Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Аторн, Ковариантные гиперэллиптические функции рода 2, *ТМФ*, 2003, том 137, номер 1, 5–13

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf238>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 15:22:27

© 2003 г.

К. Аторн*

КОВАРИАНТНЫЕ ГИПЕРЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ РОДА 2

Излагаются результаты исследований, касающихся роли представлений группы $SL_2(\mathbb{C})$ в теории гиперэллиптических функций рода 2. Обсуждается роль этих представлений как в классической теории, так и при введении семейства новых естественно ковариантных $\mathcal{P}$ -функций.

Ключевые слова: гиперэллиптические кривые, ковариантность, $\wp$ -функции, производные Хироты.

Данная статья содержит краткое изложение результатов исследований, проведенных совместно с Эйлбеком и Энольски и касающихся роли представлений группы $SL_2(\mathbb{C})$ в теории гиперэллиптических функций второго рода. Полное рассмотрение этого вопроса можно найти в работах [1], [2]. Отправной точкой наших исследований по гиперэллиптическим функциям на кривых рода 2 является система уравнений, появившаяся в работе Бейкера 1907 г. (см. [3], с. 49). Это система из пяти дифференциальных уравнений четвертого порядка в частных производных с двумя независимыми переменными u_1 и u_2 , ей удовлетворяет функция $\wp$, которую следует рассматривать как аналог $\wp$ -функции Вейерштрасса для эллиптической кривой:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3}\wp_{2222} + 2\wp_{22}^2 &= g_2g_6 - 4g_3g_5 + 3g_4^2 + g_4\wp_{22} - 2g_5\wp_{12} + g_6\wp_{11}, \\ -\frac{1}{3}\wp_{2221} + 2\wp_{22}\wp_{12} &= \frac{1}{2}(g_1g_6 - 3g_2g_5 + 2g_3g_4) + g_3\wp_{22} - 2g_4\wp_{12} + g_5\wp_{11}, \\ -\frac{1}{3}\wp_{2211} + \frac{2}{3}\wp_{22}\wp_{11} + \frac{4}{3}\wp_{12}^2 &= \frac{1}{6}(g_0g_6 - 9g_2g_5 + 8g_3^2) + g_2\wp_{22} - 2g_3\wp_{12} + g_4\wp_{11}, \\ -\frac{1}{3}\wp_{2111} + 2\wp_{21}\wp_{11} &= \frac{1}{2}(g_0g_5 - 3g_1g_4 + 2g_2g_3) + g_1\wp_{22} - 2g_2\wp_{12} + g_3\wp_{11}, \\ -\frac{1}{3}\wp_{1111} + 2\wp_{11}^2 &= g_0g_4 - 4g_1g_3 + 3g_2^2 + g_0\wp_{22} - 2g_1\wp_{12} + g_2\wp_{11}. \end{aligned}$$

Здесь нижние индексы обозначают частные производные по независимым переменным, а параметры g_i представляют собой коэффициенты уравнения алгебраической кривой рода 2

$$y^2 = g_6x^6 + 6g_5x^5 + 15g_4x^4 + 20g_3x^3 + 15g_2x^2 + 6g_1x + g_0. \quad (1)$$

*Department of Mathematics, University of Glasgow, Glasgow, G12 8QW UK.
E-mail: c.athorne@maths.gla.ac.uk

Наше исследование отчасти мотивировано наблюдением Бейкера: левые части вышеприведенных уравнений, как легко видеть, представляют собой пределы при $u_i \rightarrow u'_i$, $i = 1, 2$, выражений

$$-\frac{1}{2\sigma(u_1, u_2)^2} \Delta_\lambda \Delta_\mu \Delta_\nu \Delta_\rho \sigma(u_1, u_2) \sigma(u'_1, u'_2),$$

где $\Delta_i = \partial/\partial u_i - \partial/\partial u'_i$ при $i = 1, 2$ и $\wp = -\ln \sigma$. Бейкер использовал эти выражения чисто формально для сокращения обозначений, но современный читатель узнает в них производные Хироты [4]. Недавние работы [5]–[8] продемонстрировали роль отображений типа Хироты в теории представлений группы $SL_2(\mathbb{C})$; возможно, такой подход окажется полезным для понимания уравнений Бейкера.

