Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Бялецки, А. Долива, Дискретные уравнения Кадомцева–Петвиашвили и Кортевега–де Фриза над конечными полями, *ТМФ*, 2003, том 137, номер 1, 66–73

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf240>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 06:41:48

© 2003 г.

М. Бялецки*, А. Долива†

ДИСКРЕТНЫЕ УРАВНЕНИЯ КАДОМЦЕВА–ПЕТВИАШВИЛИ И КОРТЕВЕГА–ДЕ ФРИЗА НАД КОНЕЧНЫМИ ПОЛЯМИ

Предложен алгебро-геометрический метод построения решений дискретного уравнения Кадомцева–Петвиашвили над конечным полем. Произведена соответствующая редукция к конечно-полевой версии уравнения Кортевега–де Фриза. Выписаны формулы, позволяющие построить многосолитонные решения этих уравнений исходя из вакуумной волновой функции на произвольной неособой кривой.

Ключевые слова: интегрируемые системы, клеточный автомат, конечные поля.

1. ВВЕДЕНИЕ

Цель настоящей статьи – представить общий алгебро-геометрический метод построения решений клеточного автомата, ассоциированного с дискретным уравнением Кадомцева–Петвиашвили (КП) [1]

$$\begin{aligned} &\tau(n_1 + 1, n_2, n_3)\tau(n_1, n_2 + 1, n_3 + 1) - \tau(n_1, n_2 + 1, n_3)\tau(n_1 + 1, n_2, n_3 + 1) + \\ &+ \tau(n_1, n_2, n_3 + 1)\tau(n_1 + 1, n_2 + 1, n_3) = 0 \end{aligned}$$

и его редукцией к дискретному уравнению Кортевега–де Фриза (КдФ) [2]

$$\begin{aligned} &\tau(n_1 + 1, n_3)\tau(n_1, n_3) - \tau(n_1, n_3 - 1)\tau(n_1 + 1, n_3 + 1) + \\ &+ \tau(n_1, n_3 + 1)\tau(n_1 + 1, n_3 - 1) = 0. \end{aligned}$$

Оказывается, что основные алгебро-геометрические идеи построения решений этих уравнений переносятся из теории римановых поверхностей на алгебраические кривые над конечными полями. Побудительные мотивы к перенесению дискретных уравнений на

*Instytut Fizyki Teoretycznej, Uniwersytet w Białymstoku, ul. Lipowa 41, 15-424 Białystok; Instytut Geofizyki PAN, ul. Księcia Janusza 64, 01-452 Warszawa, Poland

†Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Warmińsko-Mazurski, ul. Żołnierska 14A, 10-561 Olsztyn, Poland. E-mail: doliwa@matman.uwm.edu.pl

область конечных полей изложены в нашей недавней работе [3], где содержатся ссылки на соответствующую литературу.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 представлена общая алгебро-геометрическая схема построения решений дискретного уравнения КП, в разделе 3 – алгебро-геометрическая схема редукции уравнения КП к дискретному уравнению КдФ. Раздел 4 посвящен построению многосолитонных решений (на нетривиальном фоне) исходя из вакуумных волновых функций на алгебраических кривых над конечными полями. В качестве простого приложения общего метода построены многосолитонные решения исходя из алгебраической кривой рода ноль (проективная прямая).

2. РЕШЕНИЯ ДИСКРЕТНОГО УРАВНЕНИЯ КП ПО АЛГЕБРАИЧЕСКИМ КРИВЫМ НАД КОНЕЧНЫМИ ПОЛЯМИ

Этот раздел основан на алгебро-геометрическом подходе (над комплексным полем) к дискретному уравнению КП (или Хироты) (см., например, [4] и [5]) и подробном исследовании эквивалентной версии дискретного уравнения КП (дискретного аналога полевой системы Тоды) в связи с решениями, принимающими значения в конечном поле (см. работу [3]).

