Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Е. Зобов, М. А. Попов, О координате особой точки производящих функций кластеров в высокотемпературной динамике спиновых решеточных систем с аксиально-симметричным взаимодействием, *ТМФ*, 2003, том 136, номер 3, 463–479

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf237>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 18:34:28

© 2003 г.

В. Е. Зобов*, М. А. Попов†

О КООРДИНАТЕ ОСОБОЙ ТОЧКИ ПРОИЗВОДЯЩИХ ФУНКЦИЙ КЛАСТЕРОВ В ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ДИНАМИКЕ СПИНОВЫХ РЕШЕТОЧНЫХ СИСТЕМ С АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Исследованы производящие функции нагруженных деревьев из двойных связей двух сортов на гиперкубической решетке размерности d совстроенными фрагментами. Правила построения этих кластеров выбраны таким образом, чтобы с их помощью можно было оценить коэффициенты рядов по степеням времени продольной и поперечной автокорреляционных функций спиновой системы с аксиально-симметричным взаимодействием. В приближении Бете и при условии преимущественного учета связей одного сорта выведены система двух уравнений для производящих функций деревьев и уравнение для производящей функции цепей, ведущих от корня к фрагменту на дереве. Для гранецентрированной гиперкубической решетки с учетом фрагментов в виде треугольника из четырех связей и четырехкратно связанной пары найдены первые члены $1/d$ -разложения для координаты особой точки производящей функции как в анизотропном, так и в изотропном случае. Полученный результат переписан через отношения решеточных сумм и распространен на ядерные спиновые системы с диполь-дипольным взаимодействием. Теоретическое значение координаты особой точки хорошо согласуется с экспериментальным, рассчитанным по крылу спектра поглощения ядерного магнитного резонанса в монокристалле фторида бария.

Ключевые слова: спиновая динамика, особые точки, разложение по обратной размерности пространства.

1. ВВЕДЕНИЕ

Теоретические исследования фазовых переходов, протекания и разветвленных полимеров показали, что свойства корреляционных функций в окрестности их особых точек связаны со свойствами больших кластеров. При этом в каждой области свои правила построения кластера, нахождения его структуры и весового множителя. Для перечисленных явлений эти правила и свойства разобраны во многих работах.

* Институт физики им. Л. В. Киренского СО РАН, Красноярск, Россия.
E-mail: rsa@iph.krasn.su

† Красноярский государственный университет, Красноярск, Россия

Менее изучены кластеры, определяющие динамику спиновых систем твердых тел при высоких температурах. Строго найдены [1], [2] коэффициенты рядов по степеням времени спиновых корреляционных функций только до восьмого порядка, которые выражаются через пятиспиновые кластеры. Однако для полного исследования этих важных функций, определяющих наблюдаемые свойства спиновых систем, нужно знать также свойства больших кластеров. Например, в ряде экспериментальных работ, выполненных методом магнитного резонанса, было обнаружено, что частотная зависимость крыльев спектров корреляционных функций лучше описывается простой экспоненциальной функцией [3]–[6], чем функцией Гаусса [7]. Необычность такой формы крыла спектра в том, что соответствующая корреляционная функция должна иметь особую точку на оси мнимого времени, координата которой определяет показатель в экспоненте. Эта же координата равна радиусу сходимости ряда по степеням времени корреляционной функции. Помимо чисто теоретического знания, изучение указанных особых точек имеет важное практическое значение, поскольку крыльями спектров корреляционных функций определяется скорость установления равновесия в спиновых системах.

Особые точки на оси мнимого времени корреляционных функций спиновых решеток размерности d и свойства кластеров изучены теоретически [8], [9] в пределе $d \rightarrow \infty$. В этом пределе спиновые корреляционные функции на оси мнимого времени имеют полюс второго порядка, и их можно интерпретировать производящими функциями деревьев из двойных связей. Весовой множитель определяется в первую очередь числом способов построения данного дерева, выполняемого по определенным правилам: первые связи присоединяются последовательно от корня к концу веток, а вторые – последовательно от конца ветки к корню. Дополнительно каждому дереву приписывается сомножитель, определяемый свойствами многократного коммутатора при заданной деревом последовательности связей. Для координаты ближайшей особой точки получена оценка как в случае магнитного изотропного, так и анизотропного взаимодействия.

Для анализа изменения этой координаты при переходе к реальным трехмерным решеткам можно применить метод разложения по обратной размерности пространства, разработанный в теории критических явлений (см., например, [10]), в котором d рассматривают как переменную величину, принимающую достаточно большие значения. В нашем случае при переходе к решеткам меньшей размерности правила построения дерева должны быть дополнены ограничением на число ветвей, исходящих из каждого узла, и запретом на пересечения ветвей, а в точном коэффициенте временного ряда для корреляционной функции добавляются решеточные фигуры с петлями из связей и многократными связями соседних узлов. Не все вклады равнозначны. Наиболее важной подпоследовательностью решеточных фигур являются деревья со встроенными фрагментами минимального размера, относительный вес которых имеет наименьшую степень малой величины $1/d$.

В предыдущих работах [11], [12] нами найдены первые члены разложения по обратной размерности пространства для координаты особой точки производящей функции таких фигур в случае изотропного взаимодействия ближайших соседей на простой гиперкубической (ПК) решетке, для которой петель минимального размера является квадрат. К сожалению, отсутствие точных данных о константе обменного взаимодействия не позволило нам выполнить количественное сравнение теории с экспериментом [3]. В этом от-

ношении выгодно отличаются экспериментальные данные [4]–[6], полученные для ядерных магнитных систем кристаллов в сильном магнитном поле методом ядерного магнитного резонанса (ЯМР), поскольку известны величины всех констант взаимодействия – усеченного диполь-дипольного взаимодействия. Однако есть другая проблема: аксиальная симметрия такого взаимодействия сильно усложняет теорию по сравнению с изотропным случаем. Для систем с диполь-дипольным взаимодействием минимальная петля – это треугольник [2], [7], [13]. Треугольник из ближайших соседей возможен у гранецентрированной гиперкубической (ГПК) решетки [14]. Поэтому в настоящей работе рассматривается $1/d$ -разложение для системы с аксиально-симметричным взаимодействием на примере ГПК-решетки.