В этой работе мы изложим соответствующую теорию представлений и те ее следствия для ковариантности уравнений Бейкера, которые объясняют роль отображений Хироты–Бейкера, а также предложим альтернативное определение фундаментальных функций $\wp$ -типа, которые более естественны и удобны с точки зрения теории представлений.

Начнем с кривой (1), которую назовем кривой $\mathcal{V}$. Семейство таких кривых представляет собой семимерное пространство, точки которого переставляются при отображениях

$$x \mapsto X = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, \quad (2)$$

$$y \mapsto Y = \frac{y}{(\gamma x + \delta)^3} \quad (3)$$

в том смысле, что такие преобразования переводят кривую $\mathcal{V}$ в кривую того же семейства, но, вообще говоря, с другим набором коэффициентов:

$$Y^2 = G_6 X^6 + 6G_5 X^5 + 15G_4 X^4 + 20G_3 X^3 + 15G_2 X^2 + 6G_1 X + G_0. \quad (4)$$

Можно принять, что в (2) $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, и, следовательно, данное отображение есть элемент $PSL_2(\mathbb{C})$. Будем считать, что оно индуцировано преобразованием из $SL_2(\mathbb{C})$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta & \gamma \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix},$$

если произвести отождествление $x = z_2/z_1$, $X = Z_2/Z_1$. Примем это действие группы $SL_2(\mathbb{C})$ в качестве базисного представления и назовем его V . Тогда представление группы $SL_2(\mathbb{C})$, реализуемое коэффициентами уравнения кривой шестого порядка

$$g_i \mapsto G_i = G_i(g_0, g_1, \dots, g_6; \alpha, \beta, \gamma, \delta),$$

есть $\text{Sym}^6(V^*)$, где V^* – представление, дуальное V .

В инфинитезимальной форме эти преобразования задаются векторными полями на девятимерном пространстве переменных и параметров $(x, y, g_6, g_5, g_4, g_3, g_2, g_1, g_0)$:

$$\begin{aligned} e &= -\frac{\partial}{\partial x} + \sum_{p=0}^6 (6-p)g_{p+1} \frac{\partial}{\partial g_p}, \\ f &= x^2 \frac{\partial}{\partial x} + 3xy \frac{\partial}{\partial y} + \sum_{p=0}^6 pg_{p-1} \frac{\partial}{\partial g_p}, \\ h &= -2x \frac{\partial}{\partial x} + 3y \frac{\partial}{\partial y} + \sum_{p=0}^6 (2p-6)g_p \frac{\partial}{\partial g_p}, \end{aligned}$$

которые реализуют представление алгебры $sl_2(\mathbb{C})$:

$$[h, e] = 2e, \quad [h, f] = -2f, \quad [e, f] = h.$$

Ковариантность кривой $\mathcal{V}$ выражается следующими утверждениями:

$$\begin{aligned} e(y^2 - g(x)) &= 0, \\ f(y^2 - g(x)) &= 6x(y^2 - g(x)), \\ h(y^2 - g(x)) &= 6(y^2 - g(x)), \end{aligned}$$

где $g(x)$ есть полином

$$g_6x^6 + 6g_5x^5 + 15g_4x^4 + 20g_3x^3 + 15g_2x^2 + 6g_1x + g_0.$$

Якобиан кривой $\mathcal{V}$ есть по существу симметричное произведение $\text{Sym}^2 \mathcal{V}$, и если (x_1, y_1) и (x_2, y_2) – пара точек на $\mathcal{V}$, то два голоморфных дифференциала на якобиане имеют вид

$$\begin{aligned} du_1 &= \frac{dx_1}{y_1} + \frac{dx_2}{y_2}, \\ du_2 &= \frac{x_1 dx_1}{y_1} + \frac{x_2 dx_2}{y_2}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что du_1 и du_2 преобразуются линейно под действием группы $SL_2(\mathbb{C})$. Стандартный базис $\{\partial_1, \partial_2\}$ касательного пространства к якобиану, дуальный этим один-формам, преобразуется по дуальному представлению V^* :

$$\begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ -\gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \end{pmatrix}.$$

