Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. М. Зиновьев, Спонтанная намагниченность в двумерной модели Изинга,
ТМФ, 2003, том 136, номер 3, 444–462

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf236>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 15:46:39

СПОНТАННАЯ НАМАГНИЧЕННОСТЬ В ДВУМЕРНОЙ МОДЕЛИ ИЗИНГА

Предложено новое определение спонтанной намагниченности. Для двумерной модели Изинга со свободными граничными условиями вычислена эта спонтанная намагниченность.

Ключевые слова: намагниченность, корреляционная функция.

1. ВВЕДЕНИЕ

Янг получил [1] формулу для спонтанной намагниченности в двумерной модели Изинга (см. также работу [2], где получена формула для случая, когда вертикальное и горизонтальное взаимодействия различны). Монтрол, Потс и Уорд определили [3] квадрат спонтанной намагниченности как асимптотику спин-спиновой корреляционной функции. Для характеристики этих работ процитируем статью [4]:

“В отличие от свободной энергии, корректно определенная спонтанная намагниченность модели Изинга на квадратной решетке никогда не была вычислена математически строго. Начиная с единственно разумного определения спонтанной намагниченности, как Янг, так и Монтрол, Потс и Уорд вынуждены были делать предположение, которое не было строго оправдано.”

В книге [5] (с. 113) решена следующая задача:

“Более точно, мы предполагаем для решетки Онзагера циклическое граничное условие только в горизонтальном направлении и предполагаем, что магнитное поле взаимодействует с одним из двух горизонтальных граничных рядов спинов.”

В работе [6] получены оценки производных намагниченности по магнитному полю при значении магнитного поля, равном нулю. Эти оценки получены в области, где отношение энергии взаимодействия к температуре достаточно велико. Мы будем изучать спонтанную намагниченность в области, где отношение энергии взаимодействия к температуре достаточно мало.

В этой работе мы предлагаем новое определение спонтанной намагниченности. Для того чтобы его сформулировать, воспользуемся одномерной моделью Изинга. Пусть

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: zinoviev@mi.ras.ru

для любого целого числа $k = 1, \dots, N$ задано число $\sigma_k = \pm 1$. Энергия в модели Изинга с магнитным полем равна

$$\overline{H}(\sigma) = - \sum_{k=1}^{N-1} E \sigma_k \sigma_{k+1} - E \sigma_N \sigma_1 - \sum_{k=1}^N H(k) \sigma_k, \quad (1.1)$$

где число $H(k) = H$ для любого целого числа $k = 1, \dots, N$. Функция

$$Z_N(E, H) = \sum_{\substack{\sigma_k = \pm 1 \\ k=1, \dots, N}} e^{-\beta \overline{H}(\sigma)} \quad (1.2)$$

называется статистической суммой модели Изинга. Согласно [5] (гл. III, формулы (2.10), (2.13))

$$\begin{aligned} Z_N(E, H) &= (\lambda_+(E, H))^N + (\lambda_-(E, H))^N, \\ \lambda_{\pm}(E, H) &= e^{\beta E} (\operatorname{ch} \beta H \pm (\operatorname{sh}^2 \beta H + e^{-4\beta E})^{1/2}). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Согласно [5] (гл. II, формула (4.5)) средняя полная намагниченность равна

$$\overline{M}_N(E, H) = \beta^{-1} \frac{\partial}{\partial H} \ln Z_N(E, H). \quad (1.4)$$

Из соотношений (1.3) следует

$$\overline{M}_N(E, H) = NM(E, H) + o(N), \quad (1.5)$$

где коэффициент

$$M(E, H) = (\operatorname{sh}^2 \beta H + e^{-4\beta E})^{-1/2} \operatorname{sh} \beta H \quad (1.6)$$

называется намагниченностью на один спин. Поскольку $M(E, 0) = 0$, то спонтанная намагниченность в этой модели отсутствует.

Энергия магнитного поля в выражении (1.1) пропорциональна величине

$$\sum_{k=1}^N (H(k))^2 = NH^2. \quad (1.7)$$

Эта энергия стремится к бесконечности при $N \rightarrow \infty$. Мы будем рассматривать задачу, когда при стремлении числа частиц N к бесконечности магнитное поле $H(k)$ стремится к нулю по закону $H(k) = N^{-1/2} H$. В этом случае общая энергия является постоянной. Из соотношений (1.3) следует

$$m(E, H) = \lim_{N \rightarrow \infty} \beta^{-1} \frac{\partial}{\partial H} \ln Z_N(E, N^{-1/2} H) = \beta H e^{2\beta E}. \quad (1.8)$$

Величину (1.8) назовем спонтанной намагниченностью постоянным магнитным полем с конечной энергией (1.7) в одномерной модели Изинга.

Ниже мы вычислим спонтанную намагниченность постоянным магнитным полем с конечной энергией в двумерной модели Изинга со свободными граничными условиями.

2. НАМАГНИЧЕННОСТЬ

Рассмотрим прямоугольную решетку на плоскости, образованную вершинами с целыми декартовыми координатами $x = k_1$, $y = k_2$, $M'_i \leq k_i \leq M_i$, $i = 1, 2$, и соответствующими горизонтальными и вертикальными ребрами, соединяющими соседние вершины. Обозначим этот граф $G(M'_1, M'_2; M_1, M_2)$. Клеточным комплексом $P(G)$ называется множество, состоящее из клеток (вершин, ребер, граней). Вершина комплекса $P(G)$ называется клеткой размерности 0, она обозначается s_i^0 . Ребро комплекса $P(G)$ называется клеткой размерности 1, она обозначается s_i^1 . Грань комплекса $P(G)$ называется клеткой размерности 2, она обозначается s_i^2 . Обозначим $\mathbb{Z}_2^{\text{add}}$ группу вычетов по модулю 2. Вычеты по модулю 2 можно перемножать между собой, и группа $\mathbb{Z}_2^{\text{add}}$ является полем. Любой паре клеток s_i^p, s_j^{p-1} соответствует число $(s_i^p : s_j^{p-1}) \in \mathbb{Z}_2^{\text{add}}$ (число инцидентности). Если клетка s_j^{p-1} входит в границу клетки s_i^p , то число инцидентности $(s_i^p : s_j^{p-1}) = 1$. В противном случае $(s_i^p : s_j^{p-1}) = 0$. Для любой пары клеток s_i^2, s_j^0 числа инцидентности удовлетворяют условию

$$\sum_m (s_i^2 : s_m^1)(s_m^1 : s_j^0) = 0 \pmod{2}. \quad (2.1)$$

В самом деле, если вершина s_j^0 не входит в границу квадрата s_i^2 , то условие (2.1) выполнено. Если вершина s_j^0 входит в границу квадрата s_i^2 , то она входит в границы четырех ребер s_m^1 , два из которых входят в границу квадрата s_i^2 . Условие (2.1) опять выполнено.

Конечью c^p комплекса $P(G)$ с коэффициентами в группе $\mathbb{Z}_2^{\text{add}}$ называется функция на p -мерных клетках, принимающая значения в группе $\mathbb{Z}_2^{\text{add}}$. Обычно рассматривается ориентация клеток и коцепи являются антисимметричными функциями: $c^p(-s_i^p) = -c^p(s_i^p)$. Однако $-1 = 1 \pmod{2}$, и для коэффициентов в группе $\mathbb{Z}_2^{\text{add}}$ мы можем пренебречь ориентацией клеток. Концепи образуют абелеву группу

$$(c^p + c'^p)(s_i^p) = c^p(s_i^p) + c'^p(s_i^p) \pmod{2}. \quad (2.2)$$

Обозначим ее $C^p(P(G), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$. Отображение

$$\partial c^p(s_i^{p-1}) = \sum_j (s_j^p : s_i^{p-1}) c^p(s_j^p) \pmod{2} \quad (2.3)$$

определяет гомоморфизм группы $C^p(P(G), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$ в группу $C^{p-1}(P(G), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$. Он называется граничным оператором. Отображение

$$\partial^* c^p(s_i^{p+1}) = \sum_j (s_i^{p+1} : s_j^p) c^p(s_j^p) \pmod{2} \quad (2.4)$$

определяет гомоморфизм группы $C^p(P(G), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$ в группу $C^{p+1}(P(G), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$. Он называется кограничным оператором. Из условия (2.1) следует $\partial \partial = 0$, $\partial^* \partial^* = 0$. Ядро $Z_p(P(G), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$ гомоморфизма (2.3) на группе $C^p(P(G), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$ называется группой циклов комплекса $P(G)$ с коэффициентами в группе $\mathbb{Z}_2^{\text{add}}$. Образ $B_p(P(G), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$ гомоморфизма (2.3) в группе $C^p(P(G), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$ называется группой границ комплекса $P(G)$ с

коэффициентами в группе $\mathbb{Z}_2^{\text{add}}$. Поскольку $\partial\partial = 0$, то группа $B_p(P(G), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$ является подгруппой группы $Z_p(P(G), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$. Аналогично для кограничного оператора ∂^* определяются группа коциклов $Z^p(P(G), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$ и группа кограниц $B^p(P(G), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$.