Во втором разделе в приближении Бете выведена система двух уравнений для производящих функций корневых деревьев, построенных из двойных связей двух сортов, при условии преимущественного учета связей одного сорта. По ним методом рядов определены нулевой и первый члены $1/Z$ -разложения для координаты ближайшей особой точки (Z – координационное число). В третьем разделе в том же приближении выведено уравнение для производящей функции цепей, ведущих от корня к фрагменту на дереве. В четвертом разделе для спиновых систем на ГПК-решетке рассчитываются выражения для вкладов минимальных фрагментов – пары с четырехкратной связью и треугольника из четырех связей – и обусловленные ими поправки к координатам особых точек производящих функций. В п. 4.1 расчет выполнен для изотропного взаимодействия, а в п. 4.2 – для аксиально-симметричного. В пятом разделе теоретические результаты сравниваются с экспериментальными.

2. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПРОИЗВОДЯЩИХ ФУНКЦИЙ КОРНЕВЫХ ДЕРЕВЬЕВ

Рассмотрим систему ядерных магнитных моментов со спином $I = 1/2$, образующих правильную решетку размерности d . Динамика спинов в сильном постоянном магнитном поле определяется секулярной частью диполь-дипольного взаимодействия с гамильтонианом [7] (в единицах частоты)

$$\mathcal{H} = \sum_{i \neq j} b_{ij} \left[I_i^z I_j^z - \frac{1}{2} (I_i^x I_j^x + I_i^y I_j^y) \right], \quad (1)$$

где $b_{ij} = \gamma^2 \hbar (1 - 3 \cos^2 \theta_{ij}) / (2r_{ij}^3)$, γ и $\hbar$ – гиромагнитное отношение и постоянная Планка, θ_{ij} – угол межъядерного вектора $\mathbf{r}_{ij}$ с направленным вдоль оси z постоянным магнитным полем, I_i^α – α -компонента ($\alpha = x, y, z$) векторного оператора спина в узле i . Зависящие от времени корреляционные функции двух спинов, расположенных в узлах решетки i и j , при высокой температуре определены выражением [7]

$$\Gamma_{\alpha ij}(t) = \frac{\text{Sp}\{e^{i\mathcal{H}t} I_i^\alpha e^{-i\mathcal{H}t} I_j^\alpha\}}{\text{Sp}\{(I_i^\alpha)^2\}}. \quad (2)$$

При $i \neq j$ получаем перекрестную корреляционную функцию, а при $i = j$ – автокорреляционную функцию (АКФ). В силу трансляционной симметрии решетки у АКФ будем

опускать индекс ii . Учитывая аксиальную симметрию гамильтониана (1) относительно спиновых компонент, будем использовать обозначения $\Gamma_x(t) = \Gamma_y(t) = X(t)$. АКФ (2) могут быть разложены в степенные ряды

$$\Gamma_\alpha(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{M_{2n\alpha} t^{2n}}{(2n)!}, \quad (3)$$

где n -й коэффициент разложения определяется через $2n$ -кратный коммутатор

$$M_{2n\alpha} = \frac{\text{Sp}\{[H, [H, \dots, [H, I_i^\alpha] \dots]] I_i^\alpha\}}{\text{Sp}\{(I_i^\alpha)^2\}}. \quad (4)$$

Как известно [7], $M_{2n\alpha}$ является моментом порядка $2n$ спектральной плотности соответствующей АКФ.

Система с гамильтонианом (1) отличается от изотропной модели Гейзенберга, изученной нами в предыдущих работах [11], [12], во-первых, магнитной анизотропией, во-вторых, необходимостью учета дальних соседей. Разберем сначала влияние анизотропии на динамику и рассмотрим промежуточный случай: гамильтониан (1) с равным взаимодействием Z ближайших соседей, для которых $b_{ij} = b$, тогда как для остальных $b_{ij} = 0$. Поскольку теперь величина вклада некоторого дерева из связей b_{ij} в момент (4) зависит не только от его структуры, но и от выбранной при его построении последовательности спиновых проекций, то простые формулы приближения независимого построения ветвей [11], [12] не работают. Учтем, следуя [6], [7], [15]–[19], выделенность zz -взаимодействий в (1) и будем стремиться включить эти взаимодействия максимально полно. При этом присоединение к узлу с оператором I^x или I^y любого допустимого числа zz -связей (веток), опираясь на коммутативность zz -взаимодействий, будем проводить независимо (как в изотропном случае), тогда как к любому узлу с оператором I^z будем присоединять всякий раз только одну (двойную) поперечную связь от xx - или yy -взаимодействий в гамильтониане (1). При присоединении последней появляются два активных узла для присоединения продольных zz -связей и тем самым продолжения роста дерева. В результате получим систему уравнений для производящих функций

$$X_1(t) = 1 + \int_0^t \int_0^{t_1} \Gamma_z(t_2) dt_1 dt_2, \quad (5)$$

$$\Gamma_z(t) = 1 + \frac{q}{2\lambda^2} \int_0^t \int_0^{t_1} X_1^{2q-1}(t_2) dt_1 dt_2, \quad (6)$$

где мы перешли к мнимому безразмерному времени $t \rightarrow it/(b\lambda)$, сохранив за ним прежнее обозначение. $X_1(t)$ – производящая функция деревьев, присоединенных к корню одной двойной zz -связью; $q = Z - 1$, λ – множитель перенормировки zz -взаимодействия, введенный и обоснованный в работах [6], [18]. В нашем случае возьмем $\lambda^2 = 5/4$ для обеспечения правильного значения $M_{2x} = 5b^2 Z/4$ корреляционной функции $X(t) = [X_1(t)]^Z$.