Инфинитезимальная форма этих преобразований имеет вид

$$\begin{aligned} e(\partial_1) &= \partial_2, & e(\partial_2) &= 0, \\ f(\partial_1) &= 0, & f(\partial_2) &= \partial_1. \end{aligned}$$

В дальнейшем мы сосредоточимся на объектах, которые являются конечномерными представлениями $SL_2(\mathbb{C})$. Это имеет ряд преимуществ. Во-первых, любое тождество в теории ассоциированных $\wp$ -функций будет принадлежать мультиплету тождеств, члены которого можно получить действием операторов e и f . Эта ковариантность, с одной стороны, представляет собой удобный механизм получения этих тождеств, а с другой стороны, обеспечивает проверку их алгебраической правильности. Во-вторых, сама теория представлений подсказывает, где искать такие тождества. Действительно, она фактически предлагает естественные определения нового семейства функций $\wp$ -типа, обозначаемых здесь через $\mathcal{P}$. Наконец, при детальном рассмотрении выявляются и другие преимущества.

Однако следующий шаг представляется шагом назад, поскольку классическая теория $\wp$ -функций имеет дело не с кривой $\mathcal{V}$ в ее общей форме (1), а с канонической формой

$$Y^2 = 4X^5 + 15G_4X^4 + 20G_3X^3 + 15G_2X^2 + 6G_1X + G_0, \quad (5)$$

обозначаемой здесь через $\pi(\mathcal{V})$. Это уравнение кривой пятого порядка получается из (1) $SL_2(\mathbb{C})$ -преобразованием с параметрами $\alpha = \mu$, $\beta = 0$, $\gamma = \mu/\theta$ и $\delta = 1/\mu$, где $g(\theta) = 0$,

$$\frac{2}{3\mu^4} = g_5 + \frac{5g_4}{\theta} + \frac{19g_3}{\theta^2} + \frac{10g_2}{\theta^3} + \frac{5g_1}{\theta^4} + \frac{g_0}{\theta^5};$$

π обозначает эту специальную, использующую параметры θ и μ , проекцию на каноническую форму.

Этот “выбор калибровки” нарушает ковариантность семейства кривых. Отображению π отвечает отображение π^* векторных полей e , f и h . Аккуратное вычисление показывает, что

$$\pi^*(e) = \frac{1}{\mu^2}E, \quad \pi^*(f) = 0, \quad \pi^*(h) = 0,$$

где

$$E = -\frac{\partial}{\partial X} + \sum_{p=0}^3 (6-p)G_{p+1} \frac{\partial}{\partial G_p} + \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial G_4}.$$

Таким образом, спроектированная кривая еще “чувствует” действие векторного поля e , но вариации в направлениях f и h подавлены нормировкой коэффициентов $G_6 = 0$ и $G_5 = 2/3$. Это остаточное действие можно было бы устранять и далее, нормируя другие коэффициенты кривой пятого порядка (как это, вообще говоря, и делают с кубической кривой в случае первого рода), но, кажется, исторически так не делается, и с нашей точки зрения это было бы еще бóльшим шагом назад.

Используя точки (X_1, Y_1) и (X_2, Y_2) , определим на кривой $\pi(\mathcal{V})$ семейство функций с двойным индексом

$$\begin{aligned} P_{22} &= X_1 + X_2 + \frac{3}{2}G_4, \\ P_{12} &= -X_1X_2 + \frac{1}{2}G_3, \\ P_{11} &= \frac{F(X_1, X_2) - 2Y_1Y_2}{2(X_1 - X_2)^2} + \frac{3}{2}G_2, \end{aligned}$$

где F — полярная форма

$$F(x_1, X_2) = 4X_1^2 X_2^2 (X_1 + X_2) + 30G_4 X_1^2 X_2^2 + 20G_3 X_1 X_2 (X_1 + X_2) + 30X_1 X_2 + 6G_1 (X_1 + X_2) + 2G_0.$$