На группе $C^p(P(G), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$ можно ввести билинейную форму:

$$\langle f^p, g^p \rangle = \sum_i f^p(s_i^p) g^p(s_i^p) \pmod{2}. \quad (2.5)$$

Из определений (2.3), (2.4) следует

$$\begin{aligned} \langle f^p, \partial^* g^{p-1} \rangle &= \langle \partial f^p, g^{p-1} \rangle, \\ \langle f^p, \partial g^{p+1} \rangle &= \langle \partial^* f^p, g^{p+1} \rangle. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Пусть задана коцепь $\sigma \in C^0(P(G), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$. Функция

$$\bar{H}(\sigma) = - \sum_{s_i^1 \in P(G)} E(s_i^1) (-1)^{\partial^* \sigma(s_i^1)} - \sum_{s_i^0 \in P(G)} H(s_i^0) (-1)^{\sigma(s_i^0)} \quad (2.7)$$

называется энергией в модели Изинга с магнитным полем. Число $E(s_i^1)$ называется энергией взаимодействия, соответствующей ребру s_i^1 . Число $H(s_i^0) = H$ — это магнитное поле, соответствующее вершине s_i^0 .

Функция

$$Z_G(H) = \sum_{\sigma \in C^0(P(G), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})} e^{-\beta \bar{H}(\sigma)} \quad (2.8)$$

называется статистической суммой модели Изинга с магнитным полем.

Пусть коцепь $\chi \in C^0(P(G), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$ принимает значение 1 на вершинах $s_1^0, \dots, s_m^0$ и равно нулю на всех остальных вершинах графа $G(M'_1, M'_2; M_1, M_2)$. Корреляционной функцией на вершинах $s_1^0, \dots, s_m^0$ решетки $G(M'_1, M'_2; M_1, M_2)$ называется функция

$$W_G(\chi, H) = (Z_G(H))^{-1} \sum_{\sigma \in C^0(P(G), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})} (-1)^{\langle \chi, \sigma \rangle} e^{-\beta \bar{H}(\sigma)}. \quad (2.9)$$

Предположим, что для постоянного магнитного поля величина

$$\sum_{s_i^0 \in P(G)} (H(s_i^0))^2 \quad (2.10)$$

не зависит от размеров решетки $G(M'_1, M'_2; M_1, M_2)$. Следовательно,

$$H(s_i^0) = (\#(VG))^{-1/2} H, \quad (2.11)$$

где $\#(VG)$ — это общее число вершин графа $G(M'_1, M'_2; M_1, M_2)$, H — константа.

Аналогично определению (1.8) мы определим спонтанную намагниченность постоянным магнитным полем с конечной энергией (2.10) как

$$m_G(H) = \beta^{-1} \frac{\partial}{\partial H} \ln Z_G((\#(VG))^{-1/2} H). \quad (2.12)$$

Легко проверить, что для $\epsilon = 0, 1$

$$e^{\beta E(s_i^1)(-1)^\epsilon} = \text{ch } \beta E(s_i^1) \sum_{\xi=0,1} (-1)^{\xi\epsilon} (\text{th } \beta E(s_i^1))^{(1-(-1)^\xi)/2}. \quad (2.13)$$

Из равенств (2.6), (2.13) следует

$$\begin{aligned} \exp \left\{ \beta \sum_{s_i^1 \in P(G)} E(s_i^1) (-1)^{\partial^* \sigma(s_i^1)} \right\} &= \left(\prod_{s_i^1 \in P(G)} \text{ch } \beta E(s_i^1) \right) \times \\ &\times \sum_{\xi^1 \in C^1(P(G), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})} (-1)^{\langle \sigma, \partial \xi^1 \rangle} \prod_{s_i^1 \in P(G)} (\text{th } \beta E(s_i^1))^{(1-(-1)^{\xi^1(s_i^1)})/2}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \exp \left\{ \beta (\#(VG))^{-1/2} H \sum_{s_i^0 \in P(G)} (-1)^{\sigma(s_i^0)} \right\} &= (\text{ch } \beta (\#(VG))^{-1/2} H)^{\#(VG)} \times \\ &\times \sum_{\xi^0 \in C^0(P(G), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})} (-1)^{\langle \sigma, \xi^0 \rangle} (\text{th } \beta (\#(VG))^{-1/2} H)^{\sum_{s_i^0 \in P(G)} (1-(-1)^{\xi^0(s_i^0)})/2}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

С помощью подстановки равенств (2.14), (2.15) и соотношения

$$\sum_{\xi=0,1} (-1)^{\xi\epsilon} = \begin{cases} 2, & \epsilon = 0, \\ 0, & \epsilon = 1, \end{cases} \quad (2.16)$$

в определении (2.8) получаем

$$\begin{aligned} Z_G((\#(VG))^{-1/2} H) &= 2^{\#(VG)} (\text{ch } \beta (\#(VG))^{-1/2} H)^{\#(VG)} \times \\ &\times \left(\prod_{s_i^1 \in P(G)} \text{ch } \beta E(s_i^1) \right) Z_{r,G}((\#(VG))^{-1/2} H), \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} Z_{r,G}((\#(VG))^{-1/2} H) &= \sum_{\xi^1 \in C^1(P(G), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})} \left(\prod_{s_i^1 \in P(G)} (\text{th } \beta E(s_i^1))^{(1-(-1)^{\xi^1(s_i^1)})/2} \right) \times \\ &\times (\text{th } \beta (\#(VG))^{-1/2} H)^{\sum_{s_i^0 \in P(G)} (1-(-1)^{\partial \xi^1(s_i^0)})/2}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

При $H = 0$ сумму (2.8) обозначим Z_G , сумму (2.9) — $W_G(\chi)$ и сумму (2.18) — $Z_{r,G}$. Из соотношения (2.18) следует

$$Z_{r,G} = \sum_{\xi^1 \in Z_1(P(G), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})} \prod_{s_i^1 \in P(G)} (\text{th } \beta E(s_i^1))^{(1-(-1)^{\xi^1(s_i^1)})/2}. \quad (2.19)$$

В силу предложения 3.1 из работы [7]

$$W_G(\chi) = (Z_{r,G})^{-1} \sum_{\substack{\xi^1 \in C^1(P(G), \mathbb{Z}_2^{\text{add}}) \\ \partial \xi^1 = \chi}} \prod_{s_i^1 \in P(G)} (\text{th } \beta E(s_i^1))^{(1-(-1)^{\xi^1(s_i^1)})/2}. \quad (2.20)$$

Подставив равенство (2.20) в (2.18), получаем

$$\begin{aligned} (Z_{r,G})^{-1} Z_{r,G}((\#(VG))^{-1/2} H) = \\ = \sum_{\xi^0 \in B_0(P(G), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})} W_G(\xi^0) (\text{th } \beta(\#(VG))^{-1/2} H)^{\sum_{s_i^0 \in P(G)} (1 - (-1)^{\xi^0(s_i^0)})/2}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Сумма (2.19) не зависит от H . Поэтому из определения (2.12) и соотношения (2.17) следует

$$\begin{aligned} m_G(H) &= \beta^{-1} \frac{\partial}{\partial H} \ln((Z_{r,G})^{-1} Z_{r,G}((\#(VG))^{-1/2} H)) = \\ &= (\#(VG))^{1/2} \text{th } \beta(\#(VG))^{-1/2} H + \\ &\quad + \beta^{-1} \frac{\partial}{\partial H} \ln((Z_{r,G})^{-1} Z_{r,G}((\#(VG))^{-1/2} H)), \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\lim_{G \rightarrow \mathbb{Z} \times 2} m_G(H) = \beta H + \lim_{G \rightarrow \mathbb{Z} \times 2} \beta^{-1} \frac{\partial}{\partial H} \ln((Z_{r,G})^{-1} Z_{r,G}((\#(VG))^{-1/2} H)). \quad (2.23)$$