Система уравнений (5), (6) заменяет единственное уравнение изотропного случая [11], [12] и соответствует приближению Бете, поскольку не учитывает пересечение ветвей деревьев. Найти решение этой системы не удастся, однако можно найти вид главной части ее решения вблизи особой точки:

$$X_1(t) \approx A_1(\tau_b - t)^{-\beta}, \quad (7)$$

где

$$\beta = \frac{2}{k}, \quad (A_1)^{2k} = \frac{2.5\beta(\beta+1)(\beta+2)(\beta+3)}{q}, \quad k = Z - 2.$$

К сожалению, мы не смогли найти аналитическое выражение для координаты τ_b , как это удалось сделать в изотропном случае [11]. Рассчитаем ее через радиус сходимости рядов по степеням времени решения системы (5), (6). С этой целью перепишем систему в виде одного уравнения для новой функции $Y(t) = (X_1(t))^m$, где $m = 2q - 1$. Проинтегрировав эту функцию введя новую переменную $x = t(2qm/5)^{1/4}$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} Y(x) &= Y(x) \frac{m}{X_1(x)} \frac{d}{dx} X_1(x), \\ X_1(x) &= 1 + \frac{ax^2}{2m} + \frac{1}{m} \int_0^x \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \int_0^{x_3} Y(x_4) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4, \\ a &= \left(\frac{2.5m}{q} \right)^{1/2} = 5^{1/2} \left(1 - \frac{0.5}{m} \right) + O(m^{-2}). \end{aligned} \quad (8)$$

Подставив $Y(x)$ в виде ряда

$$Y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} Y_{2n} \quad (9)$$

в уравнение (8), получим рекуррентное уравнение для Y_{2n} . Поскольку нас интересуют поправки по малой величине $1/m$, то возьмем

$$Y_{2n} = Y_{2n}^{(0)} - \frac{1}{m} Y_{2n}^{(1)} \quad (10)$$

и вместо одного уравнения для Y_{2n} получим два уравнения для $Y_{2n}^{(0)}$ и $Y_{2n}^{(1)}$:

$$\begin{aligned} Y_{2n}^{(0)} &= \frac{\sqrt{5}}{2n} Y_{2n-2}^{(0)} + \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{Y_{2k}^{(0)} Y_{2(n-k-2)}^{(0)}}{(2k+1)(2k+2)(2k+3)}, \\ Y_{2n}^{(1)} &= \frac{\sqrt{5}}{2n} Y_{2n-2}^{(1)} + \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{Y_{2k}^{(0)} Y_{2(n-k-2)}^{(1)} + Y_{2k}^{(1)} Y_{2(n-k-2)}^{(0)}}{(2k+1)(2k+2)(2k+3)} + \\ &+ \frac{\sqrt{5}}{2} \left(1 - \frac{1}{2n} \right) Y_{2n-2}^{(0)} + \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{2(n-k-2) Y_{2k}^{(0)} Y_{2(n-k-2)}^{(0)}}{(2k+1)(2k+2)(2k+3)(2k+4)}. \end{aligned} \quad (11)$$

Координата ближайшей особой точки, равная радиусу сходимости ряда (9), может быть определена с учетом степени полюса (7) как предел отношения

$$x_b^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Y_{2n-2}(2n+2)(2n+3)}{Y_{2n}(2n-1)2n}. \quad (12)$$

Подставив сюда (10), получаем в первом порядке по $1/m$

$$x_b = x_0 = \frac{\delta x_b}{m}, \quad (13)$$

где x_0 находим по формуле (12) с $Y_{2n}^{(0)}$, а

$$2 \frac{\delta x_b}{x_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{Y_{2n}^{(1)}}{Y_{2n}^{(0)}} - \frac{Y_{2(n-1)}^{(1)}}{Y_{2(n-1)}^{(0)}} \right). \quad (14)$$

На основании связи x и t получаем

$$\tau_b M_{2x}^{1/2} = x_b (1.25)^{1/4} \left[1 + \frac{1.25}{m} \right].$$

Объединяя эту поправку с поправкой, полученной после подстановки в (12) и (14) решений рекуррентных уравнений (11), находим для поправки к координате особой точки в приближении Бете

$$\tau_b = \tau_0 \left(1 + \frac{1.507}{Z} \right), \quad \tau_0 = \frac{2.69}{M_{2x}^{1/2}}. \quad (15)$$

3. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ПРОИЗВОДЯЩЕЙ ФУНКЦИИ ЦЕПЕЙ

Производящая функция, заданная уравнением (5) — это производящая функция идеальных деревьев, построенных из двойных связей на решетке Бете с координационным числом Z . Реальные деревья для АКФ на гиперкубической решетке отличаются от них. Следует, во-первых, исключить деревья с пересечениями ветвей, возникающими при размещении дерева Бете на гиперкубической решетке, а, во-вторых, взамен исключенных добавить деревья с петлями и многократными взаимодействиями соседей, построенные многократными коммутациями (4) и имеющие другие коэффициенты.

Для теоретической оценки изменения координаты особой точки АКФ вследствие описанных изменений величин моментов будем рассматривать размерность пространства d как переменную величину. Выберем d достаточно большой, тогда вероятность пересечения мала, и мы, во-первых, можем ограничиться петлями минимального размера. Пересечения с участием большого числа связей имеют более высокий порядок малости по $1/d$ [11], [16]. Во-вторых, вероятность присутствия на дереве двух или более неидеальных фрагментов с пересечением пренебрежимо мала. К единственному такому фрагменту от корня ведет цепочка из двойных связей.

При тех же условиях, при которых выведена система (5), (6), звено цепи образуется четырьмя связями: продольной двойной связью и поперечной двойной связью. При этом поперечная двойная связь может быть встроена последовательно с продольной (q

способами) или направлена в сторону от цепи (k способами). Две вершины по концам этой связи являются корнями идеальных деревьев. Чтобы получить полный вклад всех деревьев со встроенным фрагментом, следует просуммировать по длинам цепочек, направлениям связей и деревьям, построенным на вершинах цепи. Такое суммирование легко осуществить, введя соответствующую производящую функцию цепей $L(t)$, для которой описанным в работе [11] методом получаем дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$\ddot{L}(t) = \ddot{f}(t) + \frac{2}{5}q(k+q)X_1^{2k}(t)L(t), \quad (16)$$

где $f(t)$ представляет вклад самой короткой цепи, т.е. когда фрагмент присоединен непосредственно к корню. Отметим, что определенная через уравнение (16) функция $L(t)$ является производящей функцией деревьев со встроенным фрагментом, присоединенных к корню одной продольной двойной связью, т.е. поправкой к $X_1(t)$. Поправка к $X(t) = [X_1(t)]^Z$ получается после домножения на Z .