Непосредственно проверяется, что $E(P_{11}) = 2P_{12}$, $E(P_{12}) = P_{22}$ и $E(P_{22}) = 0$. Справедливы также соотношения $\partial_1 P_{22} = \partial_2 P_{12}$, $\partial_1 P_{12} = \partial_2 P_{11}$, и соответственно существует потенциал P такой, что $P_{11} = \partial_1^2 P$, $P_{12} = \partial_1 \partial_2 P$ и $P_{22} = \partial_2^2 P$. Это согласуется с действием E , $E(\partial_1) = \partial_2$, $E(\partial_2) = 0$, но это все, что мы можем сказать о действии группы, так как триплет (P_{11}, P_{12}, P_{22}) не является полным представлением $SL_2(\mathbb{C})$. Классическое средство [3] против этого недостатка — *навязать* ковариантность, определив вектор из двухиндексных $\wp$ -функций при помощи преобразования, обратного преобразованию, проектирующему данную кривую на ее каноническую форму. Таким образом,

$$\begin{pmatrix} \wp_{22} \\ \wp_{12} \\ \wp_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu^2} & -\frac{2}{\theta} & \frac{\mu^2}{\theta^2} \\ 0 & 1 & -\frac{\mu^2}{\theta} \\ 0 & 0 & \mu^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{22} \\ P_{12} \\ P_{11} \end{pmatrix}.$$

Установив действие e и f на параметры θ и μ из определяющих их соотношений и вспомнив, что $\pi^*(e) = E/\mu^2$, можно проверить, что $\wp_{ij}$ имеют правильные свойства трехмерного представления группы $SL_2(\mathbb{C})$:

$$\begin{aligned} e(\wp_{11}) &= 2\wp_{12}, & e(\wp_{12}) &= \wp_{22}, & e(\wp_{22}) &= 0, \\ f(\wp_{22}) &= 0, & f(\wp_{12}) &= \wp_{22}, & f(\wp_{11}) &= 2\wp_{12}. \end{aligned}$$

Кроме того, функции $\wp_{ij}$ сохраняют перекрестно-дифференциальные свойства функций P_{ij} . Соответствующий потенциал запишем в виде $-\ln \sigma(u_1, u_2)$.

Структура оригинальных уравнений Бейкера, с которых мы начинали, с точки зрения теории представлений совершенно очевидна. Для обозначения представлений, соответствующих функциям $\wp$ или коэффициентам уравнения кривой шестого порядка, будем использовать буквы с одним целочисленным нижним индексом, указывающим на размерность представления. Тогда соотношение между представлениями схематически можно представить в виде

$$\wp_5 + (\wp_3 \otimes \wp_3)_5 = (g_7 \otimes g_7)_5 + (g_7 \otimes \wp_3)_5,$$

где $(A \otimes B)_n$ обозначает проекцию на (единственную) n -мерную неприводимую компоненту тензорного произведения. Это можно проверить, действуя операторами e и f на отдельные уравнения; в частности, можно видеть, что верхнее и нижнее уравнения принадлежат ядрам соответственно e и f .

Таким образом, пять уравнений Бейкера являются выражением одного тензорного тождества. Отсюда ясно также, что они порождают семейство решений уравнения Бусинеска. Например, дважды продифференцировав последнее из уравнений по u_2 , введя

обозначение $\phi = \wp_{22}$, проведя масштабное преобразование, добавив подходящую константу и выполнив галилеевский буст, мы воспроизведем уравнение Буссинеска. Это не самое общее решение, поскольку оно должно удовлетворять еще четырем другим уравнениям, но *любая* кривая рода 2 дает такое решение.

Это наблюдение плодотворно еще с одной стороны. Для уравнения Буссинеска существует хорошо известная пара Лакса. Но в этом случае тензорная природа уравнений Бейкера позволяет обобщить эту пару на *зависящую от параметра* пару Лакса, условием совместности которой является полная система пяти уравнений. Операторы Лакса – это векторные поля на якобиане (подробности можно найти в работе [2]).

Функции $\wp_{ij}$ не униформизируют кривую шестого порядка. Но они действительно униформизируют поверхность Куммера, которая представляет собой якобиан $\text{Sym}^2 \mathcal{V}$, факторизованный по инволюции. В терминах функций $\wp_{ij}$ поверхность Куммера определяется уравнением

$$\begin{vmatrix} g_6 & -3g_5 & 3g_4 + 2\wp_{22} & -g_3 - 2\wp_{12} \\ -3g_5 & 9g_4 - 4\wp_{22} & -9g_3 + 2\wp_{12} & 3g_2 + 2\wp_{11} \\ 3g_4 + 2\wp_{22} & -9g_3 + 2\wp_{12} & 9g_2 - 4\wp_{11} & -3g_1 \\ -g_3 - 2\wp_{12} & 3g_2 + 2\wp_{11} & -3g_1 & g_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Вышеприведенное определение двухиндексных $\wp$ -функций является классическим, однако оно не включает в себя основополагающую ковариантность естественным образом. В дальнейшем мы представим семейство естественно ковариантных двухиндексных объектов с теми же необходимыми свойствами. Будет показано, как легко получаются тождества для этих объектов и их производных и как эти тождества сводятся к классическим при соответствующих условиях.

