квазиклассическое приближение, системы со связями, комплексный рост Маслова.

1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из наиболее распространенных асимптотических методов квантовой механики и теории поля является квазиклассическое приближение. Известны разновидности этого подхода, основанные на усреднении гейзенберговских уравнений движения, приближенном вычислении функциональных интегралов. Однако более удобными для математического обоснования являются методы [1]–[3], базирующиеся на непосредственной подстановке волновой функции в уравнение эволюции, которое предполагается зависящим от малого параметра $\hbar$ как

$$i\hbar \frac{\partial \Psi^t}{\partial t} = H\left(X, -i\hbar \frac{\partial}{\partial X}\right) \Psi^t, \quad X \in \mathbb{R}^n, \quad (1.1)$$

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия. E-mail: shvedov@qs.phys.msu.su

или

$$i \frac{\partial \Psi^t}{\partial t} = \frac{1}{h} H(\sqrt{h} \hat{q}, \sqrt{h} \hat{p}) \Psi^t, \quad (1.2)$$

где $\hat{p}_j = -i\partial/\partial q_j$, $\hat{q}_j = q_j$; $[\hat{p}_j, \hat{q}_l] = -i\delta_{jl}$. Для определенности будем использовать вейлевское упорядочение операторов $\hat{q}_j$ и $\hat{p}_j$ [4].

Уравнения (1.1) и (1.2) связаны заменой $X = \sqrt{h}q$. Запись типа (1.2) принята в квантовой теории поля [5].

Хотя в физической литературе [6] понятие “квазиклассическое приближение” часто отождествляют с ВКБ-методом, заключающимся в подстановке волновой функции

$$\Psi^t(q) = c^h \varphi^t(q\sqrt{h}) \exp \left[\frac{i}{h} S^t(q\sqrt{h}) \right] \quad (1.3)$$

(c^h – нормировочный множитель, $S^t(X)$ – вещественная функция, $\varphi^t(X)$ – комплексная функция) в уравнение (1.2), в настоящее время известно также и много других функций, приближенно удовлетворяющих уравнению (1.2) при $h \rightarrow 0$. Так, в теории комплексного ростка Маслова в точке [2], [3], [7] рассматривается другая подстановка – типа волнового пакета

$$\Psi^t(q) = e^{iS^t/h} e^{iP^t(q\sqrt{h}-Q^t)/h} f^t \left(q - \frac{Q^t}{\sqrt{h}} \right), \quad (1.4)$$

которая приближенно удовлетворяет уравнению (1.2), если $(P^t, Q^t) \in \mathbb{R}^{2n}$ – решение системы Гамильтона, $S^t \in \mathbb{R}$ – действие на классической траектории. Функция $f^t \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, задающая форму волнового пакета, удовлетворяет уравнению Шредингера с квадратичным гамильтонианом.

Отметим, что приближенные решения типа волновых пакетов (1.4) (называемые в литературе [8] также квазиклассическими траекторно-когерентными состояниями), построенные в работах [2], [9] для случая гауссовской функции $f^t(\xi) = c^t e^{i\xi_j \alpha_{js}^t \xi_s/2}$, а в английском издании [2] и работе [3] – для общего случая, многократно использовались при исследовании движения частиц в электромагнитных полях и в других задачах [8]. Свое наименование метод получил благодаря понятию комплексного ростка (графику оператора α^t с матрицей α_{js}^t – множеству всех таких $(w_1, \dots, w_n; z_1, \dots, z_n)$, что $\alpha_{js}^t z_s = w_j$ или $(w_j \xi_j - (z_j/i)\partial/\partial \xi_j) f^t(\xi) = 0$), которое играет центральную роль при исследовании уравнения для f^t .

Среднее значение квазиклассической наблюдаемой величины $A(\hat{q}\sqrt{h}, \hat{p}\sqrt{h})$ в состоянии (1.4) в фиксированный момент времени при $h \rightarrow 0$ стремится к $A(Q^t, P^t)$; в состоянии (1.3) – к величине $\int dX |\varphi^t(X)|^2 A(X, \partial S^t/\partial X)$, которая выражается через значения функции $A(Q, P)$ на поверхности $\{(Q, P) | P_i = \partial S/\partial Q_i\}$, называемой лагранжевым многообразием [1]. Поэтому состояние (1.4) описывает эволюцию точечной классической частицы с координатами Q^t и импульсами P^t , ВКБ-состояние (1.3) – эволюцию n -мерного лагранжева многообразия в $2n$ -мерном фазовом пространстве.

Известны также квазиклассические подстановки, отвечающие k -мерным поверхностям в $2n$ -мерном фазовом пространстве, переходящие при $k = 0$ и $k = n$ в (1.4) и (1.3) [2],

[3]. Все они могут быть представлены в виде бесконечной суперпозиции решений (1.4) [7]

$$\Psi^t(q) = c^h \int d\alpha e^{iS^t(\alpha)/h} e^{iP^t(\alpha)(q\sqrt{h}-Q^t(\alpha))/h} f^t\left(q - \frac{Q^t(\alpha)}{\sqrt{h}}\right). \quad (1.5)$$

Таким образом, всю квазиклассическую механику можно построить на основе теории комплексного роста Маслова в точке.

В настоящей работе строятся и исследуются квазиклассические волновые функции для систем со связями первого рода. Такие системы часто встречаются в современной физике: все калибровочные теории относятся к данному типу.

Известны различные формулировки квантовых теорий систем со связями. Наиболее известным является подход Дирака [10], в котором волновая функция Ψ^t должна удовлетворять не только уравнению Шредингера $i\partial\Psi^t/\partial t = \hat{H}^+\Psi^t$, но и условиям связи

$$\hat{\Lambda}_a^+\Psi^t = 0; \quad a = \overline{1, M}, \quad (1.6)$$

которые не противоречат друг другу и уравнению эволюции для некоторых операторов $\hat{U}_{ab}^c$ (“структурных функций”) и $\hat{R}_a^c$

$$[\hat{\Lambda}_a^+; \hat{\Lambda}_b^+] = i(\hat{U}_{ab}^c)^+ \hat{\Lambda}_c^+, \quad (1.7)$$

а $[\hat{H}^+; \hat{\Lambda}_a^+] = i(\hat{R}_a^c)^+ \hat{\Lambda}_c^+$. В приведенных формулах через $\hat{O}^+$ обозначен оператор, эрмитово сопряженный $\hat{O}$ относительно скалярного произведения $\int \Psi_1^* \Psi_2$. В большинстве моделей $\hat{H}^+ = \hat{H}$, $\hat{\Lambda}_a^+ = \hat{\Lambda}_a$.

Чтобы определить скалярное произведение физических состояний, которое при наивном вычислении расходится, обычно накладывают дополнительные калибровочные условия [11]; при этом могут возникать проблемы типа неоднозначностей Грибова [12].

Метод БРСТ-БФВ-квантования [13] основан на введении дополнительных степеней свободы и наложении условий на волновые функции. Нетривиальная проблема введения скалярного произведения возникает и здесь.

Однако более удобным для квазиклассического анализа в рамках теории комплексного роста Маслова в точке является еще один подход – алгебраическое квантование (“refined algebraic quantization”) [14], [15]. Применительно к простейшему абелеву случаю [14], когда $\hat{\Lambda}_a^+ = \hat{\Lambda}_a$, данный метод заключается не в наложении дополнительных условий типа (1.6) на физические состояния, а в замене скалярного произведения, вводимого в теорию, на

$$\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle = \left(\Phi_1, \prod_a 2\pi\delta(\hat{\Lambda}_a)\Phi_2 \right) \equiv \int dq (\Phi_1(q))^* \left(\prod_a 2\pi\delta(\hat{\Lambda}_a)\Phi_2 \right)(q). \quad (1.8)$$

Два состояния полагаются эквивалентными, если их разность имеет нулевую норму. Соответствующее факторпространство пополняется. Состояния Ψ и Φ в методах Дирака и алгебраического квантования связаны как $\Psi = \prod_a 2\pi\delta(\hat{\Lambda}_a)\Phi$.