Не зная точного выражения для $X_1(t)$, мы не можем решить уравнение (16) в общем виде. Но поскольку координата особой точки определяется большими деревьями, нам достаточно найти $L(t)$ в окрестности особой точки. Подставив (7) в (16), получаем для однородной части уравнения (16)

$$\ddot{L}(t) = \frac{\theta}{(\tau_b - t)^4} L(t),$$

где $\theta = 2q(q+k)(A_1)^{2k}/5$. Последнее уравнение имеет решение

$$L(t) = \sum_{n=1}^4 a_n (\tau_b - t)^{r_n},$$

где

$$r_1 = -1 - \frac{2}{k}, \quad r_2 = 4 + \frac{2}{k}, \quad r_{3,4} = \frac{1}{2} \left(3 \pm \sqrt{-15 - \frac{40}{k} - \frac{16}{k^2}} \right),$$

a_n — коэффициенты, явный вид которых нам не понадобится. Для сингулярной части решения неоднородного уравнения (16) находим

$$L(t) = C_f \left(1 - \frac{t}{\tau_b} \right)^{-1-2/k}, \quad (17)$$

$$C_f = (\tau_b)^{-1-2/k} R(k) \int_0^{\tau_b} \ddot{f}(t) (\tau_b - t)^{4+2/k} dt, \quad (18)$$

$$R(k) = \frac{k^3}{2(25k^3 + 70k^2 + 60k + 16)}.$$

Далее, следуя работе [11], производящую функцию (17) цепей или, что то же самое, деревьев со встроенным в них фрагментом из связей-взаимодействий прибавим к производящей функции идеальных деревьев $X_1(t)$ (7) и будем трактовать эту добавку при $t \rightarrow \tau_b$ как первый член разложения $X_1(t)$ по $\delta\tau_0 f$ — поправке к координате особой точки. Отсюда получаем

$$\delta\tau_0 f = -\frac{C_f N_f \tau_b k}{2}, \quad (19)$$

где N_f — число различных положений фрагмента, одна из вершин которого расположена в данном узле.

4. ПОПРАВКИ К КООРДИНАТЕ ОСОБОЙ ТОЧКИ ПРОИЗВОДЯЩИХ ФУНКЦИЙ

Формулы предыдущего раздела применимы для любой решетки, поскольку в приближении Бете все определяется координационным числом Z . Свойства решетки проявляются во фрагментах с пересечениями, следовательно, в величинах C_f и N_f . Для ПК-решетки в приближении ближайших соседей петля минимального размера – это квадрат. Такой случай для изотропного гамильтониана изучен в предыдущих работах [11], [12]. Для интересующего нас случая диполь-дипольного взаимодействия (1) минимальная петля – это треугольник [2], [7], [13]. Треугольник из ближайших соседей возможен у ГЦК-решетки [14]. В настоящем разделе рассмотрим $1/d$ -разложение для такой решетки.

Прежде всего разберем различие двух указанных типов гиперкубических решеток размерности d . Поместим начало координат в некоторый узел решетки. Будем записывать координаты других узлов, измеренные в единицах постоянной решетки, в виде

$$(x_1, x_2, \dots, x_d). \quad (20)$$

У ПК-решетки ближайшие узлы расположены по координатным осям и имеют в записи (20) только одну координату, не равную нулю: $x_i = \pm 1$, $i = 1, \dots, d$. Получаем $Z = 2d$ ближайших соседей. Через начало координат можно провести $d(d-1)/2$ плоскостей, включающих разные пары осей координат. В каждой плоскости можно разместить 4 квадрата с вершиной в начале координат, т.е. получаем для числа квадратов

$$N_4 = 2d(d-1). \quad (21)$$

Для ГЦК-решетки ближайшие к начальному узлу соседи расположены в центрах квадратов (21), т.е.

$$Z = 2d(d-1). \quad (22)$$

У этих узлов только две координаты в (20) отличны от нуля: $x_i = \pm 1/2$, $x_j = \pm 1/2$, $i, j = 1, \dots, d$. Возьмем треугольник, образованный ближайшими соседями, с одной вершиной в начале координат, а другой – в одном из ближайших узлов (22). Третья вершина может располагаться в узлах (22), удовлетворяющих следующему условию: одна координата совпадает с x_i или x_j , а другая отличная от нуля координата отвечает оси, не совпадающей с i или j . Получаем для числа разных треугольников с вершиной в начале координат

$$N_3 = 4d(d-1)(d-2). \quad (23)$$

В ГЦК-решетке из ближайших соседей можно образовать четырехугольники двух типов: квадраты, число которых N_4 (21), и четырехугольники из двух равносторонних треугольников с одной общей стороной, число которых

$$N_{2\Delta} = 2N_3 [4(d-2) - 1]. \quad (24)$$

Простейший треугольник можно построить из четырех связей (см. приложение). Из тех же четырех связей можно построить две двойные связи, число размещений которых

по порядку величины Z^2 . Поэтому образование такого треугольника ведет к потере в числе деревьев

$$\frac{N_3}{Z^2} \sim \frac{1}{d}. \quad (25)$$

При образовании простейшего четырехугольника из шести связей потеря в числе деревьев составляет

$$\frac{N_{2\Delta}}{Z^3} \sim \frac{1}{d^2}. \quad (26)$$

После такого геометрического отступления перейдем к расчету собственно поправок к производящим функциям. Наличие малых величин (25) и (26) позволяет при расчетах главного вклада от фрагмента в формуле (17) перейти к пределу $Z \rightarrow \infty$. Далее, хотя главная наша цель состоит в нахождении $1/d$ -разложения в анизотропном случае, мы вернемся к уже изученному на ПК-решетке более простому изотропному случаю. Это позволит нам провести сравнение результатов для разных решеток и симметрий.