Но прежде чем заняться этим, остановимся кратко на роли отображений Хироты–Бейкера (“производных”) в теории представлений (детали см. в [5], [6]).

Элементы e, f и h алгебры $sl_2(\mathbb{C})$ действуют, вообще говоря, на n -мерных представлениях $A_n, B_n, \dots$ группы $SL_2(\mathbb{C})$. Обозначим базисы этих представлений через $\{a_0, a_2, \dots, a_{n-1}\}, \{b_0, b_2, \dots, b_{n-1}\}, \dots$, где $a_0, b_0, \dots \in \ker e$ – векторы младшего веса, а $a_{n-1}, b_{n-1}, \dots \in \ker f$ – векторы старшего веса. Действие элемента $v \in sl_2(\mathbb{C})$ продолжается на тензорные произведения по правилу Лейбница

$$v(a \otimes b) = v(a) \otimes b + a \otimes v(b)$$

и т. д.

Простейшее отображение Хироты–Бейкера определяется как отображение одного тензорного произведения на другое:

$$D: A_n \otimes B_m \rightarrow A_{n+1} \otimes B_{m+1}$$

по формуле

$$D(a_p \otimes b_q) = a_{p+1} \otimes b_q - a_p \otimes b_{q+1}.$$

В этом случае (двукратного тензорного произведения) оператор D является *сплетающим* по отношению к действию алгебры $sl_2(\mathbb{C})$, т.е.

$$[D, e] = [D, h] = [D, f] = 0.$$

В случае тензорного произведения порядка s имеется $s - 1$ таких (обобщенных) операторов D , но они являются сплетающими лишь частично: они коммутируют с подалгеброй, порождаемой единственным элементом f .

Сплетающий оператор D переводит векторы старшего веса произведения $A_n \otimes B_m$ в старшие векторы произведения $A_{n+1} \otimes B_{m+1}$ (в случае тензорного произведения второго порядка это же справедливо для векторов младшего веса). Поскольку векторы старшего веса нумеруют неприводимые представления, отображение Бейкера–Хироты позволяет явно построить базисы неприводимых компонент любого тензорного произведения. Фактически полиномы по обобщенным операторам обеспечивают полное описание плетизма [6].

Заметим, что производная Хироты [4] получается из вышеописанного оператора D при переходе к бесконечномерным проективным представлениям, в этом случае алгебра $sl_2(\mathbb{C})$ заменяется алгеброй Гейзенберга [8].

Покажем, как используется оператор D , на примере двумерного и трехмерного представлений $\wp_2$ и $\wp_3$ с базисами $\{\wp_1, \wp_2\}$ и $\{\wp_{11}, \wp_{12}, \wp_{22}\}$, соответственно. Вектор старшего веса имеет вид $\mathbf{v} = \wp_2 \otimes \wp_{22}$. Поскольку $\mathbf{2} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{2} \oplus \mathbf{4}$, этот вектор порождает неприводимое представление размерности четыре. Образ D на этом векторе имеет вид

$$D(\mathbf{v}) = \wp_{22} \otimes \wp_{122} - \wp_{12} \otimes \wp_{222}$$

и является вектором старшего веса другого неприводимого представления той же размерности четыре.