Рассмотрим функцию (2.21). Коцепь $\xi^0 \in B_0(P(G), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$ принимает значение 1 лишь на концах ломаных. Любая ломаная имеет два конца. Поэтому коцепь ξ^0 принимает значение 1 на четном числе вершин. Обратно, поскольку граф $G(M'_1, M'_2; M_1, M_2)$ линейно-связный, то любое четное число вершин могут быть попарно связаны ломаными. Пусть коцепь ξ^0 равна единице на четном числе вершин. Тогда она является границей коцепи ξ^1 , которая равна единице на ребрах этих ломаных. Таким образом, группа $B_0(P(G), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$ состоит из коцепей

$$\xi^0 = \sum_{j=1}^{2k} \delta^0[s_{ij}^0], \quad (2.24)$$

$$\delta^0[s_i^0](s_j^0) = \delta_{ij}. \quad (2.25)$$

Следовательно, соотношение (2.21) может быть переписано в виде

$$\begin{aligned} (Z_{r,G})^{-1} Z_{r,G}((\#(VG))^{-1/2} H) &= 1 + \sum_{k=1}^{[\frac{1}{2}\#(VG)]} (\text{th } \beta(\#(VG))^{-1/2} H)^{2k} \frac{1}{(2k)!} \times \\ &\quad \times \sum_{\substack{s_{i_1}^0 \neq \dots \neq s_{i_{2k}}^0 \\ s_{i_j}^0 \in P(G)}} W_G\left(\sum_{j=1}^{2k} \delta^0[s_{ij}^0]\right), \end{aligned} \quad (2.26)$$

поскольку перестановка вершин s_{ij}^0 не меняет коцепи $\sum_{j=1}^{2k} \delta^0[s_{ij}^0]$.

Коцепь $\xi^1 \in C^1(P(G), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$ называется неориентированным путем, соединяющим вершины s_i^0 и s_j^0 , если

$$\partial \xi^1 = \delta^0[s_i^0] + \delta^0[s_j^0] \quad (2.27)$$

и любое ребро пути соединено в любой вершине не более чем с одним другим ребром пути. Любая коцепь из группы $C^1(P(G), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$ может быть представлена как сумма неориентированных путей. Эти неориентированные пути не имеют общих ребер. Если мы предположим, что эти неориентированные пути самопересекаются трансверсально и пересекают друг друга трансверсально, то такое представление единственно. Для получения этого представления достаточно рассмотреть два случая: коцепь ξ^1 из группы $C^1(P(G), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$ равна единице на трех или четырех ребрах, инцидентных одной вершине. Пусть коцепь равна единице на трех ребрах, инцидентных одной вершине. Два ребра из этих трех ребер вертикальны или горизонтальны. Мы соединим эти два ребра в одном неориентированном пути. Пусть теперь коцепь равна единице на четырех ребрах, инцидентных одной вершине. Два ребра из этих четырех ребер горизонтальны и оставшиеся два ребра вертикальны. Мы соединим горизонтальные ребра в одном неориентированном пути и соединим вертикальные ребра в другом, вообще говоря, неориентированном пути. Таким образом, множество ребер, на которых коцепь равна единице, распадается в семейство неориентированных путей. По построению неориентированные пути самопересекаются трансверсально и пересекают друг друга трансверсально. Следовательно,

$$\xi^1 = \sum_{i=1}^m \xi_i^1 + \sum_{j=1}^n \eta_j^1, \quad (2.28)$$

где ξ_i^1 – неориентированный путь, соединяющий две вершины, и η_j^1 – замкнутый неориентированный путь. Неориентированные пути ξ_i^1, η_j^1 самопересекаются трансверсально и пересекают друг друга трансверсально.

Обозначим $j_1(\xi^1)$ ($j_2(\xi^1)$) коцепь, которая равна единице на горизонтальных (вертикальных) ребрах, инцидентных вершинам, которые инцидентны горизонтальным (вертикальным) ребрам, на которых коцепь ξ^1 равна единице. Определим

$$j(\xi^1) = j_1(\xi^1) + j_2(\xi^1). \quad (2.29)$$

Носитель $\|\xi^1\|$ – это множество всех ребер графа $G(M'_1, M'_2; M_1, M_2)$, на которых коцепь ξ^1 принимает значение 1. Неориентированные пути ξ_i^1, η_j^1 (2.28) пересекают друг друга трансверсально. Это условие можно записать в виде

$$\|j(\xi_i^1)\| \cap \|\eta_j^1\| = \emptyset. \quad (2.30)$$

Пользуясь равенством (2.28), мы перепишем соотношение (2.20) в следующем виде:

$$W_G(\chi) = \sum_{\sum_i \partial \xi_i^1 = \chi} \left(\prod_{i=1}^{m(\chi)} (\text{th } \beta E)^{\xi_i^1} \right) (Z_{r,G})^{-1} Z_{r,G'}, \quad (2.31)$$

$$(\text{th } \beta E)^{\xi^1} = \prod_{s_i^1 \in P(G)} (\text{th } \beta E(s_i^1))^{(1 - (-1)^{\xi^1(s_i^1)})/2}, \quad (2.32)$$

$$G' = G \setminus \bigcup_{i=1}^{m(\chi)} \|j(\xi_i^1)\|, \quad (2.33)$$

где в равенстве (2.31) суммирование идет по множеству неориентированных путей ξ_i^1 , соединяющих попарно вершины, на которых коцепь χ равна единице. Эти неориентированные пути ξ_i^1 не имеют общих ребер, самопересекаются трансверсально и пересекают друг друга трансверсально. Если число вершин, на которых коцепь χ принимает значение 1, равно $2m(\chi)$, то число этих неориентированных путей ξ_i^1 равно $m(\chi)$. Граф (2.33) получается из графа $G(M'_1, M'_2; M_1, M_2)$ путем удаления всех ребер из носителей $\|j(\xi_i^1)\|$, $i = 1, \dots, m(\chi)$. Для любого графа G' , вложенного в прямоугольную решетку $G(M'_1, M'_2; M_1, M_2)$, можно определить клеточный комплекс $P(G')$. Тогда редуцированная статистическая сумма $Z_{r,G'}$ определяется соотношением (2.19).

Представим ребро s_i^1 решетки $G(M'_1, M'_2; M_1, M_2)$ как пару $\{\mathbf{p}, \mathbf{e}\}$, где $\mathbf{p}$ – начальная вершина, а единичный вектор $\mathbf{e}$ – направление ребра. Единичный вектор $\mathbf{e}$ – это один из четырех векторов: $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$. Поскольку ребро неориентированное, то $\{\mathbf{p} + \mathbf{e}, -\mathbf{e}\} = \{\mathbf{p}, \mathbf{e}\}$. Начальная вершина $\mathbf{p}$ и конечная вершина $\mathbf{p} + \mathbf{e}$ ребра $\{\mathbf{p}, \mathbf{e}\}$ являются вершинами графа $G(M'_1, M'_2; M_1, M_2)$. Поэтому компоненты p^i , $i = 1, 2$, являются целыми числами, причем $M'_i \leq p^i \leq M_i$, $M'_i \leq p^i + e^i \leq M_i$, $i = 1, 2$.