4.1. Изотропное взаимодействие. Возьмем ту же, что и в работах [11], [12], изотропную гейзенберговскую модель с взаимодействием J между ближайшими соседями. Рассмотрим дерево, в один из узлов которого встроено треугольник из четырех связей. Все способы построения такого треугольника у заданного узла 1 приведены в приложении. Из каждой вершины треугольника растут ветви, чему соответствует отождествление на диаграмме линии с АКФ. В приближении Бете каждой такой линии с узелным индексом 2 или 3, начинающейся в вершине t_p и оканчивающейся в вершине t_m , соответствует сомножитель $F_k(t_p - t_m)$, а узлу 1 соответствует сомножитель $F_{k-1}(t)$ ($F_n(t)$ – производящая функция корневых деревьев, у которых из корня растет n ветвей (подробнее функции описаны в [11], [12]), $k = Z - 2$). В изотропном случае для разных спиновых проекций линии на диаграммах и коэффициенты взаимодействия одинаковы. Поэтому вклады четырех первых и двух последних диаграмм взаимно компенсируются. Останутся одинаковые диаграммы (e) и (f). Явное выражение для соответствующего оставшимся диаграммам вклада в производящую функцию

$$\ddot{f}_{\text{tr}}(t) = -2F_{k-1}(t) \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 \int_0^{t_3} dt_4 F_k(t_1 - t_4) F_k(t_2 - t_3). \quad (27)$$

Поправка к производящей функции от деревьев со встроеным треугольником в окрестности особой точки описывается формулой (17), в которой теперь для $C_f = C_{\text{tr}}$ получаем выражение (следуя [11], [12])

$$C_{\text{tr}} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^7 \frac{\tau_b^6}{3 + 4/k} \int_0^{\pi/2} \Phi(\varphi) \ddot{f}_{\text{tr}} \frac{2\varphi\tau_b}{\pi} d\varphi, \quad (28)$$

$$\tau_b = \tau_\infty \frac{\Gamma(1/2 - 1/Z)}{\sqrt{\pi} \Gamma(1 - 1/Z)} = \tau_\infty \left(1 + \frac{2 \ln 2}{Z} + O\left(\frac{1}{Z^2}\right)\right), \quad (29)$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция, $\tau_\infty = \pi/(2M_2)^{1/2}$ – значение координаты в пределе $Z \rightarrow \infty$, M_2 – второй момент ($M_2 = Z$ в выбранном масштабе времени, $M_2 = 2J^2 Z$ при возвращении к исходному размерному времени).

Малость искомой поправки (19) обеспечивается относительной малостью числа треугольников: N_3/Z^2 (25). Поэтому при вычислении главной части интеграла в (28) можно заменить функции их предельной формой при $Z \rightarrow \infty$ и взять $\tau_b = \tau_\infty = \pi/(2Z)^{1/2}$,

$$\ddot{f}_{\text{tr}}(2\varphi\tau_b/\pi) = -\cos^{-2}\varphi \int_0^\varphi dx_1 \int_0^{x_1} dx_4 \times \\ \times \int_{x_4}^{x_1} dx_2 \int_{x_4}^{x_1} dx_3 \cos^{-2}(x_1 - x_4) \cos^{-2}(x_2 - x_3), \quad (30)$$

$$\Phi(\varphi) = 3 \left\{ 1 - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \text{tg} \varphi \right\}, \quad (31)$$

$\Phi(\varphi)$ – решение однородной части

$$\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2} = 2 \cos^{-2}\varphi \Phi(\varphi) \quad (32)$$

– уравнения для цепочек, выведенного в [11], [12] и взятого сейчас в предельной форме при $Z \rightarrow \infty$. Используя (32) и интегрируя по частям, находим

$$C_{\text{tr}} = -\frac{2}{Z^3}. \quad (33)$$

Отметим, что в работах [11], [12] при интегрировании подобных выражений мы ограничивались первым членом разложения функции (31) в окрестности $\varphi = \pi/2$:

$$\Phi(\varphi) = \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right)^2. \quad (34)$$

После такой замены и численного интегрирования в (28) результат для C_{tr} (33) домножится на 0.997, что практически не изменит его величину.

Найденный коэффициент (33) поправки к производящей функции (17) записан для одного треугольника у узла. В конечном выражении (19) для поправки к координате особой точки его следует умножить на полное число треугольников N_3 (23) с вершиной в выделенном узле за вычетом числа треугольников $4(d-2)$, одна сторона которых совпала со связью, ведущей в выделенный узел. После чего получаем

$$\delta\tau_{0\text{tr}} = -\frac{C_{\text{tr}}(N_3 - 4(d-2))\tau_b k}{2} = \frac{\tau_b(N_3 - 4(d-2))}{Z^2} \approx \frac{\tau_b}{d}. \quad (35)$$

Для ГЦК-решетки $Z \sim d^2$, поэтому отброшенные при вычислении (33) члены следующего порядка по $1/Z$ соответствовали бы в разложении $\delta\tau_{0\text{tr}}$ членам $1/d^3$.

Нашим следующим шагом будет оценка увеличения координаты особой точки вследствие эффекта исключенного объема, т.е. вследствие запрета на пересечения ветвей деревьев. Для ГЦК-решетки простейшее такое пересечение имеет вид треугольника, построенного из шести связей, и дает поправку к производящей функции (17) с коэффициентом C_3 , который в пределе $Z \rightarrow \infty$ и в приближении (34) равен

$$C_3 = \left(\frac{2}{\pi} \right)^9 \frac{\tau_b^8}{3} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right)^2 \ddot{f}_3 \frac{2\varphi\tau_b}{\pi} d\varphi, \\ \ddot{f}_3(t) = -2 \cos^{-2} \left(\frac{\pi t}{2\tau_b} \right) [L_2(t, F_1)L_1(t, F_1) + L_3(t, F_1)],$$

где $L_n(t, F_1)$ – производящая функция цепочки из n звеньев [11]. Вычислив интеграл, находим

$$C_3 = -4.39 \frac{2^5}{3\pi Z^4}, \quad \delta\tau_{03} = \frac{7.45\tau_b N_3}{Z^3} \approx \frac{3.73\tau_b}{d^3}. \quad (36)$$

Далее, поправка от четырехкратного взаимодействия между спинами соседних узлов не зависит от вида решетки, поэтому для ГЦК-решетки в формуле для ПК-решетки [12] изменится только определение Z (22):

$$\delta\tau_{0m} = -\frac{0.265\tau_b}{Z} \approx -\frac{0.13\tau_b}{d^2}. \quad (37)$$

Наконец, оценим величину поправки от петель в виде четырехугольников на ГЦК-решетке. В их полном числе подавляющую часть составляют четырехугольники, образованные из двух равносторонних треугольников (5), для которых $N_{2\Delta}/Z^3 \sim 4/d^2$. Шесть связей, образующих такие четырехугольники при вычислении соответствующих вкладов в шестой момент [14], могут располагаться по-разному. Во-первых, по сторонам четырехугольника – точно так же, как в случае квадрата. Во-вторых, одна или две связи могут быть размещены по диагонали четырехугольника – общей стороне двух треугольников. На первый случай распространяется результат для квадратов на ПК-решетке [12] (после очевидной замены N_4 на Z):

$$\delta\tau_{0s} = 0.716 \frac{2^5}{3\pi Z^4} \frac{N_{2\Delta}\tau_b k}{2} \approx \frac{4.9\tau_b}{d^2}. \quad (38)$$

Во втором случае сохранится квадратичная зависимость от $1/d$, хотя численный коэффициент изменится.