Введем семейство новых двухиндексных объектов, которые обозначим через $\mathcal{P}$. Они реализуют трехмерное представление группы $SL_2(\mathbb{C})$:

$$\mathcal{P}_{11} = \frac{2x_1x_2}{x_1 - x_2}, \quad \mathcal{P}_{12} = -\frac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2}, \quad \mathcal{P}_{22} = \frac{2}{x_1 - x_2}. \quad (6)$$

Замечательно, что эти функции удовлетворяют условию для перекрестных производных

$$\partial_1 \mathcal{P}_{12} = \partial_2 \mathcal{P}_{11}, \quad \partial_2 \mathcal{P}_{12} = \partial_1 \mathcal{P}_{22}$$

и, следовательно, могут быть выражены в терминах потенциала $\mathcal{P}_{ij} = \partial_i \partial_j \mathcal{P}$, который должен удовлетворять уравнению Монжа–Ампера

$$\mathcal{P}_{12}^2 - \mathcal{P}_{11}\mathcal{P}_{22} = 1. \quad (7)$$

Теперь у нас есть набор инструментов для построения дифференциальных тождеств, которым удовлетворяют все многоиндексные $\mathcal{P}$ -функции: алгебраическая кривая $y_i^2 = g(x_i)$ для $i = 1, 2$, производные ∂_i при $i = 1, 2$, отображающие n -мерные представления

в $(n+1)$ -мерные, и отображение D Хироты–Бейкера, которое выделяет векторы старшего веса и тем самым указывает, как классифицировать тождества.

Например, из вышеприведенного трехмерного представления мы построили четырехмерное представление $\{\mathcal{P}_{111}, \mathcal{P}_{112}, \mathcal{P}_{122}, \mathcal{P}_{222}\}$. Поскольку $4 \otimes 4 = 1 \oplus 3 \oplus 5 \oplus 7$, где только **3** и **7** остаются после симметризации в полиномы, естественно обратить внимание на векторы старшего веса $\mathcal{P}_{112}\mathcal{P}_{222} - \mathcal{P}_{122}^2$ (происходящего из $D^2(\mathcal{P}_2 \otimes \mathcal{P}_2)$) и $\mathcal{P}_{222}^2$, соответственно. Исходя из определения производных ∂_1 и ∂_2 находим, что трехиндексные $\mathcal{P}$ -функции имеют вид

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{111} &= 2 \frac{y_1 x_2^3 + y_2 x_1^3}{(x_1 - x_2)^3}, & \mathcal{P}_{112} &= 2 \frac{y_1 x_2^2 + y_2 x_1^2}{(x_1 - x_2)^3}, \\ \mathcal{P}_{122} &= 2 \frac{y_1 x_2 + y_2 x_1}{(x_1 - x_2)^3}, & \mathcal{P}_{222} &= 2 \frac{y_1 + y_2}{(x_1 - x_2)^3}.\end{aligned}$$

Тогда из тождеств, связывающих между собой x_i и y_i , следует, что

$$\mathcal{P}_{222}^2 - \mathcal{I}\mathcal{P}_{22}^3 = F_6(\mathcal{P}_{11}, \mathcal{P}_{12}, \mathcal{P}_{22}). \quad (8)$$

Здесь F_6 – полином шестой степени, коэффициенты которого зависят от g_i . Его детальный вид можно найти в работе [1], но с современной точки зрения важно лишь то, что это старший вектор семимерного неприводимого представления. Величина $\mathcal{I}$ является очень важным инвариантом (представлением размерности один), к которому мы вскоре вернемся. Полный набор семи тождеств генерируется рекуррентным применением оператора f до тех пор, пока не получится вектор младшего веса.

Тождества для трехмерного представления имеют более простой вид:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{112}\mathcal{P}_{222} - \mathcal{P}_{122}^2 &= \mathcal{I}\mathcal{P}_{22}, \\ \mathcal{P}_{111}\mathcal{P}_{222} - \mathcal{P}_{122}\mathcal{P}_{112} &= 2\mathcal{I}\mathcal{P}_{12}, \\ \mathcal{P}_{111}\mathcal{P}_{122} - \mathcal{P}_{112}^2 &= \mathcal{I}\mathcal{P}_{11}.\end{aligned} \quad (9)$$

Инвариант $\mathcal{I}$ равен $2y_1y_2/(x_1 - x_2)^3$, или в терминах $\mathcal{P}$ -функций

$$\mathcal{I} = \begin{vmatrix} \mathcal{P}_{111} & \mathcal{P}_{112} & \mathcal{P}_{122} \\ \mathcal{P}_{112} & \mathcal{P}_{122} & \mathcal{P}_{222} \\ \mathcal{P}_{11} & \mathcal{P}_{12} & \mathcal{P}_{22} \end{vmatrix}.$$