Рассмотрим алгебраическую проективную кривую $\mathcal{C}$ рода g , абсолютно неприводимую, неособую, определенную над конечным полем $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ из q элементов, где q является степенью простого целого p (см., например, [6]). Обозначим через $\mathcal{C}_{\mathbb{K}}$ множество $\mathbb{K}$ -рациональных точек этой кривой. Пусть $\overline{\mathbb{K}}$ обозначает алгебраическое замыкание $\mathbb{K}$, т.е. $\overline{\mathbb{K}} = \bigcup_{\ell=1}^{\infty} \mathbb{F}_{q^\ell}$, и пусть $\mathcal{C}_{\overline{\mathbb{K}}}$ обозначает соответствующее (бесконечное) множество $\overline{\mathbb{K}}$ -рациональных точек кривой. Действие группы Галуа $G(\overline{\mathbb{K}}/\mathbb{K})$ (автоморфизмов из $\overline{\mathbb{K}}$, тождественных на $\mathbb{K}$; см. [7]) естественно продолжается до действия на $\mathcal{C}_{\overline{\mathbb{K}}}$.

Выберем три точки $a_i \in \mathcal{C}_{\mathbb{K}}$, $i = 1, 2, 3$; N точек $c_\alpha \in \mathcal{C}_{\overline{\mathbb{K}}}$, $\alpha = 1, \dots, N$, удовлетворяющих условию $\mathbb{K}$ -рациональности $\sigma(c_\alpha) = c_{\alpha'}$ для всех $\sigma \in G(\overline{\mathbb{K}}/\mathbb{K})$; N пар точек $d_\beta, e_\beta \in \mathcal{C}_{\overline{\mathbb{K}}}$, $\beta = 1, \dots, N$, удовлетворяющих условию $\mathbb{K}$ -рациональности $\sigma(\{d_\beta, e_\beta\}) = \{d_{\beta'}, e_{\beta'}\}$ для всех $\sigma \in G(\overline{\mathbb{K}}/\mathbb{K})$; g точек $f_\gamma \in \mathcal{C}_{\overline{\mathbb{K}}}$, $\gamma = 1, \dots, g$, удовлетворяющих условию $\mathbb{K}$ -рациональности $\sigma(f_\gamma) = f_{\gamma'}$ для всех $\sigma \in G(\overline{\mathbb{K}}/\mathbb{K})$, и точку нормировки $a_0 \in \mathcal{C}_{\mathbb{K}}$.

Как правило, мы рассматриваем здесь только случай общего положения и предполагаем, что все используемые при построении точки являются точками общего положения и различны. В частности, дивизор $D = \sum_{\gamma=1}^g f_\gamma$ неспециальный. Заметим, что достаточно проверить условия $\mathbb{K}$ -рациональности в любом расширении поля $\mathbb{L} \supset \mathbb{K}$ рациональности всех используемых в построении точек.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Зафиксируем $\mathbb{K}$ -рациональные локальные параметры t_i в точках a_i , $i = 0, 1, 2, 3$. Определим для любых целых $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}$ волновую функцию $\psi(n_1, n_2, n_3)$ как рациональную функцию со следующими свойствами:

- 1) в точке a_0 функция ψ имеет полюс порядка не более $n_1 + n_2 + n_3$;
- 2) первый нетривиальный коэффициент ее разложения по t_0 в точке a_0 нормирован на единицу;
- 3) в точках a_i , $i = 1, 2, 3$ она имеет нули порядка не менее n_i ;
- 4) в точках c_α , $\alpha = 1, \dots, N$, она имеет не более чем простые полюсы;

- 5) в точках f_γ , $\gamma = 1, \dots, g$ она имеет не более чем простые полюсы;
 6) функция ψ удовлетворяет N условиям

$$\psi(n_1, n_2, n_3)(d_\beta) = \psi(n_1, n_2, n_3)(e_\beta), \quad \beta = 1, \dots, N.$$

Функция $\psi(n_1, n_2, n_3)$ является $\mathbb{K}$ -рациональной; это следует из условий $\mathbb{K}$ -рациональности множества определяющих ее точек. Как обычно, нуль или полюс отрицательного порядка означают соответственно полюс или нуль соответствующего положительного порядка. Соответственно относящиеся к порядкам полюсов и нулей слова “не более” и “не менее” следует поменять местами. Используя стандартным образом теорему Римана–Роха (и предположение об общности положения), заключаем, что волновая функция $\psi(n_1, n_2, n_3)$ существует и единственна.