На основании полученных оценок заключаем, что главной поправкой является линейная по $1/d$ поправка (35) от треугольника, образованного четырьмя связями. Остальные поправки имеют более высокие степени $1/d$, поэтому мы ими будем пренебрегать.

Таким образом, для АКФ спиновой системы с изотропным взаимодействием ближайших соседей на ГЦК-решетке находим первые члены разложения по $1/d$ координаты на оси мнимого времени особой точки в следующем виде:

$$\tau_0 = 1.12\tau_b \left(1 + \frac{N_3}{Z^2} + \dots\right) = 1.12\tau_\infty \left(1 + \frac{1}{d} + O\left(\frac{1}{d^2}\right)\right), \quad (39)$$

где мы внесли полученное в [8], [12] увеличение координаты $1.12\tau_b$ вследствие свойств многократных коммутаторов, а также учли, что в линейном по $1/d$ приближении $\tau_b = \tau_\infty$.

Интересно сравнить результат для ГЦК-решетки с результатом для ПК-решетки, полученным ранее в работе [12]:

$$\tau_0 = 1.12\tau_b \left(1 + \frac{0.342}{Z-1} + \dots\right) = 1.12\tau_\infty \left(1 + \frac{0.864}{d} + O\left(\frac{1}{d^2}\right)\right).$$

Здесь мы сохранили в τ_b (29) первый член разложения по $1/Z$, линейный по $1/d$ для ПК-решетки, а также заменили 0.344 на 0.342 – результат, уточненный после перерасчета интегралов с полной функцией $\Phi(\varphi)$ (31). Тем самым получаем, что линейный член разложения по $1/d$ в ПК-решетке меньше, чем в ГЦК-решетке, на 14%.

4.2. Аксиально-симметричное взаимодействие. Все способы образования треугольников из связей при вычислении четырех коммутаторов в (4) для M_{4x} приведены в приложении. Для получения вклада $f(t)$ для каждого из таких треугольников нужно взять его вершины в качестве корней новых деревьев. Следуя принятым выше правилам преимущественного учета zz -взаимодействия, будем присоединять новые деревья только zz -связями к поперечным линиям спинов 1, 2 и 3 на диаграммах, т.е. считать теперь эти линии представляющими АКФ $X(t_b - t_f)$, где t_b – начало, а t_f – конец участка, на котором у данного спина проекции x и y могут меняться между собой, но не становиться z -проекцией. По временным переменным вершин на диаграмме последовательно выполняется интегрирование.

По указанным правилам для вклада, соответствующего сумме двух первых диаграмм приложения, получаем в пределе $Z \rightarrow \infty$ выражение

$$C_{3x}^{(1)} = - \left(\frac{4}{5} \right)^3 \frac{q}{50\tau_0} \int_0^{\tau_0} dt (\tau_0 - t)^4 X^2(t) \int_0^t \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \int_0^{t_3} X^2(t_4) dt_1 dt_2 dt_3 dt_4. \quad (40)$$

В этом выражении $X^2(t_4)$ соответствует двум одетым zz -взаимодействиями участкам на интервале $t_2 - t_3$ между вершинами поперечного взаимодействия спинов 2 и 3 (после замены переменных $t_2 - t_3$ на t_4), тогда как $X^2(t)$ – поперечному взаимодействию спина 1 с другим спином цепи $1'$. Существование двух вариантов присоединения треугольника к цепи (спин $1'$ предшествует в цепи спину 1, спин $1'$ следует за спином 1) приводит к удвоению коэффициента. Множитель $(4/5)^2$ следует из введенного в (5), (6) масштаба времени.

Для вклада, соответствующего сумме диаграмм (с), (d) и (f) приложения, получаем

$$C_{3x}^{(2)} = \left(\frac{4}{5} \right)^3 \frac{q}{50\tau_0} \int_0^{\tau_0} dt (\tau_0 - t)^4 X(t) \times \\ \times \int_0^t \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \int_0^{t_3} X(t - t_1) X(t_1 - t_2) X(t_2 - t_3) X(t_3) dt_1 dt_2 dt_3 dt_4.$$

Вклады диаграмм (е) и (h) отличаются только знаком и взаимно компенсируются. Наконец, вклад, соответствующий диаграмме (g), имеет следующий вид:

$$C_{3x}^{(3)} = \left(\frac{4}{5} \right)^3 \frac{q}{50\tau_0} \int_0^{\tau_0} dt (\tau_0 - t)^4 X(t) \times \\ \times \int_0^t \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \int_0^{t_3} X(t - t_1) X(t_1 - t_3) X(t_3) dt_1 dt_2 dt_3 dt_4.$$

У выписанных вкладов треугольник присоединен к узлу дерева с оператором I_1^x . Треугольник может быть присоединен и к узлу дерева с оператором I_1^z ; такой треугольник содержится в M_{4z} АКФ (2) для I_1^z . Соответствующие диаграммы получаются из приведенных в приложении после циклической замены индексов спиновых проекций. Вследствие аксиальной симметрии коэффициентов вклады большинства диаграмм взаимно компенсируются. Остается только одна диаграмма, получающаяся из диаграмм (е) и (f) приложения. Соответствующий ей вклад имеет вид

$$C_{3z} = -2 \left(\frac{4}{5} \right)^2 \frac{1}{50\tau_0} \int_0^{\tau_0} dt (\tau_0 - t)^4 X^2(t) \int_0^t \int_0^{t_1} \Gamma_z(t_1 - t_2) dt_1 dt_2. \quad (41)$$

Такой треугольник образуется из пары соседних спинов на конце цепи, связанных поперечной связью между собой и z -связями с третьим спином. При расчетах (41) $\Gamma_z(t)$ определяем уравнением (6). Легко проверить, что зависящая от времени часть (6) после подстановки в (41) даст $C_{3x}^{(1)}$. Вообще говоря, можно вставить подобные добавки в z -линии на диаграммах M_{4x} , однако, как показали оценки, их величина пренебрежимо мала.