Представим ориентированное ребро решетки $G(M'_1, M'_2; M_1, M_2)$ как пару $(\mathbf{p}, \mathbf{e})$, где $\mathbf{p}$ – начальная вершина ориентированного ребра, а единичный вектор $\mathbf{e}$ – направление ребра. Пусть $\#(\mathbf{E}G)$ – число всех ориентированных ребер графа $G(M'_1, M'_2; M_1, M_2)$. Определим $(\#(\mathbf{E}G) \times \#(\mathbf{E}G))$ -матрицу

$$T_{(p_1, e_1), (p_2, e_2)} = \begin{cases} e^{i(\widehat{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2})/2} \operatorname{th} \beta E(\{\mathbf{p}_1, \mathbf{e}_1\}), & \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{p}_1 \neq \mathbf{p}_2 + \mathbf{e}_2, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (2.34)$$

где $\widehat{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)}$ – радианная мера угла между направлениями единичных векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$. Согласно работе [8]

$$(Z_{r,G})^2 = \det(I - T), \quad (2.35)$$

где редуцированная статистическая сумма $Z_{r,G}$ задается соотношением (2.19) и I – единичная $(\#(\mathbf{E}G) \times \#(\mathbf{E}G))$ -матрица. Формула (2.35) получена для произвольного графа G , вложенного в решетку на плоскости. Предположим, что граф G вложен в решетку $G(M'_1, M'_2; M_1, M_2)$. Пусть оценка

$$|\operatorname{th} \beta E(\{\mathbf{p}, \mathbf{e}\})| < \frac{1}{3} \quad (2.36)$$

справедлива для любого ребра графа G . Тогда

$$\det(I - T) = \exp \left\{ - \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} \operatorname{tr} T^k \right\}. \quad (2.37)$$

Замкнутый путь – это такая последовательность ориентированных ребер $C = ((\mathbf{p}_1, \mathbf{e}_1), \dots, (\mathbf{p}_k, \mathbf{e}_k))$, что

$$\mathbf{p}_{i+1} = \mathbf{p}_i + \mathbf{e}_i, \quad i = 1, \dots, k-1, \quad \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_k + \mathbf{e}_k. \quad (2.38)$$

Число $|C| = k$ называется длиной замкнутого пути $C = ((\mathbf{p}_1, \mathbf{e}_1), \dots, (\mathbf{p}_k, \mathbf{e}_k))$. Носитель $\|C\|$ — это множество всех ребер $\{\mathbf{p}, \mathbf{e}\}$ таких, что одно из ориентированных ребер $(\mathbf{p}, \mathbf{e})$ или $(\mathbf{p} + \mathbf{e}, -\mathbf{e})$ входит в путь C . Замкнутый путь $((\mathbf{p}_1, \mathbf{e}_1), \dots, (\mathbf{p}_k, \mathbf{e}_k))$ называется редуцированным, если он удовлетворяет следующему условию:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{i+1} &= \mathbf{p}_i + \mathbf{e}_i, & \mathbf{p}_{i+1} + \mathbf{e}_{i+1} &\neq \mathbf{p}_i, & i &= 1, \dots, k-1, \\ \mathbf{p}_1 &= \mathbf{p}_k + \mathbf{e}_k, & \mathbf{p}_1 + \mathbf{e}_1 &\neq \mathbf{p}_k. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Множество всех редуцированных замкнутых путей графа G обозначим $RC(G)$. Любому редуцированному замкнутому пути $C = ((\mathbf{p}_1, \mathbf{e}_1), \dots, (\mathbf{p}_k, \mathbf{e}_k))$ на графе G соответствует полный угол, на который поворачивается касательный вектор пути C при прохождении пути C :

$$\phi(C) = (\widehat{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2}) + (\widehat{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3}) + \dots + (\widehat{\mathbf{e}_{k-1}, \mathbf{e}_k}) + (\widehat{\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_1}). \quad (2.40)$$

Согласно работе [7]

$$\mathrm{tr} T^k = \sum_{\substack{C \in RC(G) \\ |C|=k}} e^{i\phi(C)/2} (\mathrm{th} \beta E)^C, \quad (2.41)$$

$$(\mathrm{th} \beta E)^C = \prod_{(p, e) \in C} \mathrm{th} \beta E(\{\mathbf{p}, \mathbf{e}\}). \quad (2.42)$$

С помощью подстановки (2.41) в равенства (2.35), (2.37) получаем

$$(Z_{r,G})^2 = \exp \left\{ - \sum_{C \in RC(G)} |C|^{-1} e^{i\phi(C)/2} (\mathrm{th} \beta E)^C \right\}. \quad (2.43)$$

В силу определения угла $\phi(C) = 2\pi k$, где k — целое число. Поэтому число $e^{i\phi(C)/2}$ вещественно. Согласно определениям (2.8), (2.17) число $Z_{r,G}$ положительно. Таким образом, из равенства (2.43) следует

$$Z_{r,G} = \exp \left\{ - \frac{1}{2} \sum_{C \in RC(G)} |C|^{-1} e^{i\phi(C)/2} (\mathrm{th} \beta E)^C \right\}. \quad (2.44)$$

По определению редуцированный замкнутый путь не содержит противоположно ориентированных ребер $(\mathbf{p}, \mathbf{e})$, $(\mathbf{p} + \mathbf{e}, -\mathbf{e})$, если они входят последовательно или являются первым и последним ориентированными ребрами замкнутого пути. Замкнутый путь называется полностью редуцированным, если он не содержит противоположно ориентированных ребер $(\mathbf{p}, \mathbf{e})$, $(\mathbf{p} + \mathbf{e}, -\mathbf{e})$ на любом месте. Множество всех полностью редуцированных замкнутых путей графа G обозначим $CRC(G)$.

ТЕОРЕМА. Пусть граф G вложен в прямоугольную решетку $G(M'_1, M'_2; M_1, M_2)$ на плоскости. Пусть любому редуцированному замкнутому пути C на графе G соответствуют число $\phi(C)$, заданное соотношением (2.40), и число $(\text{th } \beta E)^C$, заданное соотношением (2.42). Если справедлива оценка (2.36), то

$$\sum_{C \in RC(G)} |C|^{-1} e^{i\phi(C)/2} (\text{th } \beta E)^C = \sum_{C \in CRC(G)} |C|^{-1} e^{i\phi(C)/2} (\text{th } \beta E)^C, \quad (2.45)$$

где в левой части суммирование идет по множеству $RC(G)$ всех редуцированных замкнутых путей на графе G , а в правой части – по множеству $CRC(G)$ всех полностью редуцированных замкнутых путей на графе G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим на графе G редуцированный замкнутый путь с фиксированной начальной вершиной. При выборе первого ориентированного ребра у нас есть четыре возможности. При выборе другого ориентированного ребра число возможностей не превышает трех. Таким образом, общее число редуцированных замкнутых путей длины l , начинающихся в фиксированной вершине, не превышает $4 \cdot 3^{l-1}$. Поэтому ряд (2.45) абсолютно сходится, если справедлива оценка (2.36).

Пусть редуцированный замкнутый путь

$$C = ((\mathbf{p}_1, \mathbf{e}_1), \dots, (\mathbf{p}_p, \mathbf{e}_p), (\mathbf{p}, \mathbf{e}), (\mathbf{p}_{p+1}, \mathbf{e}_{p+1}), \dots, (\mathbf{p}_{p+q}, \mathbf{e}_{p+q}), (\mathbf{p} + \mathbf{e}, -\mathbf{e}), (\mathbf{p}_{p+q+1}, \mathbf{e}_{p+q+1}), \dots, (\mathbf{p}_{p+q+r}, \mathbf{e}_{p+q+r}))$$

содержит противоположно ориентированные ребра $(\mathbf{p}, \mathbf{e})$ и $(\mathbf{p} + \mathbf{e}, -\mathbf{e})$. Тогда замкнутый путь

$$C' = ((\mathbf{p}_1, \mathbf{e}_1), \dots, (\mathbf{p}_p, \mathbf{e}_p), (\mathbf{p}, \mathbf{e}), (\mathbf{p}_{p+q} + \mathbf{e}_{p+q}, -\mathbf{e}_{p+q}), \dots, (\mathbf{p}_{p+1} + \mathbf{e}_{p+1}, -\mathbf{e}_{p+1}), (\mathbf{p} + \mathbf{e}, -\mathbf{e}), (\mathbf{p}_{p+q+1}, \mathbf{e}_{p+q+1}), \dots, (\mathbf{p}_{p+q+r}, \mathbf{e}_{p+q+r}))$$

также является редуцированным. Из определения длины пути и определения (2.42) следует

$$|C| = |C'|, \quad (\text{th } \beta E)^C = (\text{th } \beta E)^{C'}. \quad (2.46)$$

С помощью определения (2.40) получаем

$$\phi(C) = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3, \quad (2.47)$$

$$\phi_1 = \sum_{i=1}^{p-1} (\widehat{\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{i+1}}) + (\widehat{\mathbf{e}_p, \mathbf{e}}), \quad (2.48)$$

$$\phi_2 = (\widehat{\mathbf{e}, \mathbf{e}_{p+1}}) + \sum_{i=p+1}^{p+q-1} (\widehat{\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{i+1}}) + (\widehat{\mathbf{e}_{p+q}, -\mathbf{e}}), \quad (2.49)$$

$$\phi_3 = (-\widehat{\mathbf{e}, \mathbf{e}_{p+q+1}}) + \sum_{i=p+q+1}^{p+q+r-1} (\widehat{\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_{i+1}}) + (\widehat{\mathbf{e}_{p+q+r}, \mathbf{e}_1}). \quad (2.50)$$