Неабелев случай $U_{ab}^c = \text{const}$ рассмотрен в работе [15].

В случае нетривиальных структурных функций для скалярного произведения вместо формулы (1.8) используется более общее выражение

$$\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle = (\Phi_1, \eta \Phi_2), \quad (1.9)$$

для соответствия Φ - и Ψ -состояний – формула

$$\Psi = \eta \Phi. \quad (1.10)$$

Оператор η , удовлетворяющий свойствам

$$\eta^+ = \eta, \quad \eta \geq 0, \quad \eta \hat{\Lambda}_a = 0, \quad (1.11)$$

строится по следующей схеме, полученной в [16] путем сопоставления различных способов квантования.

1. Вводятся дополнительные грассмановы переменные $\bar{\Pi}_a$, Π^a , $a = \bar{1}, \bar{M}$.
2. Квантовой системе со связями сопоставляется B -заряд

$$\hat{\Omega}_0 = \sum_m \hat{\Omega}_{a_1 \dots a_m}^{m b_1 \dots b_{m-1}} \bar{\Pi}_{b_1} \dots \bar{\Pi}_{b_{m-1}} \frac{\partial}{\partial \bar{\Pi}_{a_1}} \dots \frac{\partial}{\partial \bar{\Pi}_{a_m}},$$

являющийся нильпотентным и формально эрмитовым оператором, если положить $(\bar{\Pi}_b)^+ \equiv \bar{\Pi}_b$, $(\partial/\partial \bar{\Pi}_b)^+ \equiv \partial/\partial \bar{\Pi}_b$. Компоненты B -заряда $\hat{\Omega}_{a_1 \dots a_m}^{m b_1 \dots b_{m-1}}$ действуют в $L^2(\mathbb{R}^n)$, причем $\hat{\Omega}_a^1 = \hat{\Lambda}_a$. Из условия $\hat{\Omega}_0 \hat{\Omega}_0 = 0$ находим $\hat{\Omega}_{a_1 a_2}^{2b} = -i \hat{U}_{a_1 a_2}^b / 2$.

3. Скалярное произведение задается формулой

$$\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle \equiv \left(\Phi_1, \int \prod_{a=1}^M d\mu^a d\bar{\Pi}_a d\Pi^a \exp\{-\bar{\Pi}_a \Pi^a + i\mu^a [\bar{\Pi}_a; \Omega_0]_+\} \Phi_2 \right). \quad (1.12)$$

В абелевом случае ($\hat{\Omega}_0 = \hat{\Lambda}_a \partial/\partial \bar{\Pi}_a$) формула (1.12) переходит в (1.8); при $U_{ab}^c = \text{const}$ – в формулу, полученную в работе [15].

Будем предполагать, что зависимость B -заряда от малого параметра $\hbar$ квазиклассична: $\hat{\Omega}_0 \sim \Omega_0(\sqrt{\hbar}\hat{q}, \sqrt{\hbar}\hat{p}, \sqrt{\hbar}\bar{\Pi}, \sqrt{\hbar}\partial/\partial \bar{\Pi})$, что означает

$$\begin{aligned} \hat{\Omega}_{a_1 \dots a_n}^{n b_1 \dots b_{n-1}} &= h^{n-2} \Omega_{a_1 \dots a_n}^{n b_1 \dots b_{n-1}}(\sqrt{\hbar}\hat{q}, \sqrt{\hbar}\hat{p}) + h^{n-1} \Omega_{a_1 \dots a_n}^{n(1) b_1 \dots b_{n-1}}(\sqrt{\hbar}\hat{q}, \sqrt{\hbar}\hat{p}) + \dots, \\ \hat{\Lambda}_a &= \frac{1}{h} \Lambda_a(\sqrt{\hbar}\hat{q}, \sqrt{\hbar}\hat{p}) + \Lambda_a^{(1)}(\sqrt{\hbar}\hat{q}, \sqrt{\hbar}\hat{p}) + \dots, \\ \hat{U}_{a_1 a_2}^b &= U_{a_1 a_2}^b(\sqrt{\hbar}\hat{q}, \sqrt{\hbar}\hat{p}) + h U_{a_1 a_2}^{(1)b}(\sqrt{\hbar}\hat{q}, \sqrt{\hbar}\hat{p}) + \dots. \end{aligned}$$

Поскольку вейлевский символ коммутатора операторов пропорционален скобке Пуассона символов операторов [4], свойство (1.7) в главном порядке по $\hbar$ дает

$$\{\Lambda_a; \Lambda_b\} \equiv \frac{\partial \Lambda_a}{\partial P} \frac{\partial \Lambda_b}{\partial Q} - \frac{\partial \Lambda_a}{\partial Q} \frac{\partial \Lambda_b}{\partial P} = -\Lambda_c U_{ab}^c. \quad (1.13)$$

Из эрмитовости B -заряда при $\hbar \rightarrow 0$ вытекает вещественность классических функций Λ_a , $U_{a_1 a_2}^b$ и свойство $\Lambda_a^{(1)*} - \Lambda_a^{(1)} = -iU_{da}^d$, означающее, что

$$\Lambda_a^{(1)} = \operatorname{Re} \Lambda_a^{(1)} + \frac{i}{2} U_{da}^d. \quad (1.14)$$

В настоящей работе исследуются свойства квазиклассических состояний типа волновых пакетов (1.4) для систем со связями первого рода. Получены следующие результаты.

1. Устанавливается, что норма состояния (1.4) не является экспоненциально малой, если только (Q, P) лежит на поверхности связи. Для данного случая получена формула (2.13) для скалярного произведения (раздел 2).

2. Поскольку состояние $e^{-i\tau\mu^a\hat{\Lambda}_a}\Phi - \Phi$ имеет ввиду (1.11) нулевую норму, “калибровочное преобразование” $\Phi \rightarrow e^{-i\tau\mu^a\hat{\Lambda}_a}\Phi$ переводит волновую функцию Φ в эквивалентную ей. Строится явный вид преобразований для волновых пакетов (1.4) в квазиклассическом приближении; показывается, что они образуют квазиклассическую квазигруппу Баталина [17] (раздел 3).

3. Исследованы свойства квазиклассических наблюдаемых величин (раздел 4) и операторов эволюции (раздел 5) при их действии на волновые пакеты (1.4).

В заключении кратко обсуждается возможное обобщение полученных результатов на состояния более общего вида (1.5) и взаимосвязь квазиклассической механики с подходом Дирака.

2. КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЕ СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ СОСТОЯНИЙ ТИПА ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ

В данном разделе рассматривается скалярное произведение (1.12) состояний типа волновых пакетов

$$\Phi(q) = c^h e^{iS/h} e^{iP(q\sqrt{\hbar}-Q)/h} f\left(q - \frac{Q}{\sqrt{\hbar}}\right) \quad (2.1)$$

при $\hbar \rightarrow 0$. В формулу (1.12) входит функция вида

$$\Phi^\tau(q, \Pi, \bar{\Pi}) = \exp\{\tau\bar{\Pi}_a \Pi^a - i\tau\mu_a[\bar{\Pi}_a, \hat{\Omega}_0]_+\} \Phi(q) \quad (2.2)$$

при $\tau = -1$. Для вычисления ее при $\hbar \rightarrow 0$ заметим, что она удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} i\frac{\partial\Phi^\tau}{\partial\tau} = \\ = \left[\mu_a \left(\hat{\Lambda}_a + \sum_{n=2}^{\infty} n\hat{\Omega}_{a_1 \dots a_{n-1} a}^{b_1 \dots b_{n-1}} \bar{\Pi}_{b_1} \dots \bar{\Pi}_{b_{n-1}} \frac{\partial}{\partial \bar{\Pi}_{a_1}} \dots \frac{\partial}{\partial \bar{\Pi}_{a_{n-1}}} \right) + i\bar{\Pi}_a \Pi^a \right] \Phi^\tau \end{aligned} \quad (2.3)$$