Для оценки величин интегралов подставим в них главную часть для $[X_1(t)]^k$ в окрестности особой точки (7). Находим

$$C_{3x}^{(1)} = -0.384Z^{-3}, \quad C_{3x}^{(2)} = 0.013Z^{-3}, \quad C_{3x}^{(3)} = 0.019Z^{-3}, \quad C_{3z} = -1.312Z^{-3}.$$

Суммируя эти вклады, для поправки (19) к координате особой точки от треугольников получаем

$$\frac{\delta\tau_c}{\tau_b} = 0.832 \frac{N_3 - 4(d-2)}{Z^2} \approx 0.83 \frac{1}{d}. \quad (42)$$

Оценим теперь поправку от четырехкратного взаимодействия соседей, появляющегося в M_{4x} и M_{4z} . Наибольший по величине вклад дает слагаемое, у которого на конце цепи узел 1 с оператором I_1^x , соединенный с соседним узлом 2 четырьмя zz -связями. Учитывая изменение z -полей (6), получаем для этого вклада

$$C_{2x} = \left(\frac{4}{5}\right)^3 \frac{k}{50\tau_0} \int_0^{\tau_0} dt (\tau_0 - t)^4 X^2(t) \times \\ \times \int_0^t \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \int_0^{t_3} \Gamma_z(t_1 - t_2) \Gamma_z(t_3 - t_4) dt_1 dt_2 dt_3 dt_4.$$

После вычисления интеграла находим по формуле (19) с учетом $N_2 = Z$

$$\delta\tau_c = -\frac{0.08\tau_0}{Z}. \quad (43)$$

Следующий по величине вклад тот, у которого спин 2 связан с 1 двумя zz -связями и двумя поперечными связями. Причем они расположены во времени так же, как в перекрестной корреляционной функции (2), т.е. компонента I^x переходит со спина 1 на спин 2 и возвращается обратно. При одевании I_1^x будем учитывать не только ветви, начатые и оконченные zz -связями на одном и том же участке существования I_1^x , но и ветви, начатые на первом, а оконченные на втором участке. Соответствующая поправка к координате особой точки равна

$$\delta\tau_c = -\frac{0.02\tau_0}{Z}. \quad (44)$$

Интересно сравнение с результатами для модели Гейзенберга на ГЦК-решетке, полученными в предыдущем пункте. При переходе к изотропному случаю изменяются численные коэффициенты в формулах: 1.507 в (15) на 1.386 в (29), 0.828 в (42) на 1 в (33), а в сумме (43) и (44) -0.1 на -0.27 из (37).

Для ГЦК-решетки (22) вклады (15), (43) и (44) квадратичны по $1/d$. Как показано выше, такой же порядок величины имеют вклады от четырехугольников, построенных

шестью связями, а вклад треугольника из шести связей от пересечения ветвей, независимо построенных в приближении Бете, имеет третью степень (36). Мы не выписываем эти вклады, поскольку величины соответствующих им в случае диполь-дипольного взаимодействия решеточных сумм [20] значительно меньше таковых для $1/Z$, и они нам не понадобятся в следующем разделе.

Таким образом, на ГЦК-решетке в разложении по обратной размерности пространства координаты особой точки производящих функций системы с аксиально-симметричным взаимодействием первая поправка, линейная по $1/d$, задается выражением (42). Численный коэффициент составляет 83% от его значения (35) в системах с изотропным взаимодействием. Следует обратить внимание на то, что предельное значение координаты в анизотропном случае τ_0 (15), наоборот, превосходит τ_∞ (29) в изотропном случае в 1.21 раза.

5. СРАВНЕНИЕ С ЭКСПЕРИМЕНТОМ

Главная часть (7) корреляционной функции в окрестности ближайшей особой точки определяет крыло ее спектра

$$g(\omega) \approx A_\alpha |\omega|^{\beta-1} e^{-|\omega|\tau_c}. \quad (45)$$

Более того, поскольку особенности всех временных корреляционных функций рассматриваемой спиновой системы должны быть в одной и той же точке, то показатель экспоненты крыла (45) будет один и тот же у них всех, в том числе и у спектра поглощения ЯМР – образа Фурье от корреляционной функции полного спина системы [7].

Экспериментально крыло спектра поглощения ЯМР было исследовано в работе [6] в монокристалле BaF_2 при направлениях магнитного поля вдоль кристаллографических осей [111], [110] и [100]. Частотная зависимость спектра при расстройках от центра спектра, больших $2.2\sqrt{M_2}$, где $M_2 = 9S_1/4$, $S_1 = \sum_j b_{ij}^2$, хорошо описывается экспоненциальной функцией (45) с $\beta = 2$ (это выражается в том, что приведенные на рис. 3 из работы [6] в полулогарифмических координатах экспериментальные точки ложатся на прямую линию). Значения показателя экспоненты τ_e в (27), при которых достигается наилучшее согласие с экспериментом на интервале расстроек от $2.2\sqrt{M_2}$ до $3\sqrt{M_2}$, приведены в таблице в виде отношения к предельному теоретическому значению $\tau_0 = 2.77/\sqrt{M_{2x}}$, полученному в работе [9] по точным спектральным моментам от второго до десятого порядка. Основная ошибка при определении τ_e обусловлена тем, что простая зависимость (45) достигается в пределе $\omega \rightarrow \infty$, т.е. в недоступной из-за шумов области спектра. При приближении же к центру спектра начинает сказываться отклонение его формы от зависимости (45).