Легко проверить соотношение

$$(\widehat{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2}) = -(\widehat{-\mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_1}). \quad (2.51)$$

Из определения (2.40) и соотношения (2.51) следует

$$\phi(C') = \phi_1 - \phi_2 + \phi_3. \quad (2.52)$$

В силу определения (2.49) $\phi_2 = (2k+1)\pi$, где k — целое число. Следовательно, $e^{-i\phi_2/2} = -e^{i\phi_2/2}$. Из соотношений (2.47), (2.52) следует

$$e^{i\phi(C)/2} = -e^{i\phi(C')/2}. \quad (2.53)$$

В силу соотношений (2.46), (2.53) все слагаемые в правой части (2.45), соответствующие редуцированным замкнутым путям C , содержащим противоположно ориентированные ребра $(\mathbf{p}, \mathbf{e})$ и $(\mathbf{p} + \mathbf{e}, -\mathbf{e})$, сокращают друг друга. Теорема доказана.

Поскольку соотношения (2.44), (2.45) справедливы для любого графа, вложенного в прямоугольную решетку $G(M'_1, M'_2; M_1, M_2)$, то

$$(Z_{r,G})^{-1} Z_{r,G'} = \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\substack{C \in CRC(G) \\ \|C\| \cap \bigcup_i \|j(\xi_i^1)\| \neq \emptyset}} |C|^{-1} e^{i\phi(C)/2} (\text{th } \beta E)^C \right\}, \quad (2.54)$$

где граф G' определен соотношением (2.33) и справедлива оценка (2.36).

С помощью подстановки (2.54) в равенство (2.31) получаем

$$\begin{aligned} W_G(\chi) = & \sum_{\sum_i \partial \xi_i^1 = \chi} \left(\prod_{i=1}^{m(\chi)} (\text{th } \beta E)^{\xi_i^1} \right) \times \\ & \times \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\substack{C \in CRC(G) \\ \|C\| \cap \bigcup_i \|j(\xi_i^1)\| \neq \emptyset}} |C|^{-1} e^{i\phi(C)/2} (\text{th } \beta E)^C \right\}, \end{aligned} \quad (2.55)$$

где суммирование идет по множеству неориентированных путей ξ_i^1 , соединяющих попарно вершины, на которых коцень χ равна единице. Эти неориентированные пути не имеют общих ребер, самопересекаются трансверсально и пересекают друг друга трансверсально. Если число вершин, на которых коцень χ принимает значение 1, равно $2m(\chi)$, то число этих неориентированных путей ξ_i^1 равно $m(\chi)$.

3. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ ПРЕДЕЛ

В этом разделе мы изучим предел формул (2.26), (2.55) при стремлении графа $G(M'_1, M'_2; M_1, M_2)$ к бесконечному графу $\mathbb{Z}^{\times 2}$, т.е. при $M'_i \rightarrow -\infty$, $M_i \rightarrow \infty$, $i = 1, 2$.

Построим на графе $\mathbb{Z}^{\times 2}$ редуцированный замкнутый путь с фиксированной начальной вершиной. При выборе первого ориентированного ребра у нас есть четыре возможности. При выборе другого ориентированного ребра число возможностей не превышает трех. Таким образом, общее число редуцированных замкнутых путей длины l , начинающихся в фиксированной вершине, не превышает $4 \cdot 3^{l-1}$. Поэтому ряд

$$\sum_{\substack{C \in CRC(\mathbb{Z}^{\times 2}) \\ \|C\| \cap \bigcup_i \|j(\xi_i^1)\| \neq \emptyset}} |C|^{-1} e^{i\phi(C)/2} (\text{th } \beta E)^C \quad (3.1)$$

абсолютно сходится, если справедлива оценка (2.36).

Мы предполагаем, что все значения энергии взаимодействия $E(\{\mathbf{p}, \mathbf{e}\})$, соответствующие вертикальным (горизонтальным) ребрам $\{\mathbf{p}, \mathbf{e}\}$, имеют один и тот же знак. Любой замкнутый путь C на решетке $\mathbb{Z}^{\times 2}$ содержит четное число вертикально направленных ребер и четное число горизонтально направленных ребер. Следовательно,

$$(\text{th } \beta E)^C \geq 0. \quad (3.2)$$

Любой цикл $\xi^1 \in Z_1(P(G), \mathbb{Z}_2^{\text{add}})$ графа G , вложенного в решетку $\mathbb{Z}^{\times 2}$, может быть представлен в виде семейства замкнутых неориентированных путей на решетке $\mathbb{Z}^{\times 2}$. Эти неориентированные пути самопересекаются трансверсально и пересекают друг друга трансверсально. Поэтому из неравенства (3.2) следует

$$(\text{th } \beta E)^{\xi^1} \geq 0. \quad (3.3)$$

Из равенства (2.19) и неравенства (3.3) следует

$$(Z_{r,G})^{-1} Z_{r,G'} \leq 1, \quad (3.4)$$

где граф G' определяется соотношением (2.33). С помощью неравенства (3.4) и равенства (2.31) для $G \rightarrow \mathbb{Z}^{\times 2}$ мы получаем оценку

$$|W_{\mathbb{Z}^{\times 2}}(\chi)| \leq \sum_{\sum_i \partial \xi_i^1 = \chi} \prod_{i=1}^{m(\chi)} |(\text{th } \beta E)^{\xi_i^1}|, \quad (3.5)$$

где суммирование идет по множеству неориентированных путей ξ_i^1 , соединяющих попарно вершины, на которых коцепь χ равна единице. Эти неориентированные пути не имеют общих ребер, самопересекаются трансверсально и пересекают друг друга трансверсально. Если число вершин, на которых коцепь χ принимает значение 1, равно $2m(\chi)$, то число этих неориентированных путей ξ_i^1 равно $m(\chi)$. Для фиксированной коцепи χ ряд (3.5) абсолютно сходится, если справедлива оценка (2.36). Следовательно, для

$G \rightarrow \mathbb{Z}^{\times 2}$ сумма (2.55) для фиксированной коцепи χ стремится к абсолютно сходящемуся ряду

$$W_{\mathbb{Z}^{\times 2}}(\chi) = \sum_{\sum_i \partial \xi_i^1 = \chi} \left(\prod_{i=1}^{m(\chi)} (\text{th } \beta E)^{\xi_i^1} \right) \times \\ \times \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\substack{C \in CRC(\mathbb{Z}^{\times 2}) \\ \|C\| \cap \bigcup_i \|j(\xi_i^1)\| \neq \emptyset}} |C|^{-1} e^{i\phi(C)/2} (\text{th } \beta E)^C \right\}. \quad (3.6)$$

Клетки s_i^0 являются вершинами графа $G(M'_1, M'_2; M_1, M_2)$, или векторами $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ с целыми компонентами, причем $M'_i \leq p^i \leq M_i$, $i = 1, 2$. Введем коцепь $\delta^0[\mathbf{p}]$ аналогично определению (2.25):

$$\delta^0[\mathbf{p}](\mathbf{q}) = \delta_{p^1, q^1} \delta_{p^2, q^2}. \quad (3.7)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть энергия взаимодействия $E(\{\mathbf{p}, \mathbf{e}\})$ зависит лишь от направления (горизонтального либо вертикального) ребра $\{\mathbf{p}, \mathbf{e}\}$. Пусть справедлива оценка (2.36). Тогда

$$\lim_{G \rightarrow \mathbb{Z}^{\times 2}} (Z_{r,G})^{-1} Z_{r,G} ((\#(VG))^{-1/2} H) = \\ = \exp \left\{ \frac{(\beta H)^2}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}^{\times 2}, p \neq 0} W_{\mathbb{Z}^{\times 2}}(\delta^0[\mathbf{0}] + \delta^0[\mathbf{p}]) \right\}, \quad (3.8)$$