и начальному условию (2.1). Будем искать решение данной задачи Коши при $\hbar \rightarrow 0$ в виде

$$\Phi^\tau(q, \Pi, \bar{\Pi}) = c^h e^{iS^\tau/h} e^{iP^\tau(q\sqrt{\hbar}-Q^\tau)/h} f^\tau\left(q - \frac{Q^\tau}{\sqrt{\hbar}}, \Pi, \bar{\Pi}\right). \quad (2.4)$$

Подстановка волновой функции (2.4) в уравнение (2.3) осуществляется аналогично теории комплексного ростка Маслова для систем без связей [2], [7]: приравнивая слагаемые порядка $O(h^{-1})$, получаем

$$\dot{S}^\tau = P^\tau \dot{Q}^\tau - \mu^a \Lambda_a(Q^\tau, P^\tau); \quad (2.5)$$

приравнивание слагаемых порядка $O(h^{-1/2})$ дает систему Гамильтона, отвечающую классическому гамильтониану $\mu^a \Lambda_a$:

$$\dot{Q}^\tau = \mu^a \frac{\partial \Lambda_a}{\partial P}(Q^\tau, P^\tau), \quad \dot{P}^\tau = -\mu^a \frac{\partial \Lambda_a}{\partial Q}(Q^\tau, P^\tau), \quad (2.6)$$

которая задает классическое калибровочное преобразование. Величина S^τ является действием на классической траектории.

Приравнивая слагаемые порядка $O(1)$, получаем уравнение для f^τ :

$$i \frac{\partial f^\tau}{\partial \tau} = \left[\frac{1}{2} \mu^a (\Xi^2 \Lambda_a)(Q^\tau, P^\tau) + \mu^a \Lambda_a^{(1)}(Q^\tau, P^\tau) + i \bar{\Pi}_a \Pi^a + \right. \\ \left. + 2 \mu^a \Omega_{a_1 a}^2(Q^\tau, P^\tau) \bar{\Pi}_{b_1} \frac{\partial}{\partial \bar{\Pi}_{a_1}} \right] f^\tau, \quad (2.7)$$

где для классических функций $O(Q, P)$ вводится обозначение

$$\frac{1}{2} ((\Xi^2 O)(Q, P) f)(\xi) = \left[\frac{1}{2} \xi \frac{\partial^2 O}{\partial Q \partial Q} \xi + \frac{1}{2} \xi \frac{\partial^2 O}{\partial Q \partial P} \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \xi} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial^2 O}{\partial P \partial Q} \xi + \frac{1}{2} \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial^2 O}{\partial P \partial P} \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \xi} \right] f. \quad (2.8)$$

Поскольку обычное скалярное произведение волновых пакетов (Φ, Φ^τ) оценивается сверху по модулю величиной $\text{const}((|P - P^\tau| + |Q - Q^\tau|)h^{-1/2})^{-m}$ для любого m [7], вклад в интеграл (1.12) будут давать лишь такие значения μ^a , для которых при $\tau = 1$

$$|P^\tau - P| \leq O(h^{1/2}), \quad |Q^\tau - Q| \leq O(h^{1/2}). \quad (2.9)$$

В настоящей работе рассматривается только простейший случай “общего положения” (свободного действия калибровочной группы), при котором калибровочная группа не содержит нетривиальных стационарных подгрупп точек: калибровочные преобразования (2.6) нетривиальны. При этом $P^\tau = P$, $Q^\tau = Q$ лишь при $\mu^a = 0$. В этом случае условиям (2.9) удовлетворяют только значения μ^a порядка $O(h^{1/2})$. Поэтому в интеграле (1.12) удобно провести замену переменных $\mu^a = \rho^a \sqrt{h}$ и перейти к пределу $h \rightarrow 0$. Математическое обоснование возможности перехода к пределу под знаком интеграла в подобных случаях обеспечивается теоремой Лебега [18].

При $\mu^a = -\rho^a \sqrt{h}$ и $\tau = -1$, находя решения уравнений (2.5)–(2.7) в виде разложения по $h^{1/2}$, получаем

$$\begin{aligned} \Phi^\tau(q, \Pi, \overline{\Pi}) &\simeq c^h e^{iS/h} e^{iP(q\sqrt{h}-Q)/h} e^{-i\rho^a \Lambda_a(Q, P)/\sqrt{h}} \times \\ &\times e^{\overline{\Pi}_a \Pi^a} (e^{-i\rho^a (\xi \partial \Lambda_a / \partial Q + (\partial \Lambda_a / \partial P)(\partial / \partial \xi)/i)} f)(\xi), \\ \xi &= q - \frac{Q}{\sqrt{h}}. \end{aligned}$$

Отсюда при $h \rightarrow 0$ для скалярного произведения (1.12) находим

$$\langle \Phi, \Phi \rangle \simeq h^{M/2} |c^h|^2 \int d\xi d\rho e^{-i\rho^a \Lambda_a(Q, P)/\sqrt{h}} f^*(\xi) (e^{-i\rho^a (\Xi \Lambda_a)(Q, P)} f)(\xi). \quad (2.10)$$

Для линеаризованной связи введено обозначение

$$\Xi \Lambda_a = \frac{\partial \Lambda_a}{\partial Q} \xi + \frac{\partial \Lambda_a}{\partial Q} \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \xi}. \quad (2.11)$$

Подынтегральное выражение, входящее в (2.10), быстро осциллирует при $h \rightarrow 0$ и приводит поэтому к экспоненциально малому скалярному произведению, кроме случаев

$$\Lambda_b(Q, P) = 0, \quad b = \overline{1, M}. \quad (2.12)$$

При этом условии, выбирая нормировочный множитель c^h в виде $c^h = h^{-M/4}$, находим

$$\langle \Phi, \Phi \rangle \simeq \left(f, \prod_{a=1}^M 2\pi \delta(\Xi \Lambda_a) f \right) \equiv \langle f, f \rangle. \quad (2.13)$$

Ввиду (1.13) операторы $\Xi \Lambda_a$, входящие в (2.13), коммутируют:

$$[\Xi \Lambda_a; \Xi \Lambda_b] = -i \{ \Lambda_a; \Lambda_b \} = 0.$$

Таким образом, для систем со связями первого рода выражение (2.1) задает нетривиальное квазиклассическое состояние (с отличной от нуля нормой), если только классические координаты и импульсы лежат на поверхности связи (2.12). Скалярное произведение состояний (2.1) задается формулой (2.13). Если $f = \Xi \Lambda_a \chi^a$, то оно обращается в нуль: при “калибровочном преобразовании” $f \rightarrow f + \Xi \Lambda_a \chi^a$ состояние (2.1) переходит в эквивалентное. Оказывается, что квазиклассические состояния можно подвергать и другим калибровочным преобразованиям, меняющим классические координаты и импульсы.

3. КВАЗИКЛАССИЧЕСКАЯ КВАЗИГРУППА БАТАЛИНА

3.1. Скалярное произведение (1.9) является вырожденным. В частности, как следует из (1.11), разность волновых функций Φ и $e^{-i\tau\mu^a\hat{\Lambda}_a}\Phi$ имеет нулевую норму. Поэтому эти функции описывают одно и то же физическое состояние. Исследуем квантовое калибровочное преобразование

$$\Phi \rightarrow \Phi^\tau = e^{-i\tau\mu^a\hat{\Lambda}_a}\Phi,$$

где Φ является квазиклассическим волновым пакетом (2.1).