Обратимся к полученным выше теоретическим результатам. Их можно распространить на диполь-дипольное взаимодействие после замены $2N_3/Z^2$ в формуле (42) для треугольников и $1/Z$ в формулах (15), (43) и (44) с четырехкратным взаимодействием соответственно на S_3/S_1^2 и S_2/S_1^2 , где $S_3 = \sum_{i \neq j} b_{ij}^2 b_{ik} b_{jk}$, $S_2 = \sum_j b_{ij}^4$. Собирая эти поправки, получаем

$$\frac{\tau_c}{\tau_0} = 1 + 1.41 \frac{S_2}{S_1^2} + 0.41 \frac{S_3}{S_1^2}. \quad (46)$$

Ядра фтора в кристалле ВаF₂ образуют ПК-решетку. Подставив для нее значения решеточных сумм из работы [5], находим величины отношения (46) для трех основных ориентаций магнитного поля, представленные в таблице. Точность этих величин трудно оценить, поскольку разложение (46) является асимптотическим по $1/d$.

Таблица

Направление поля	τ_e/τ_0	τ_c/τ_0
[111]	1.10	1.12
[110]	1.24	1.22
[100]	1.33	1.33

Результаты, приведенные в таблице, демонстрируют хорошее согласие теоретических и экспериментальных значений координат особых точек корреляционных функций во всех трех ориентациях поля. Совпадение результатов двух независимых способов нахождения координаты особой точки показывает, с одной стороны, что ошибки, величину которых мы затруднились оценить, невелики. С другой стороны, сами величины полученных отношений координат могут свидетельствовать о том, что при уменьшении размерности пространства от $d = \infty$ до $d = 3$ особая точка хоть и сдвигается, но не уходит на бесконечность.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ВКЛАД ТРЕУГОЛЬНИКА В $M_{4\alpha}$

Вычисление многократного коммутатора в (4) удобно проводить для гамильтониана общего вида

$$\mathcal{H} = \sum_{i \neq j} (b_{ij}^x I_i^x I_j^x + b_{ij}^y I_i^y I_j^y + b_{ij}^z I_i^z I_j^z).$$

При нахождении вклада в момент от треугольника для наглядного изображения последовательности коммутаторов в (4) будем использовать введенные в [8], [9] правила. Вершина (точка на временной оси) обозначает выполненную в соответствующий момент времени операцию коммутации, а соединяющая вершины линия с номером — компоненту векторного оператора спина с соответствующим узловым индексом, проекция которой определяется видом линии: сплошная — x , штриховая — y , пунктирная — z .

Выберем некоторый спин в узле 1 и найдем для его АКФ вклад в (4), которому соответствует треугольник из связей спинов 1, 2 и 3. Такой треугольник можно построить восемью способами расстановки взаимодействий в четырех коммутаторах:

(а)

Сомножитель 2 перед произведением коэффициентов учитывает возможность перестановки узельных индексов 2 и 3 на диаграмме. Еще один сомножитель 2 у четырех последних (несимметричных) диаграмм учитывает возможность перестановки порядка следования вершин во времени на обратный порядок.

Сложив коэффициенты, получим вклад треугольника в M_{4x} . Чтобы получить соответствующий вклад в M_{4z} , нужно выполнить циклическую перестановку индексов проекций. Результаты согласуются с результатами работы [13] для диполь-дипольного взаимодействия и работы [14] для изотропного взаимодействия.

Благодарности. Авторы признательны Ю. Н. Иванову и А. И. Лившицу за предоставленные экспериментальные спектры ЯМР. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 02-02-17463).

Список литературы

- [1] *T. Morita.* J. Math. Phys. 1971. V. 12. P. 2062.
- [2] *K. S. J. Jensen, K. E. Hansen.* Phys. Rev. B. 1973. V. 7. P. 2910.
- [3] *R. E. Walstedt.* Phys. Rev. B. 1972. V. 5. P. 3782; *W. G. Thomlinson, J. F. Kelly, R. C. Richardson.* Phys. Lett. A. 1972. V. 38. P. 531; *C. Cusumano, G. J. Troup.* Phys. Stat. Sol. (b). 1974. V. 65. P. 655.
- [4] *D. A. McArthur, E. L. Hahn, R. E. Walstedt.* Phys. Rev. 1969. V. 188. P. 609.
- [5] *H. T. Stokes, D. C. Ailion.* Phys. Rev. B. 1977. V. 15. P. 1271.
- [6] *В. Е. Зобов, М. А. Попов, Ю. Н. Иванов, А. И. Лившиц.* ЖЭТФ. 1999. Т. 115. С. 285.
- [7] *А. Абрагам.* Ядерный магнетизм. М.: ИЛ, 1963.
- [8] *В. Е. Зобов.* ТМФ. 1988. Т. 77. С. 426.
- [9] *В. Е. Зобов.* ТМФ. 1990. Т. 84. С. 111.
- [10] *M. E. Fisher, D. S. Gaunt.* Phys. Rev. 1964. V. 133. P. A224; *A. B. Harris.* Phys. Rev. B. 1982. V. 26. P. 337.
- [11] *В. Е. Зобов.* ТМФ. 2000. Т. 123. С. 116.
- [12] *В. Е. Зобов, М. А. Попов.* ТМФ. 2002. Т. 131. С. 491.
- [13] *K. S. J. Jensen, K. E. Hansen.* Phys. Rev. B. 1976. V. 13. P. 1903.
- [14] *J. W. Tucker.* Solid. State Commun. 1978. V. 25. P. 367.
- [15] *A. A. Lundin, A. V. Makarenko, V. E. Zobov.* J. Phys.: Condens. Matter. 1990. V. 2. P. 10131.
- [16] *В. Е. Зобов, А. А. Лундин.* ЖЭТФ. 1994. Т. 106. С. 1097.
- [17] *P. Borckmans, D. Walgraef.* Phys. Rev. B. 1973. V. 7. P. 563.
- [18] *G. Sauermann, M. Wiegand.* Physica B. 1981. V. 103. P. 309; *Г. Е. Карнаух, А. А. Лундин, Б. Н. Провоторов, К. Т. Сумманен.* ЖЭТФ. 1986. Т. 91. С. 2229.
- [19] *М. И. Булгаков, А. Д. Гулько, Ф. С. Джепаров и др.* Письма в ЖЭТФ. 1993. Т. 58. С. 614.
- [20] *W. F. Wurzbach, S. Gade.* Phys. Rev. B. 1972. V. 6. P. 1724; *В. Е. Зобов, М. А. Попов.* ЖЭТФ. 1993. Т. 103. С. 2129; 1995. Т. 108. С. 1450.

Поступила в редакцию 23.VII.2002 г.,
после доработки 12.II.2003 г.