где корреляционная функция $W_{\mathbb{Z}^{\times 2}}(\chi)$ определяется соотношением (3.6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разобьем числа $1, \dots, 2l$ на l пар $i_1, j_1; \dots; i_l, j_l$, где $1 = i_1 < \dots < i_l$ и $i_1 < j_1, \dots, i_l < j_l$. Общее число таких разбиений равно $(2l)!(l!)^{-1}2^{-l}$. В соотношении (2.31) для корреляционной функции $W_G(\sum_{i=1}^{2l} \delta^0[\mathbf{p}_i])$ суммирование идет по множеству разбиений чисел $1, \dots, 2l$ и по множеству неориентированных путей $\xi_{i_1}^1, \dots, \xi_{i_l}^1$, соединяющих вершины $\mathbf{p}_{i_s}$ и $\mathbf{p}_{j_s}$, $s = 1, \dots, l$. Изменяя переменные суммирования, получаем

$$\sum_{\substack{p_1 \neq \dots \neq p_{2l} \\ p_i \in P(G)}} W_G \left(\sum_{i=1}^{2l} \delta^0[\mathbf{p}_i] \right) = 2^{-l} \frac{(2l)!}{l!} \times \\ \times \sum_{\substack{p_1 \neq \dots \neq p_{2l} \\ p_i \in P(G)}} \sum_{\substack{\partial \xi_i^1 = \delta^0[p_{2i-1}] + \delta^0[p_{2i}] \\ i=1, \dots, l}} \left(\prod_{i=1}^l (\text{th } \beta E)^{\xi_i^1} \right) (Z_{r,G})^{-1} Z_{r,G'}. \quad (3.9)$$

Отсюда и из оценки (3.4) следует

$$\left| \sum_{\substack{p_1 \neq \dots \neq p_{2l} \\ p_i \in P(G)}} W_G \left(\sum_{i=1}^{2l} \delta^0[\mathbf{p}_i] \right) \right| \leq \\ \leq 2^{-l} \frac{(2l)!}{l!} \left(\sum_{\substack{p_1 \neq p_2 \\ p_i \in P(G)}} \sum_{\partial \xi^1 = \delta^0[p_1] + \delta^0[p_2]} |(\text{th } \beta E)^{\xi^1}| \right)^l, \quad (3.10)$$

где в правой части вместо неориентированных путей $\xi_1^1, \dots, \xi_l^1$, которые самопересекаются и пересекают друг друга трансверсально, мы ввели неориентированные пути $\xi_1^1, \dots, \xi_l^1$, которые лишь самопересекаются трансверсально. Мы можем рассмотреть также такие неориентированные пути $\xi_1^1, \dots, \xi_l^1$ на решетке $\mathbb{Z}^{\times 2}$. Поскольку энергия взаимодействия $E(\{\mathbf{p}, \mathbf{e}\})$ зависит лишь от направления (горизонтального либо вертикального) ребра $\{\mathbf{p}, \mathbf{e}\}$, то в силу определения (2.32)

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{p_1 \neq p_2 \\ p_i \in P(G)}} \sum_{\partial \xi^1 = \delta^0[p_1] + \delta^0[p_2]} |(\text{th } \beta E)^{\xi^1}| = \\ & = \sum_{\substack{q \in \mathbb{Z}^{\times 2} \\ q \neq 0}} \sum_{\partial \xi^1 = \delta^0[0] + \delta^0[q]} |(\text{th } \beta E)^{\xi^1}| \sum_{\substack{p_1, p_2 \in P(G) \\ p_2 - p_1 = q}} 1. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Легко проверить, что

$$\sum_{\substack{p_1, p_2 \in P(G) \\ p_2 - p_1 = q}} 1 \leq \#(VG). \quad (3.12)$$

Из неравенств (3.10), (3.12) и равенства (3.11) следует

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{\substack{p_1 \neq \dots \neq p_{2l} \\ p_i \in P(G)}} W_G \left(\sum_{i=1}^{2l} \delta^0[\mathbf{p}_i] \right) \right| \leq \\ & \leq 2^{-l} \frac{(2l)!}{l!} (\#(VG))^l \left(\sum_{\substack{q \in \mathbb{Z}^{\times 2} \\ q \neq 0}} \sum_{\partial \xi^1 = \delta^0[0] + \delta^0[q]} |(\text{th } \beta E)^{\xi^1}| \right)^l, \end{aligned} \quad (3.13)$$

где второе суммирование в правой части идет по неориентированным путям ξ^1 на решетке $\mathbb{Z}^{\times 2}$, соединяющим вершины 0 и $\mathbf{q}$. Эти неориентированные пути самопересекаются трансверсально. В силу оценки (2.36) ряд

$$\sum_{\substack{q \in \mathbb{Z}^{\times 2} \\ q \neq 0}} \sum_{\partial \xi^1 = \delta^0[0] + \delta^0[q]} |(\text{th } \beta E)^{\xi^1}| \quad (3.14)$$

абсолютно сходится. С помощью (3.13) сумма (2.26) мажорируется абсолютно сходящимся рядом. Теперь достаточно рассмотреть почленную сходимость суммы (2.26).

Докажем, что для любого положительного числа L

$$\begin{aligned} & \lim_{G \rightarrow \mathbb{Z}^{\times 2}} (\#(VG))^{-k} \sum_{\substack{p_1 \neq \dots \neq p_{2k} \\ p_i \in P(G)}} W_G \left(\sum_{i=1}^{2k} \delta^0[\mathbf{p}_i] \right) = 2^{-k} \frac{(2k)!}{k!} \lim_{G \rightarrow \mathbb{Z}^{\times 2}} (\#(VG))^{-k} \times \\ & \times \sum_{\substack{p_1 \neq \dots \neq p_{2k}, p_i \in P(G); \\ |p_{2i} - p_{2j}| > L, 1 \leq i < j \leq k}} \sum_{\substack{\partial \xi_i^1 = \delta^0[p_{2i-1}] + \delta^0[p_{2i}] \\ i=1, \dots, k}} \left(\prod_{i=1}^k (\text{th } \beta E)^{\xi_i^1} \right) (Z_{r,G})^{-1} Z_{r,G'}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

где мы использовали те же обозначения, что и в соотношении (3.9).

Для доказательства равенства (3.15) достаточно доказать, что

$$\lim_{G \rightarrow \mathbb{Z}^{\times 2}} (\#(VG))^{-k} \sum_{\substack{p_1 \neq \dots \neq p_{2k}, \\ p_i \in P(G); \\ |p_{2l} - p_{2j}| \leq L}} \sum_{\substack{\partial \xi_i^1 = \delta^0[p_{2i-1}] + \delta^0[p_{2i}] \\ i=1, \dots, k}} \left(\prod_{i=1}^k |(\text{th } \beta E)^{\xi_i^1}| \right) (Z_{r,G})^{-1} Z_{r,G'} = 0 \quad (3.16)$$

для любого положительного числа L и для любых фиксированных целых чисел $1 \leq l < j \leq k$. В силу неравенства (3.4) соотношение (3.16) следует из равенства

$$\lim_{G \rightarrow \mathbb{Z}^{\times 2}} (\#(VG))^{-k} \sum_{\substack{p_1 \neq \dots \neq p_{2k}, \\ p_i \in P(G); \\ |p_{2l} - p_{2j}| \leq L}} \sum_{\substack{\partial \xi_i^1 = \delta^0[p_{2i-1}] + \delta^0[p_{2i}] \\ i=1, \dots, k}} \prod_{i=1}^k |(\text{th } \beta E)^{\xi_i^1}| = 0. \quad (3.17)$$

Для доказательства равенства (3.17) оценим сверху входящие в него суммы подобными же суммами, где второе суммирование идет по всем неориентированным путям $\xi_1^1, \dots, \xi_k^1$ на решетке $\mathbb{Z}^{\times 2}$, соединяющим вершины $\mathbf{p}_{2i-1}$ и $\mathbf{p}_{2i}$, $i = 1, \dots, k$, причем самопересекающимся трансверсально. Поскольку энергия взаимодействия $E(\{\mathbf{p}, \mathbf{e}\})$ зависит лишь от направления (горизонтального либо вертикального) ребра $\{\mathbf{p}, \mathbf{e}\}$, то в силу определения (2.32)

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{p_1 \neq \dots \neq p_{2k}, \\ p_i \in P(G); \\ |p_{2l} - p_{2j}| \leq L}} \sum_{\substack{\partial \xi_i^1 = \delta^0[p_{2i-1}] + \delta^0[p_{2i}] \\ i=1, \dots, k}} \prod_{i=1}^k |(\text{th } \beta E)^{\xi_i^1}| = \\ &= \sum_{\substack{q_i \in \mathbb{Z}^{\times 2}, \\ i=1, \dots, k}} \sum_{\substack{q_i \neq 0 \\ i=1, \dots, k}} \prod_{i=1}^k |(\text{th } \beta E)^{\xi_i^1}| \sum_{\substack{p_1 \neq \dots \neq p_{2k}, \\ p_{2i} - p_{2i-1} = q_i, \\ p_i \in P(G); \\ |p_{2l} - p_{2j}| \leq L}} 1. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Легко доказать оценку

$$\sum_{\substack{p_1 \neq \dots \neq p_{2k}, \\ p_{2i} - p_{2i-1} = q_i, \\ p_i \in P(G); \\ |p_{2l} - p_{2j}| \leq L}} 1 \leq (2L+1)(\#(VG))^{k-1}. \quad (3.19)$$

Из абсолютной сходимости ряда (3.14), соотношения (3.18) и оценки (3.19) следует равенство (3.17), из которого, в свою очередь, вытекают равенства (3.16), (3.15).