Волновая функция Φ^τ удовлетворяет уравнению

$$i\frac{\partial\Phi^\tau}{\partial\tau} = \mu^a\hat{\Lambda}_a\Phi^\tau \quad (3.1)$$

и начальному условию $\Phi^0 = \Phi$. Аналогично предыдущему разделу будем искать решение данной задачи Коши в виде

$$\Phi^\tau(q) = c^h e^{iS^\tau/h} e^{iP^\tau(q\sqrt{h}-Q^\tau)/h} f^\tau\left(q - \frac{Q^\tau}{\sqrt{h}}\right). \quad (3.2)$$

Подстановка Φ^τ в уравнение (3.1) дает уравнения (2.5) и (2.6) для S^τ , P^τ , Q^τ и уравнение

$$i\frac{\partial f^\tau}{\partial\tau} = \left[\frac{1}{h}\mu^a(\Xi\Lambda_a)(Q^\tau, P^\tau) + \mu^a\Lambda_a^{(1)}(Q^\tau, P^\tau)\right]f^\tau. \quad (3.3)$$

Преобразование $(S, P, Q; f) \mapsto (S^\tau, P^\tau, Q^\tau, f^\tau)$ можно рассматривать как *квазиклассическое калибровочное преобразование*.

3.2. Свойство (2.12) очевидно сохраняется при преобразованиях (2.6) ввиду (1.13).

Покажем, что калибровочное преобразование сохраняет и норму (2.13).

Дифференцируя по параметру τ скалярное произведение $\langle f_1^\tau, f_2^\tau \rangle$, находим

$$\begin{aligned} i\frac{d}{d\tau}\langle f_1^\tau, f_2^\tau \rangle &= \mu^a(\Lambda_a^{(1)} - \Lambda_a^{(1)*})\langle f_1^\tau, f_2^\tau \rangle + \\ &+ \left(f_1^\tau, \left[i\frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{1}{2}\mu^a\Xi^2\Lambda_a; \prod_b 2\pi\delta(\Xi\Lambda_b)\right]f_2^\tau\right). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Непосредственным вычислением проверяем, что на поверхности связи

$$\begin{aligned} \left[i\frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{1}{2}\mu^a\Xi^2\Lambda_a; \Xi\Lambda_b\right] &= i\Xi\{\mu^a\Lambda_a; \Lambda_b\} = -iU_{ab}^c\Xi\Lambda_c, \\ \left[i\frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{1}{2}\mu^a\Xi^2\Lambda_a; e^{i\rho^d\Xi\Lambda_d}\right] &= -i\mu^a U_{ab}^c \rho^b \frac{\partial}{\partial\rho^c} e^{i\rho^d\Xi\Lambda_d}. \end{aligned}$$

После интегрирования данного выражения по частям по ρ получаем, что

$$\left[i\frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{1}{2}\mu^a\Xi^2\Lambda_a; \prod_d 2\pi\delta(\Xi\Lambda_d)\right] = i\mu^a U_{ab}^b \prod_d 2\pi\delta(\Xi\Lambda_d). \quad (3.5)$$

Учитывая (1.14), из (3.4) получаем, что скалярное произведение $\langle f_1^\tau, f_2^\tau \rangle$ постоянно. В частности, квазиклассические состояния с нулевой нормой переходят в состояния с нулевой нормой, поэтому отношение эквивалентности при калибровочных преобразованиях сохраняется.

3.3. Если структурные функции U_{ab}^c постоянны, квазиклассические преобразования образуют группу Ли; при $U_{ab}^c = 0$ группа Ли абелева. В общем случае, когда структурные функции нетривиальны, квазиклассические калибровочные преобразования образуют квазигруппу Баталина [17].

Действительно, введем операторы дифференцирования вдоль траекторий классической системы (2.5), (2.6):

$$\delta_a = \delta_{\Lambda_a} = P \frac{\partial \Lambda_a}{\partial P} \frac{\partial}{\partial S} + \frac{\partial \Lambda_a}{\partial P} \frac{\partial}{\partial Q} - \frac{\partial \Lambda_a}{\partial Q} \frac{\partial}{\partial P},$$

удовлетворяющие свойствам

$$[\delta_a; \delta_b] = -U_{ab}^c(Q, P) \delta_c \quad (3.6)$$

и образующие, таким образом, квазиалгебру Баталина. Из свойства (3.6) вытекает [17] классическое квазигрупповое свойство

$$\lambda_{\mu_1} \lambda_{\mu_2} X = \lambda_{\mu_3(\mu_1, \mu_2, X)} X \quad (3.7)$$

для преобразований $\lambda_{\mu\tau}: X^0 = (S^0, P^0, Q^0) \mapsto X^\tau = (S^\tau, P^\tau, Q^\tau)$, переводящих начальное условие задачи Коши (2.5), (2.6) в ее решение. При этом μ_1, μ_2 предполагаются достаточно малыми.

Оказывается, что квазигрупповое свойство справедливо и для квазиклассических преобразований. Обозначим через $V_{\mu\tau}(\lambda_{\mu\tau} X \leftarrow X) \equiv V_{\mu\tau}[X]$ оператор, переводящий начальное условие уравнения (2.4) в решение задачи Коши. Требуется проверить, что следующие состояния эквивалентны:

$$V_{\mu_1}(\lambda_{\mu_1} \lambda_{\mu_2} X \leftarrow \lambda_{\mu_2} X) V_{\mu_2}(\lambda_{\mu_2} X \leftarrow X) f \sim V_{\mu_3}(\lambda_{\mu_3} X \leftarrow X) f. \quad (3.8)$$

3.4. Обозначим

$$H_a = \frac{1}{2} \Xi^2 \Lambda_a + \Lambda_a^{(1)}$$

и проверим, что для всех f и g справедлив инфинитезимальный аналог квазиклассического квазигруппового свойства

$$\langle f, [H_a(X) - i\delta_a; H_b(X) - i\delta_b]g \rangle = iU_{ab}^c(X) \langle f, (H_c(X) - i\delta_c)g \rangle. \quad (3.9)$$

Используя свойство

$$\left[i\delta_{\Lambda_a} - \frac{1}{2} \Xi^2 \Lambda_a; i\delta_{\Lambda_b} - \frac{1}{2} \Xi^2 \Lambda_b \right] = i \left(i\delta_{\{\Lambda_a; \Lambda_b\}} - \frac{1}{2} \Xi^2 \{\Lambda_a; \Lambda_b\} \right),$$

проверяемое непосредственно, приводим (3.9) к виду

$$\frac{i}{2} [\Xi U_{ab}^c; \Xi \Lambda_c] - i\{\Lambda_a; \Lambda_b^{(1)}\} - i\{\Lambda_a^{(1)}; \Lambda_b\} = iU_{ab}^c \Lambda_c^{(1)}. \quad (3.10)$$

Выделяя действительную и мнимую части и пользуясь (1.14), приводим (1.12) к виду

$$\{\Lambda_a; \operatorname{Re} \Lambda_b^{(1)}\} + \{\operatorname{Re} \Lambda_a^{(1)}; \Lambda_b\} = U_{ab}^c \operatorname{Re} \Lambda_c^{(1)}, \quad (3.11)$$

$$\frac{1}{2}\{U_{ab}^c; \Lambda_c\} + \frac{1}{2}\{\Lambda_a; U_{eb}^e\} + \frac{1}{2}\{U_{da}^d; \Lambda_b\} = \frac{1}{2}U_{ab}^c U_{dc}^d. \quad (3.12)$$

Оказывается, что свойство (3.12) выполняется автоматически. Из тождества Якоби $[[\delta_a; \delta_b]; \delta_c] + [[\delta_b; \delta_c]; \delta_a] + [[\delta_c; \delta_a]; \delta_b] = 0$ получаем

$$\{\Lambda_c; U_{ab}^e\} + \{\Lambda_a; U_{bc}^e\} + \{\Lambda_b; U_{ca}^e\} + U_{ab}^d U_{dc}^e + U_{bc}^d U_{da}^e + U_{ca}^d U_{db}^e \delta_e = 0. \quad (3.13)$$

Поскольку предполагается, что калибровочная группа действует на фазовом пространстве свободно (с тривиальными стационарными подгруппами), векторные поля δ_e независимы. Поэтому коэффициенты при δ_e в формуле (3.13) обращаются в нуль. Рассматривая свертку коэффициента при δ_e с символом Кронекера δ_e^e , получаем соотношение (3.12).