Он явно удовлетворяет квадратичному тождеству

$$\mathcal{I}^2 = S(\mathcal{P}_{11}, \mathcal{P}_{12}, \mathcal{P}_{22}),$$

где функция в правой части является инвариантом кривой шестого порядка. Это соотношение симметрично при перестановке (x_1, y_1) и (x_2, y_2) и одновременном отождествлении инволютивных точек $y \mapsto -y$. Следовательно, оно представляет собой уравнение якобиана $\text{Sym}^2 \mathcal{V}$, факторизованного по инволюции, т.е. уравнение поверхности Куммера.

В этой форме тождество имеет интересный геометрический смысл. Если записать трехмерное представление в виде $\mathbf{x} = (\mathcal{P}_{11}, \mathcal{P}_{12}, \mathcal{P}_{22})$, то $\mathcal{I}$ оказывается скалярным тройным произведением

$$\mathcal{I} = \mathbf{x} \cdot (\partial_1 \mathbf{x} \times \partial_2 \mathbf{x}),$$

где $\mathbf{x}$ лежит на квадратичной форме, описываемой уравнением Монжа–Ампера (относительно дальнейших деталей этого подхода и теории представлений см. соответственно [1] и [2]).

Дальнейшие исследования возможны по ряду направлений. Наиболее очевидное связано с кривыми высших родов [9]. Пока мы имеем дело с кривыми вида $f(x, y) = 0$, вполне вероятно, что именно теория представлений группы $SL_2(\mathbb{C})$ является важной. Однако возможно, что фундаментальные двухиндексные объекты нужно определять несколько по-другому и включать представления более общих размерностей. Вторая тема – это формулы сложения. Вообще говоря, они выписываются применительно к канонической форме, поэтому ковариантность не является очевидной. Вероятно, законы абелевой группы можно сформулировать подобным образом. Наконец, классическим является вопрос о разложении функции σ по u_1 и u_2 . Опыт исследований в области систем дифференциальных уравнений, зависящих от параметров, дает возможность предположить, что рекурсивные операторы для таких рядов можно найти, если записывать их в ковариантной форме.

Благодарности. Автор и его соавторы, К. Эйлбек и В. Энольски, благодарят Институт математических наук имени Исаака Ньютона, Кембридж, Великобритания, и в частности организаторов и участников конференции Integrable Systems Programme, состоявшейся там в конце 2002 г., за проявленный интерес и поддержку. Автор благодарен также Университету Глазго за финансовую поддержку, позволившую ему принять участие в конференции NEEDS 2002 в Кадисе.

Список литературы

- [1] *C. Athorne, J. J. C. Eilbeck, V. Z. Enolski.* An SL_2 covariant theory of genus 2 hyperelliptic functions. Glasgow Dept. Math. Preprint. Glasgow: Glasgow Dept. Math., 2002.
- [2] *C. Athorne, J. J. C. Eilbeck, V. Z. Enolski.* Identities for the classical genus 2 $\wp$ function. Glasgow Dept. Math. Preprint. Glasgow: Glasgow Dept. Math., 2002.
- [3] *H. F. Baker.* Multiply Periodic Functions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1907.
- [4] *R. Hirota.* Direct method of finding exact solutions of nonlinear evolution equations. In: Bäcklund Transformations, the Inverse Scattering Method, Solitons, and Their Applications. Lect. Notes Math. V. 515. Ed. R. M. Miura. Berlin: Springer, 1976. P. 40–68.
- [5] *C. Athorne.* Phys. Lett. A. 1999. V. 256. P. 20–24.
- [6] *C. Athorne.* Glasgow Math. J. 2001. P. 1–8.
- [7] *B. Grammaticos, A. Ramani, J. Hietarinta.* Phys. Lett. A. 1994. V. 190. P. 65–70.
- [8] *P. J. Olver, J. A. Sanders.* Adv. Appl. Math. 2000. V. 25. P. 252–283.
- [9] *V. M. Buchstaber, V. Z. Enolski'i, D. V. Leykin.* Rev. Math. Phys. 1997. V. 10. P. 3–120.