Обозначим $|\xi^1|$ общее число ребер $\{\mathbf{p}, \mathbf{e}\}$, на которых неориентированный путь ξ^1 принимает значение 1. Из абсолютной сходимости ряда (3.14) следует, что для любого положительного числа ϵ найдется такое достаточно большое число $L/4$, что

$$\sum_{\substack{q \in \mathbb{Z}^{\times 2} \\ q \neq 0}} \sum_{\substack{\partial \xi^1 = \delta^0[0] + \delta^0[q] \\ |\xi^1| > L/4}} |(\text{th } \beta E)^{\xi^1}| < \epsilon. \quad (3.20)$$

Из (3.4), (3.12), (3.20) вытекает неравенство

$$\begin{aligned}
 & \left(\#(VG) \right)^{-k} \left| \sum_{\substack{p_1 \neq \dots \neq p_{2k}, p_i \in P(G); \\ |p_{2i} - p_{2j}| > L, 1 \leq i < j \leq k}} \sum_{\substack{\partial \xi_i^1 = \delta^0[p_{2i-1}] + \delta^0[p_{2i}] \\ i=1, \dots, k}} \left(\prod_{i=1}^k (\text{th } \beta E)^{\xi_i^1} \right) (Z_{r,G})^{-1} Z_{r,G'} - \right. \\
 & \quad - \sum_{\substack{p_1 \neq \dots \neq p_{2k}, p_i \in P(G); \\ |p_{2i} - p_{2j}| > L, 1 \leq i < j \leq k}} \sum_{\substack{\partial \xi_i^1 = \delta^0[p_{2i-1}] + \delta^0[p_{2i}] \\ |\xi_i^1| \leq L/4, i=1, \dots, k}} \left(\prod_{i=1}^k (\text{th } \beta E)^{\xi_i^1} \right) \times \\
 & \quad \left. \times (Z_{r,G})^{-1} Z_{r,G'} \right| < \epsilon C, \quad (3.21)
 \end{aligned}$$

где постоянная C не зависит от графа $G(M'_1, M'_2; M_1, M_2)$.

Рассмотрим предел

$$\begin{aligned}
 & \lim_{G \rightarrow \mathbb{Z} \times 2} (\#(VG))^{-k} \times \\
 & \times \sum_{\substack{p_1 \neq \dots \neq p_{2k}, p_i \in P(G); \\ |p_{2i} - p_{2j}| > L, 1 \leq i < j \leq k}} \sum_{\substack{\partial \xi_i^1 = \delta^0[p_{2i-1}] + \delta^0[p_{2i}], \\ |\xi_i^1| \leq L/4, i=1, \dots, k}} \left(\prod_{i=1}^k (\text{th } \beta E)^{\xi_i^1} \right) (Z_{r,G})^{-1} Z_{r,G'}. \quad (3.22)
 \end{aligned}$$

Из соотношения (2.54) следует

$$\begin{aligned}
 (Z_{r,G})^{-1} Z_{r,G'} &= \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{\substack{C \in CRC(G) \\ \|C\| \cap \|j(\xi_i^1)\| \neq \emptyset}} |C|^{-1} e^{i\phi(C)/2} (\text{th } \beta E)^C \right\} \times \\
 & \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{\substack{C \in CRC(G) \\ \|C\| \cap \bigcup_i \|j(\xi_i^1)\| \neq \emptyset}} (n(C; \xi) - 1) |C|^{-1} e^{i\phi(C)/2} (\text{th } \beta E)^C \right\}, \quad (3.23)
 \end{aligned}$$

где во втором сомножителе суммирование идет по множеству всех полностью редуцированных замкнутых путей, имеющих общие ребра с по меньшей мере двумя неориентированными путями ξ_i^1 , $i = 1, \dots, k$. Число $n(C; \xi)$ — это общее число неориентированных путей $\xi_1^1, \dots, \xi_k^1$, с которыми полностью редуцированный замкнутый путь C имеет общие ребра. Поскольку $|p_{2i} - p_{2j}| > L$, $1 \leq i < j \leq k$, $|\xi_i^1| \leq L/4$, $i = 1, \dots, k$, то длина такого полностью редуцированного замкнутого пути больше L . В силу оценки (2.36) ряд

$$\sum_{\substack{C \in CRC(G) \\ \|C\| \cap \bigcup_i \|j(\xi_i^1)\| \neq \emptyset}} (n(C; \xi) - 1) |C|^{-1} e^{i\phi(C)/2} (\text{th } \beta E)^C \quad (3.24)$$

стремится к нулю при $L \rightarrow \infty$. Выбирая достаточно большое число L , мы можем аппроксимировать предел (3.22) следующим пределом:

$$\lim_{G \rightarrow \mathbb{Z}^{\times 2}} (\#(VG))^{-k} \sum_{\substack{p_1 \neq \dots \neq p_{2k}, p_i \in P(G); \\ |p_{2i} - p_{2j}| > L, 1 \leq i < j \leq k}} \sum_{\substack{\partial \xi_i^1 = \delta^0[p_{2i-1}] + \delta^0[p_{2i}] \\ |\xi_i^1| \leq L/4, i=1, \dots, k}} \prod_{i=1}^k \left((\text{th } \beta E)^{\xi_i^1} \times \right. \\ \left. \times \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\substack{C \in CRC(G) \\ \|C\| \cap \|j(\xi_i^1)\| \neq \emptyset}} |C|^{-1} e^{i\phi(C)/2} (\text{th } \beta E)^C \right\} \right). \quad (3.25)$$

Согласно равенству (2.54)

$$\exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\substack{C \in CRC(G) \\ \|C\| \cap \|j(\xi_i^1)\| \neq \emptyset}} |C|^{-1} e^{i\phi(C)/2} (\text{th } \beta E)^C \right\} = (Z_{r,G})^{-1} Z_{r,G \setminus \|j(\xi_i^1)\|}, \quad (3.26)$$

где граф $G \setminus \|j(\xi_i^1)\|$ получается из графа $G(M'_1, M'_2; M_1, M_2)$ с помощью удаления всех ребер из носителя $\|j(\xi_i^1)\|$. Подставим соотношение (3.26) в (3.25). Используя неравенство (3.4) и равенство (3.17), можно доказать, что выражение (3.25) равно

$$\lim_{G \rightarrow \mathbb{Z}^{\times 2}} (\#(VG))^{-k} \sum_{\substack{p_1 \neq \dots \neq p_{2k} \\ p_i \in P(G)}} \sum_{\substack{\partial \xi_i^1 = \delta^0[p_{2i-1}] + \delta^0[p_{2i}] \\ |\xi_i^1| \leq L/4, i=1, \dots, k}} \prod_{i=1}^k \left((\text{th } \beta E)^{\xi_i^1} \times \right. \\ \left. \times \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\substack{C \in CRC(G) \\ \|C\| \cap \|j(\xi_i^1)\| \neq \emptyset}} |C|^{-1} e^{i\phi(C)/2} (\text{th } \beta E)^C \right\} \right) = \\ = \lim_{G \rightarrow \mathbb{Z}^{\times 2}} \left((\#(VG))^{-1} \sum_{\substack{p_1 \neq p_2 \\ p_i \in P(G)}} \sum_{\substack{\partial \xi^1 = \delta^0[p_1] + \delta^0[p_2] \\ |\xi^1| \leq L/4}} (\text{th } \beta E)^{\xi^1} \times \right. \\ \left. \times \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\substack{C \in CRC(G) \\ \|C\| \cap \|j(\xi^1)\| \neq \emptyset}} |C|^{-1} e^{i\phi(C)/2} (\text{th } \beta E)^C \right\} \right)^k, \quad (3.27)$$