На $\operatorname{Re} \Lambda_a^{(1)}$ накладывается дополнительное нетривиальное требование (3.11). При этом $\operatorname{Re} \Lambda_a^{(1)} = 0$ ему удовлетворяет.

3.5. Квазигрупповое свойство (3.8) получается из инфинитезимального (3.9) так же, как это было сделано в [19]. Приведем схему вывода; подробности можно найти в статье [20].

1. Вводится обозначение $(W_\mu f)(X) = f(\lambda_\mu X)$. Из квазигруппового свойства (3.7) устанавливается, что $W_{-\mu} \delta_a W_\mu$ является линейной комбинацией операторов δ_b ; коэффициенты функции обозначаются как $(Ad_X \mu)_a^b$: $W_{-\mu} \delta_a W_\mu = (Ad_X \mu)_a^b \delta_b$.

2. С помощью дифференцирования левой части по t и использования свойства (3.9) получаем

$$\begin{aligned} \langle f, (-i(V_{\mu t}[Y])^+ (Ad_{\lambda_{\mu t} Y} \mu t)_a^b H_b(\lambda_{\mu t} Y) V_{\mu t}[Y] - (V_{\mu t}[Y])^+ (\delta_a V_{\mu t})[Y])g \rangle = \\ = -i \langle f, H_a(Y)g \rangle. \end{aligned}$$

3. Проверяется, что для любой гладкой кривой $\mu(\alpha)$

$$\left\langle f, i \frac{d}{d\alpha} V_{\mu(\alpha)}[X]g \right\rangle = \langle f, \rho^a(\alpha, X) H_a(\lambda_{\mu(\alpha)} X) V_{\mu(\alpha)}[X]g \rangle,$$

где коэффициенты $\rho^a(\alpha, X)$ определяются из соотношения

$$\frac{d}{d\alpha} F(\lambda_{\mu(\alpha)} X) = \rho^a(\alpha, X) \delta_a F(\lambda_{\mu(\alpha)} X)$$

для числовых функций F .

4. Путем дифференцирования по параметру τ проверяется свойство

$$\langle f, (V_{\mu_1 \tau}[\lambda_{\mu_2} X])^+ V_{\mu(\tau)}[X]g \rangle = \langle f, V_{\mu_2} g \rangle,$$

где $\mu(\tau)$ определяется из соотношения $\lambda_{\mu(\tau)} X = \lambda_{\mu_1 \tau} \lambda_{\mu_2} X$.

4. КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЕ НАБЛЮДАЕМЫЕ

4.1. Рассмотрим действие операторов вида

$$h\widehat{O} = O(\sqrt{h}\hat{q}, \sqrt{h}\hat{p}) + hO_1(\sqrt{h}\hat{q}, \sqrt{h}\hat{p}) + \dots$$

на квазиклассическое состояние типа волнового пакета (2.1)

$$\Phi(q) = (K_{S,P,Q}^h f)(q) \equiv \frac{1}{h^{M/4}} e^{iS/h} e^{iP(q\sqrt{h}-Q)/h} f\left(q - \frac{Q}{\sqrt{h}}\right). \quad (4.1)$$

Преобразованный волновой пакет имеет аналогичный вид

$$h\widehat{O}\Phi = K_{S,P,Q}^h (O(Q, P)f + \sqrt{h}(\Xi O)(Q, P)f + \dots),$$

где введено обозначение типа (2.11)

$$\Xi O = \frac{\partial O}{\partial Q} \xi + \frac{\partial O}{\partial P} \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

Таким образом, в главном порядке по h квантовая наблюдаемая $h\widehat{O}$ переходит в классическую $O(Q, P)$, первая квантовая поправка имеет вид $\sqrt{h}\Xi O$, а оператор $O + \sqrt{h}\Xi O$ можно рассматривать как квазиклассическую наблюдаемую.

4.2. На классические наблюдаемые для систем со связями обычно налагают условия

$$\{O, \Lambda_a\} = 0, \quad (4.2)$$

справедливые на поверхности связи. В этом случае состояния с нулевой нормой переходят под действием оператора ΞO в состояния с нулевой нормой, поскольку при $\langle f, f \rangle = 0$ $\langle g, \Xi O f \rangle = \langle (\Xi O)^+ g, f \rangle = 0$ для любого g на области определения оператора $(\Xi O)^+$ ввиду коммутативности ΞO и $\Xi \Lambda_a$.

4.3. Квазиклассическая наблюдаемая $O + \sqrt{h}\Xi O$ может быть выражена через операторнозначную форму $\Omega[\delta Q, \delta P]$, которая определяется из трансформационных свойств волнового пакета (4.1) относительно малого сдвига классических переменных [21], [22]

$$K_{S+\sqrt{h}\delta S, P+\sqrt{h}\delta P, Q+\sqrt{h}\delta Q}^h f \simeq \text{const } K_{S,P,Q}^h e^{i\Omega[\delta Q, \delta P]} f$$

и имеет вид

$$\Omega[\delta Q, \delta P] = \delta P \xi - \delta Q \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \xi}. \quad (4.3)$$

Тогда ΞO совпадает со значением формы Ω на векторе, касательном к гамильтоновой классической траектории $\delta_O Q = \partial O / \partial P$; $\delta_O P = -\partial O / \partial Q$: $\Xi O = -\Omega[\delta_O(Q, P)]$.

4.4. Покажем, что квазиклассическая наблюдаемая $O + \sqrt{\hbar}\Xi O$ однозначно определяется значениями классической наблюдаемой O на поверхности связи. Пусть $O = 0$ при $\Lambda_a = 0$. Убедимся, что ΞO – линейная комбинация операторов $\Xi\Lambda_a$.

Действительно, линейная форма

$$\frac{\partial O}{\partial P}\delta P + \frac{\partial O}{\partial Q}\delta Q \quad (4.4)$$

обращается в нуль при

$$d\Lambda_a[\delta Q, \delta P] \equiv \frac{\partial \Lambda_a}{\partial P}\delta P + \frac{\partial \Lambda_a}{\partial Q}\delta Q = 0. \quad (4.5)$$

Формула (4.5) задает $(2n - M)$ -мерное подпространство $2n$ -мерного пространства $\{(\delta Q, \delta P)\}$, поскольку операторы $\Xi\Lambda_a$ предполагаются линейно независимыми. Введем такой базис $\{(\delta Q^{(i)}, \delta P^{(i)})\}$, $i = \overline{1, 2n}$, что $d\Lambda_a[\delta Q^{(i)}, \delta P^{(i)}] = \delta_a^i$. Разлагая $\{(\delta Q, \delta P)\} = \sum_{i=1}^{2n} b_i \{(\delta Q^{(i)}, \delta P^{(i)})\}$, получаем, что линейная форма (4.4) представляется в виде $\sum_{i=1}^M A_i b_i$ и $\Xi O = \sum_{a=1}^M A_a \Xi\Lambda_a$. Поэтому $\Xi O f$ имеет нулевую норму и

$$(O + \sqrt{\hbar}\Xi O)f \sim 0.$$

4.5. Покажем, что калибровочно-эквивалентные квазиклассические волновые пакеты переводятся квазиклассическими наблюдаемыми в калибровочно-эквивалентные.