где ξ^1 пробегает все неориентированные пути на решетке $G(M'_1, M'_2; M_1, M_2)$, соединяющие вершины $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$. Эти неориентированные пути самопересекаются трансверсально. Длина $|\xi^1|$ неориентированного пути ξ^1 меньше, чем $L/4$. При $L \rightarrow \infty$ из равенств (3.15), (3.27) и неравенства (3.21) следует

$$\lim_{G \rightarrow \mathbb{Z}^{\times 2}} (\#(VG))^{-k} \sum_{\substack{p_1 \neq \dots \neq p_{2k} \\ p_i \in P(G)}} W_G \left(\sum_{i=1}^{2k} \delta^0[\mathbf{p}_i] \right) = 2^{-k} \frac{(2k)!}{k!} \times \\ \times \lim_{G \rightarrow \mathbb{Z}^{\times 2}} \left((\#(VG))^{-1} \sum_{\substack{p_1 \neq p_2 \\ p_i \in P(G)}} W_G \left(\sum_{i=1}^2 \delta^0[\mathbf{p}_i] \right) \right)^k, \quad (3.28)$$

где использовано выражение (2.55) для корреляционной функции $W_G(\sum_{i=1}^2 \delta^0[\mathbf{p}_i])$.

Поскольку энергия взаимодействия $E(\{\mathbf{p}, \mathbf{e}\})$ зависит лишь от направления (горизонтального либо вертикального) ребра $\{\mathbf{p}, \mathbf{e}\}$, то из определений (2.32), (2.42) и равенства (2.55) получаем

$$\begin{aligned} \lim_{G \rightarrow \mathbb{Z}^{\times 2}} (\#(VG))^{-1} \sum_{\substack{p_1 \neq p_2 \\ p_i \in P(G)}} W_G \left(\sum_{i=1}^2 \delta^0[\mathbf{p}_i] \right) &= \sum_{\substack{p \in \mathbb{Z}^{\times 2} \\ p \neq 0}} \sum_{\partial \xi^1 = \delta^0[0] + \delta^0[p]} (\text{th } \beta E)^{\xi^1} \times \\ &\times \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\substack{C \in CRC(\mathbb{Z}^{\times 2}) \\ \|C\| \cap \|j(\xi^1)\| \neq \emptyset}} |C|^{-1} e^{i\phi(C)/2} (\text{th } \beta E)^C \right\} \times \\ &\times \lim_{G \rightarrow \mathbb{Z}^{\times 2}} (\#(VG))^{-1} N_G(\xi^1), \end{aligned} \quad (3.29)$$

где $N_G(\xi^1)$ – общее число сдвинутых неориентированных путей ξ^1 на графе $G(M'_1, M'_2; M_1, M_2)$. Если $|\xi^1| \leq M_i - M'_i$, $i = 1, 2$, то справедливы следующие оценки:

$$\prod_{i=1}^2 (M_i - M'_i - |\xi^1|) \leq N_G(\xi^1) \leq \prod_{i=1}^2 (M_i - M'_i). \quad (3.30)$$

Заметим, что

$$\#(VG) = \prod_{i=1}^2 (M_i - M'_i + 1). \quad (3.31)$$

В силу равенства (3.26) и неравенств (2.36), (3.4) ряд

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{p \in \mathbb{Z}^{\times 2} \\ p \neq 0}} W_{\mathbb{Z}^{\times 2}}(\delta^0[0] + \delta^0[p]) &= \sum_{\substack{p \in \mathbb{Z}^{\times 2} \\ p \neq 0}} \sum_{\partial \xi^1 = \delta^0[0] + \delta^0[p]} (\text{th } \beta E)^{\xi^1} \times \\ &\times \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\substack{C \in CRC(\mathbb{Z}^{\times 2}) \\ \|C\| \cap \|j(\xi^1)\| \neq \emptyset}} |C|^{-1} e^{i\phi(C)/2} (\text{th } \beta E)^C \right\} \end{aligned} \quad (3.32)$$

абсолютно сходится. Таким образом, из равенств (3.29), (3.31), (3.32) и оценок (3.30) следует

$$\lim_{G \rightarrow \mathbb{Z}^{\times 2}} (\#(VG))^{-1} \sum_{\substack{p_1 \neq p_2 \\ p_i \in P(G)}} W_G \left(\sum_{i=1}^2 \delta^0[\mathbf{p}_i] \right) = \sum_{\substack{p \in \mathbb{Z}^{\times 2} \\ p \neq 0}} W_{\mathbb{Z}^{\times 2}}(\delta^0[0] + \delta^0[p]). \quad (3.33)$$

Из (3.13), (3.28) и (3.33) получаем равенство (3.8). Предложение доказано.

Из равенств (2.23), (3.8) и неравенства (3.13) следует

$$\lim_{G \rightarrow \mathbb{Z}^{\times 2}} m_G(H) = \beta H \left(1 + \sum_{\substack{p \in \mathbb{Z}^{\times 2} \\ p \neq 0}} W_{\mathbb{Z}^{\times 2}}(\delta^0[0] + \delta^0[p]) \right). \quad (3.34)$$

Преобразуем формулу (1.8). Следуя определению, приведенному в книге [5] (гл. III, формула (3.1)), введем

$$\langle \sigma_m \sigma_n \rangle_N = (Z_N(E, H))^{-1} \sum_{\substack{\sigma_k = \pm 1 \\ k=1, \dots, N}} \sigma_m \sigma_n e^{-\beta \bar{H}(\sigma)}, \quad (3.35)$$

где целые числа $1 \leq m \leq N$, $1 \leq n \leq N$ и суммы $\bar{H}(\sigma)$, $Z_N(E, H)$ определяются соотношениями (1.1), (1.2). Если число $m - n$ фиксировано, то согласно [5] (гл. III, формула (3.5))

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \langle \sigma_m \sigma_n \rangle_N |_{H=0} = (\text{th } \beta E)^{|m-n|}. \quad (3.36)$$

Пусть число N четно. Для любых целых чисел m и n определим корреляционную функцию

$$W_{\mathbb{Z}}(\delta^0[m] + \delta^0[n]) = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle \sigma_{N/2+m} \sigma_{N/2+n} \rangle_N |_{H=0}. \quad (3.37)$$

Из соотношений (3.36), (3.37) следует

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} W_{\mathbb{Z}}(\delta^0[0] + \delta^0[n]) = \frac{2 \text{th } \beta E}{1 - \text{th } \beta E} = e^{2\beta E} - 1. \quad (3.38)$$

Подставляя соотношение (3.38) в равенство (1.8), получаем

$$m(E, H) = \beta H \left(1 + \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} W_{\mathbb{Z}}(\delta^0[0] + \delta^0[n]) \right). \quad (3.39)$$

Равенства (3.34) и (3.39) имеют аналогичный вид.

Благодарности. Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 03-01-00238).

Список литературы

- [1] *C. N. Yang*. Phys. Rev. 1952. V. 85. P. 808–816.
- [2] *C. H. Chang*. Phys. Rev. 1952. V. 88. P. 1422–1422.
- [3] *E. W. Montroll, R. B. Potts, J. C. Ward*. J. Math. Phys. 1963. V. 4. P. 308–322.
- [4] *T. D. Schultz, D. C. Mattis, E. H. Lieb*. Rev. Mod. Phys. 1964. V. 36. P. 856–871.
- [5] *B. M. McCoy, Tai Tsun Wu*. The Two-Dimensional Ising Model. Cambridge, MA: Harvard Univ. Press, 1973.
- [6] *S. N. Isakov*. Commun. Math. Phys. 1984. V. 95. P. 427–443.
- [7] *Ю. М. Зиновьев*. ТМФ. 2001. Т. 126. С. 84–101.
- [8] *Н. П. Долбилин, Ю. М. Зиновьев, А. С. Мищенко, М. А. Штанько, М. И. Штогрин*. Изв. РАН. Сер. матем. 1999. Т. 63. № 4. С. 79–100.

Поступила в редакцию 28.II.2002 г.,
после доработки 26.III.2003 г.