Рассмотрим зависящий от параметра τ волновой пакет (3.2) с функциями $X^\tau \equiv (S^\tau, P^\tau, Q^\tau)$, удовлетворяющими уравнениям (2.5), (2.6), и функцией

$$f^\tau = V_{\mu\tau}(X^\tau \leftarrow X^0)f^0,$$

удовлетворяющей уравнению (3.3). Покажем, что квазиклассические состояния

$$(X^0, (O(X^0) + \sqrt{\hbar}(\Xi O)(X^0))f^0) \sim (X^\tau, (O(X^\tau) + \sqrt{\hbar}(\Xi O)(X^\tau))f^\tau)$$

также калибровочно-эквивалентны. Действительно, $dO(X^\tau)/d\tau = \mu^a \{\Lambda_a; O\} = 0$, поэтому $O(X^\tau) = O(X^0)$. Требуется проверить, что

$$g^\tau = V_{\mu\tau}(X^\tau \leftarrow X^0)(\Xi O)(X^0)f^0 \sim (\Xi O)(X^\tau)f^\tau.$$

Рассмотрим разность $\zeta^\tau = g^\tau - (\Xi O)(X^\tau)f^\tau$, удовлетворяющую свойству

$$\left(i\frac{d}{d\tau} - \mu^a \left[\frac{1}{2}\Xi^2\Lambda_a + \Lambda_a^{(1)}\right]\right)\zeta^\tau = -\left[i\frac{d}{d\tau} - \mu^a \frac{1}{2}\Xi^2\Lambda_a; \Xi O\right]f^\tau = -\Xi\mu^a \{\Lambda_a; O\}f^\tau.$$

Ввиду (4.2) и п. 4.4 имеем $\Xi\mu^a \{\Lambda_a; O\} = A^a \Xi\Lambda_a$, поэтому

$$\left(i\frac{d}{d\tau} - \mu^a \left[\frac{\Xi^2\Lambda_a}{2} + \Lambda_a^{(1)}\right]\right)\zeta^\tau = \Xi\Lambda_a \chi_a^\tau.$$

Следовательно, $d\langle\zeta^\tau, \zeta^\tau\rangle/d\tau = 0$.

5. КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

5.1. Рассмотрим теперь преобразование волновых пакетов (4.1) под действием оператора эволюции $e^{-i\hat{O}t}$, соответствующего гамильтониану $\hat{O} = O(\sqrt{\hbar}\hat{q}, \sqrt{\hbar}\hat{p})/\hbar + O_1(\sqrt{\hbar}\hat{q}, \sqrt{\hbar}\hat{p}) + \dots$. Волновая функция $\Phi^t = e^{-i\hat{O}t}\Phi^0$ удовлетворяет задаче Коши с начальным условием (4.1)

$$i\frac{\partial\Phi^t}{\partial t} = \hat{O}\Phi^t, \quad \Phi^0 = K_{S^0, P^0, Q^0}^h f^0. \quad (5.1)$$

Будем искать решение задачи Коши (5.1) при $\hbar \rightarrow 0$ в виде

$$\Phi^t \simeq K_{S^t, P^t, Q^t}^h f^t.$$

Подстановка данной волновой функции в уравнение приводит к соотношениям

$$\dot{S}^t = P^t \dot{Q}^t - O(Q^t, P^t), \quad \dot{Q}^t = \frac{\partial O}{\partial P}(Q^t, P^t), \quad \dot{P}^t = -\frac{\partial O}{\partial Q}(Q^t, P^t), \quad (5.2)$$

$$i\dot{f}^t = \left[\frac{1}{2}(\Xi^2 O)(Q^t, P^t) + O_1(Q^t, P^t) \right] f^t. \quad (5.3)$$

Обозначим через $u_t: X^0 \equiv (S^0, P^0, Q^0) \mapsto X^t \equiv (S^t, P^t, Q^t)$ классическое преобразование эволюции, через $U_t(u_t X \leftarrow X): f^0 \mapsto f^t$ — преобразование f .

5.2. Исследуем проблему унитарности преобразования эволюции. Будем предполагать, что классическая наблюдаемая O удовлетворяет условию (4.2) на поверхности связей. Как следует из результатов предыдущего раздела, $\Xi\{O; \Lambda_a\} = A_a^b \Xi\Lambda_b$ для некоторых коэффициентов A_a^b . Аналогично формуле (3.5) получаем

$$\left[i\frac{d}{dt} - \frac{1}{2}(\Xi^2 O)(X^t); \prod_a 2\pi\delta(\Xi\Lambda_a) \right] = -iA_a^a(X^t) \prod_a 2\pi\delta(\Xi\Lambda_a),$$

$$i\frac{d}{dt}\langle f_1^t, f_2^t \rangle = [O_1(X^t) - O_1^*(X^t) - iA_a^a(X^t)]\langle f_1^t, f_2^t \rangle.$$

Тем самым квазиклассическая эволюция сохраняет скалярное произведение при определенном условии для мнимой части O_1 :

$$\text{Im } O_1 = \frac{1}{2}A_a^a. \quad (5.4)$$

В этом случае состояния с нулевой нормой переходят в состояния с нулевой нормой, поэтому квазиклассическое преобразование сохраняет отношение эквивалентности.

5.3. Установим, что калибровочно-эквивалентные состояния, отвечающие разным S, P, Q , при преобразовании эволюции переходят в калибровочно-эквивалентные. Для этого удобно ввести вспомогательные понятия.

Рассмотрим векторное “квазиклассическое” расслоение [21], [22], базой которого $\mathcal{X}$ является множество всех (S, P, Q) , лежащих на поверхности связи (2.12), а слоями $\mathcal{F}_X$, $X \in \mathcal{X}$, — пространства гладких функций $f \in S(\mathbb{R}^n)$ со скалярными произведениями (2.13). Напомним, что сечение χ расслоения считается заданным, если при каждом $X \in \mathcal{X}$ выбрано $\chi_X \in \mathcal{F}_X$; при этом налагаются определенные условия непрерывности. Будем говорить, что сечение χ калибровочно-инвариантно, если состояния

$$\chi_{\lambda_\mu X} - V_\mu(\lambda_\mu X \leftarrow X)\chi_X \sim 0 \quad (5.5)$$

имеют нулевую норму. Инфинитезимальный аналог свойства (5.5) имеет вид $[i\delta_a - H_a(X)]\chi_X \sim 0$.

Приведем некоторые свойства калибровочно-инвариантных сечений (обоснование см. в статье [20]).

1. Понятие калибровочно-инвариантного сечения позволяет дать новое определение калибровочной эквивалентности квазиклассических состояний: два квазиклассических состояния (X_1, f_1) и (X_2, f_2) , $X_1, X_2 \in \mathcal{X}$, $f_i \in \mathcal{F}_{X_i}$, калибровочно-эквивалентны, если для всех калибровочно-инвариантных сечений χ квазиклассического расслоения

$$\langle \chi_{X_1}, f_1 \rangle = \langle \chi_{X_2}, f_2 \rangle. \quad (5.6)$$

2. Определим преобразование эволюции сечения как $\chi^0 \mapsto \chi^t$:

$$\chi_{u_t X}^t = U_t(u_t X \leftarrow X)\chi_X^0.$$

Оказывается, что квазиклассическая эволюция сечения сохраняет свойство калибровочной инвариантности тогда и только тогда, когда при эволюции калибровочно-эквивалентные состояния переходят в эквивалентные.

Для проверки каждого из этих свойств достаточно установить, что соотношение

$$[i\delta_a - H_a(X)]\chi_X^t \sim 0 \quad (5.7)$$

выполняется в момент t , если оно выполняется при $t = 0$. Инфинитезимальный аналог свойства (5.7) записывается как

$$\begin{aligned} \left\langle f, \left[i\delta_a - H_a(X); i\delta_O - \frac{1}{2}(\Xi^2 O)(X) - O_1(X) \right] g \right\rangle = \\ = -i\langle f, A_a^b(X)(i\delta_b - H_b(X))g \rangle \end{aligned} \quad (5.8)$$

для любых f и g .

5.4. Свойство (5.8) проверяется следующим образом. Непосредственным вычислением показывается, что

$$\begin{aligned} & \left[i\delta_a - \frac{1}{2}\Xi^2\Lambda_a - \Lambda_a^{(1)}; i\delta_O - \frac{1}{2}\Xi^2O - O_1 \right] = \\ & = i \left(i\delta_{\{\Lambda_a; O\}} - \frac{1}{2}\Xi^2\{\Lambda_a; O\} + \delta_O\Lambda_a^{(1)} - \delta_a O_1 \right). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Далее устанавливается, что

$$\Xi^2\{O; \Lambda_a\} = A_a^b \Xi^2\Lambda_b + \Xi A_a^b \Xi\Lambda_b + \Xi\Lambda_c \widehat{B}_c^a \quad (5.10)$$

для некоторых операторов $\widehat{B}_c^a$, являющихся линейными комбинациями ξ и $\partial/\partial\xi$. Последнее слагаемое не дает вклада в скалярное произведение (5.8). Поэтому свойство (5.8) записывается как

$$iA_a^b \Lambda_b^{(1)} = \frac{1}{2}\{A_a^b; \Lambda_b\} + i\{O; \Lambda_a^{(1)}\} - i\{\Lambda_a; O_1\}. \quad (5.11)$$

Реальная и мнимая части данного соотношения дают

$$iA_a^b \operatorname{Re} \Lambda_b^{(1)} = i\{O; \operatorname{Re} \Lambda_a^{(1)}\} - i\{\Lambda_a; \operatorname{Re} O_1\}, \quad (5.12)$$

$$-\frac{1}{2}A_a^b U_{cb}^c = \frac{1}{2}\{A_a^b; \Lambda_b\} - \frac{1}{2}\{O; U_{ca}^c\} + \frac{1}{2}\{\Lambda_a; A_c^c\} = 0. \quad (5.13)$$

Аналогично свойству (3.12) устанавливаем, что и свойство (5.13) является следствием тождества Якоби для операторов $\delta_O, \delta_a, \delta_b$. Свойство (5.12) является нетривиальным требованием для $\operatorname{Re} O_1$.

5.5. Полученные условия (5.4), (5.11) согласуются с определением наблюдаемой величины в методе БРСТ-БФВ-квантования, где вводится В-расширение наблюдаемой $\widehat{O}$ вида

$$\widehat{O}_B = \widehat{O} + \dots + \widehat{O}_{a_1 \dots a_n}^{nb_1 \dots b_n} \overline{\Pi}_{b_1} \dots \overline{\Pi}_{b_n} \frac{\partial}{\partial \Pi_{a_1}} \dots \frac{\partial}{\partial \Pi_{a_n}} + \dots,$$

которое должно удовлетворять свойствам $[\widehat{O}_B; \widehat{\Omega}_0] = 0, \widehat{O}_B^+ = \widehat{O}_B$. Первое из них дает

$$\widehat{O}_B \widehat{\Omega}_0 = \widehat{O} \widehat{\Omega}_a^1 \frac{\partial}{\partial \overline{\Pi}_a} + \dots, \quad \widehat{\Omega}_0 \widehat{O}_B = \widehat{\Omega}_a^1 \widehat{O} \frac{\partial}{\partial \overline{\Pi}_a} + \widehat{\Omega}_{a_1}^1 \widehat{O}_{a_1}^{1a} \frac{\partial}{\partial \overline{\Pi}_{a_1}} + \dots$$

и $[\widehat{O}; \widehat{\Lambda}_a] = \widehat{\Lambda}_b \widehat{O}_a^{1b}$. Предполагая, что компоненты В-расширения наблюдаемой зависят от $\hbar$ как

$$\widehat{O}_{a_1 \dots a_n}^{nb_1 \dots b_n} = \hbar^{n-1} O_{a_1 \dots a_n}^{nb_1 \dots b_n}(\sqrt{\hbar}\hat{q}, \sqrt{\hbar}\hat{p}) + \hbar^n O_{1a_1 \dots a_n}^{nb_1 \dots b_n}(\sqrt{\hbar}\hat{q}, \sqrt{\hbar}\hat{p}) + \dots,$$

в главном порядке по $\hbar$ получаем, что

$$-i\{O; \Lambda_a\} = \Lambda_b O_a^{1b} \quad (5.14)$$

всюду и

$$-i(\{O_1; \Lambda_a\} + \{O; \Lambda_a^{(1)}\}) = \Lambda_b^{(1)} O_a^{1b} + \Lambda_b O_a^{1b} - \frac{i}{2}\{\Lambda_b; O_a^{1b}\}. \quad (5.15)$$

Следовательно, на поверхности связи $O_a^{1b} = -iA_a^b$.

Условие $\widehat{O}_B^+ = \widehat{O}_B$ в главном порядке по $\hbar$ означает, что

$$O^* = O, \quad O_a^{1b*} = -O_a^{1b}, \quad O_1^* - O_1 + O_a^{1a*} = 0.$$

Отсюда получаем (5.4) и (5.11).

5.6. Построенное квазиклассическое преобразование эволюции зависит от значений наблюдаемой O не только на поверхности связи $\Lambda_a = 0$, но и вне ее: наблюдаемые O и $O + \alpha^a \Lambda_a$ генерируют различные классические уравнения. Тем не менее, классические состояния в момент t калибровочно-эквивалентны. Оказывается, что аналогичное свойство выполнено и для квазиклассической эволюции.

Рассмотрим две наблюдаемые

$$\begin{aligned}\widehat{C} &= \frac{1}{h} C(\sqrt{h}\hat{q}, \sqrt{h}\hat{p}) + C_1(\sqrt{h}\hat{q}, \sqrt{h}\hat{p}) + \dots, \\ \widehat{B} &= \frac{1}{h} B(\sqrt{h}\hat{q}, \sqrt{h}\hat{p}) + B_1(\sqrt{h}\hat{q}, \sqrt{h}\hat{p}) + \dots,\end{aligned}$$

совпадающие на поверхности связи: $B = C$ и $\text{Re } B_1 = \text{Re } C_1$. Обозначим через

$$\begin{aligned}(X, f^0) &\mapsto (u_t[B]X, U_t(u_t[B]X \leftarrow X; B)f^0), \\ (X, f^0) &\mapsto (u_t[C]X, U_t(u_t[C]X \leftarrow X; C)f^0)\end{aligned}$$

квазиклассические преобразования, генерируемые наблюдаемыми B и C . Для проверки свойства

$$(u_t[B]X, [U_t(u_t[B]X \leftarrow X; B)f^0]) \sim (u_t[C]X, [U_t(u_t[C]X \leftarrow X; C)f^0])$$

достаточно установить, что для любого калибровочно-инвариантного сечения χ_X квазиклассического расслоения

$$\langle \chi_{u_t[B]X}^0, U_t(u_t[B]X \leftarrow X; B)f^0 \rangle = \langle \chi_{u_t[C]X}^0, U_t(u_t[C]X \leftarrow X; C)f^0 \rangle. \quad (5.16)$$

Рассмотрим сечения

$$\begin{aligned}\chi_X^{-t}[B] &= U_{-t}(X \leftarrow u_t[B]X; B)\chi_{u_t[B]X}^0, \\ \chi_X^{-t}[C] &= U_{-t}(X \leftarrow u_t[C]X; C)\chi_{u_t[C]X}^0,\end{aligned}$$

разность которых $\rho_X^{-t} = \chi_X^{-t}[B] - \chi_X^{-t}[C]$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_X^{-t} - i \left(\frac{1}{2} (\Xi^2 B)(X) + B_1(X) - i\delta_B \right) \rho_X^{-t} = \gamma_X^{-t} \quad (5.17)$$

с правой частью $\gamma_X^{-t} = i \left(\frac{1}{2} (\Xi^2 O)(X) + O_1(X) - i\delta_O \right) \chi_X^{-t}[C]$, выражающейся через разность наблюдаемых $O = B - C$ и $O_1 = B_1 - C_1$. Поскольку O обращается в нуль на поверхности связи, то $\delta_O = A_a \delta_a$. Аналогично (5.10) находим $\Xi^2 O = A_a \Xi^2 \Lambda_a + [\Xi A_a; \Xi \Lambda_a] + \Xi \Lambda_a \widehat{B}_a$ для некоторого оператора $\widehat{B}_a$. Отсюда получаем, что $\gamma_X^{-t} \sim 0$ при

$$\frac{1}{2} \{A_a; \Lambda_a\} + iO_1 + A_a \Lambda_a^{(1)} = 0. \quad (5.18)$$

Реальная часть соотношения (5.18) равна нулю ввиду (5.4), мнимая – ввиду $\text{Re } O_1 = 0$. Отсюда $\gamma_X^{-t} \sim 0$, и выражение $\langle \rho_{u_{-t}[B]X}^{-t}; \rho_{u_{-t}[B]X}^{-t} \rangle$ имеет нулевую производную по t и равно нулю в начальный момент времени. Поэтому оно равно нулю при всех t . Отсюда получаем (5.16).

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При квантовании полей со связями в окрестности классического решения часто используется следующий прием: гамильтониан аппроксимируется квадратичной функцией, связи – линейными. В данной работе дано обоснование такого подхода: в скалярное произведение (2.13) квазиклассических состояний входят линеаризованные связи; классическое условие (2.12) возникает как следствие отличия от нуля нормы квазиклассического состояния; классическое уравнение эволюции (5.2) и уравнение с квадратичным гамильтонианом (5.3) также получены. Установлено и условие применимости линейного приближения для связей: классическая калибровочная группа должна действовать свободно. При наличии нетривиальных стационарных подгрупп калибровочной группы нетривиальный вклад интеграл (1.12) будет давать не малая окрестность точки $\mu = 0$, а окрестность некоторой поверхности.

В работе исследовались только квазиклассические состояния типа волновых пакетов (4.1), множество которых может быть рассмотрено [21], [22] как “квазиклассическое” расслоение, базой которого является множество допустимых классических состояний, а слоями – пространства функций f . Более сложные квазиклассические состояния (1.5) могут быть рассмотрены аналогично; при этом они интерпретируются как поверхности на квазиклассическом расслоении. Скалярное произведение состояний (1.5) приводится аналогично работам [19], [22] к более сложному виду

$$\int d\alpha \left(f, \prod_{i=1}^k 2\pi\delta \left(\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial \alpha_i}, \frac{\partial P}{\partial \alpha_i} \right) \right) \prod_{a=1}^M 2\pi\delta(\Xi\Lambda_a) f \right)$$

(Ω – оператор (4.3)) и отлично от нуля, только если выполнены соотношение (2.12) и условие изотропности Маслова $\partial S/\partial \alpha_i = P\partial Q/\partial \alpha_i$. Максимальное значение размерности $k = n - M$.

Формулы для квазиклассических преобразований волновых пакетов (5.2) и (5.3), остающиеся справедливыми и для состояний (1.5), можно использовать аналогично работе [3] для нахождения приближенных стационарных состояний гамильтониана $\hat{O}$. Для этого необходимо найти сначала k -мерное изотропное многообразие, которое переходило бы при эволюции (5.2) в калибровочно-эквивалентное, и подобрать f таким образом, чтобы и квазиклассическое преобразование не меняло состояние (1.5) (с точностью до калибровочной эквивалентности и умножения на фазовый множитель).

Наконец, дираковские квазиклассические состояния (1.10) также могут быть проинтерпретированы как суперпозиции (1.5), поскольку формулу (1.10) можно представить как

$$\Psi = \int \prod_{a=1}^M d\mu^a d\bar{\Pi}_a d\Pi^a e^{-\bar{\Pi}_a \Pi^a + i\mu^a [\bar{\Pi}_a; \Omega_0]_+} \Phi,$$

а подынтегральное выражение имеет вид (2.4) или суперпозиции функций (2.4). Таким образом, Ψ -состояние соответствует изотропному многообразию размерности $k + M$, которая может варьироваться от M до n . В частности, в подходе Дирака могут рассматриваться и ВКБ-состояния $k = n$.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 02-01-01062 и 02-01-06080.

Список литературы

- [1] *В. П. Маслов.* Теория возмущений и асимптотические методы. М.: МГУ, 1965.
- [2] *В. П. Маслов.* Операторные методы. М.: Наука, 1973; *V. P. Maslov.* Operational methods. M.: Mir Publishers, 1976.
- [3] *В. П. Маслов.* Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. М.: Наука, 1977.
- [4] *М. В. Карасев, В. П. Маслов.* Нелинейная скобка Пуассона. Геометрия и квантование. М.: Наука, 1991.
- [5] *R. Jackiw.* Rev. Mod. Phys. 1977. V. 49. P. 681.
- [6] *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц.* Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Наука, 1989.
- [7] *В. П. Маслов, О. Ю. Шведов.* Метод комплексного роста в задаче многих частиц и квантовой теории поля. М.: УРСС, 2000.
- [8] *В. Г. Багров, В. В. Белов, И. М. Тернов.* ТМФ. 1982. Т. 50. С. 390; *В. В. Белов, В. П. Маслов.* ДАН СССР. 1989. Т. 305. С. 574; *V. G. Bagrov, V. V. Belov, A. Yu. Trifonov.* Ann. Phys. 1996. V. 246. P. 231.
- [9] *В. П. Маслов.* ДАН СССР. 1970. Т. 195. № 3. С. 551.
- [10] *П. А. М. Дирак.* Лекции по квантовой механике. М.: Мир, 1968.
- [11] *Л. Д. Фаддеев.* ТМФ. 1969. Т. 1. С. 1.
- [12] *V. N. Gribov.* Nucl. Phys. B. 1978. V. 139. P. 1.
- [13] *C. Becchi, A. Rouet, R. Stora.* Phys. Lett. B. 1974. V. 52. P. 344; Ann. Phys. 1976. V. 98. P. 287; *И. В. Тютин.* Калибровочная инвариантность в теории поля и статистической физике в операторном формализме. Препринт ФИАН № 39. М.: ФИАН, 1975; *E. S. Fradkin, G. A. Vilkovisky.* Phys. Lett. B. 1975. V. 55. P. 224; *I. A. Batalin, G. A. Vilkovisky.* Phys. Lett. B. 1977. V. 69. P. 309; *T. Kugo, I. Ojima.* Suppl. Prog. Theor. Phys. 1979. № 66. P. 1.
- [14] *A. Ashtekar, J. Lewandowski, D. Marolf, J. Mourao, T. Thiemann.* J. Math. Phys. 1995. V. 36. P. 6456.
- [15] *D. Giulini, D. Marolf.* Class. Q. Grav. 1999. V. 16. P. 2489.
- [16] *O. Yu. Shvedov.* Ann. Phys. 2002. V. 302. P. 2; hep-th/0111270.
- [17] *I. A. Batalin.* J. Math. Phys. 1981. V. 22. P. 1837.
- [18] *А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989.
- [19] *O. Yu. Shvedov.* Ann. Phys. 2002. V. 296. P. 51.
- [20] *O. Yu. Shvedov.* Semiclassical mechanics of constrained systems. hep-th/0111265.
- [21] *О. Ю. Шведов.* Матем. заметки. 1999. Т. 65. С. 437.
- [22] *О. Ю. Шведов.* Матем. сб. 1999. Т. 190. № 10. С. 123.

Поступила в редакцию 27.IX.2002 г.
После доработки 3.II.2003 г.