В случае общего положения, который предполагается в дальнейшем, если порядок полюса функции ψ в точке a_0 равен $(n_1 + n_2 + n_3)$, то $\mathbb{K}$ -рациональные коэффициенты разложений функции ψ в точках a_0 и a_i , $i = 1, 2, 3$, будем обозначать соответственно через $\zeta_k^{(0)}(n_1, n_2, n_3)$ и $\zeta_k^{(i)}(n_1, n_2, n_3)$, т.е.,

$$\psi = \frac{1}{t_0^{n_1+n_2+n_3}} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k^{(0)} t_0^k \right), \quad \psi = t_i^{n_i} \sum_{k=0}^{\infty} \zeta_k^{(i)} t_i^k.$$

Пусть T_i обозначает оператор трансляций по переменной n_i , $i = 1, 2, 3$, например,

$$T_1 \psi(n_1, n_2, n_3) = \psi(n_1 + 1, n_2, n_3).$$

Из единственности волновой функции следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Функция ψ удовлетворяет уравнениям*

$$T_i \psi - T_j \psi + \frac{T_j \zeta_0^{(i)}}{\zeta_0^{(j)}} \psi = 0, \quad i \neq j. \quad (1)$$

Заметим, что согласно (1)

$$\frac{T_j \zeta_0^{(i)}}{\zeta_0^{(i)}} = -\frac{T_i \zeta_0^{(j)}}{\zeta_0^{(j)}}, \quad i \neq j. \quad (2)$$

Определим $\rho_i = (-1)^{\sum_{j < i} n_j} \zeta_0^{(i)}$. Тогда из (2) вытекает существование $\mathbb{K}$ -значного потенциала (τ -функции), определяемого (с точностью до постоянного множителя) формулами

$$\frac{T_i \tau}{\tau} = \rho_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3)$$

Наконец, уравнения (1) приводят к условию

$$\frac{T_2 \rho_1}{\rho_1} - \frac{T_3 \rho_1}{\rho_1} + \frac{T_3 \rho_2}{\rho_2} = 0,$$

которое, будучи записано через τ -функцию, дает дискретное уравнение КП [1]:

$$(T_1 \tau)(T_2 T_3 \tau) - (T_2 \tau)(T_3 T_1 \tau) + (T_3 \tau)(T_1 T_2 \tau) = 0. \quad (4)$$

СЛЕДСТВИЕ 1. *Умножение ρ_i , $i = 1, 2, 3$, на функцию только одного аргумента n_i не влияет ни на существование τ -функции, ни на уравнение (4), которому эта функция удовлетворяет.*

3. РЕДУКЦИЯ К ДИСКРЕТНОМУ УРАВНЕНИЮ КДФ

Дискретное уравнение КДФ [2], [5]

$$(T_1\tau)\tau - (T_3^{-1}\tau)(T_3T_1\tau) + (T_3\tau)(T_1T_3^{-1}\tau) = 0 \quad (5)$$

получается из дискретного уравнения КП наложением условия

$$T_2T_3\tau = \gamma\tau, \quad (6)$$

где γ – постоянная, отличная от нуля. Переводя редукцию (6) на язык волновой функции ψ , получаем алгебро-геометрическую процедуру построения решений дискретного уравнения КДФ.

ЛЕММА. Пусть на алгебраической кривой C существует мероморфная функция h со следующими свойствами:

- 1) ее единственными нулями являются два простых нуля в точках a_2 и a_3 ;
- 2) в точке a_0 она имеет двойной полюс;
- 3) она удовлетворяет N условиям $h(d_\beta) = h(e_\beta)$, $\beta = 1, \dots, N$;
- 4) первый нетривиальный коэффициент разложения функции h по параметру t_0 в точке a_0 нормирован на единицу.

Тогда волновая функция ψ удовлетворяет условию

$$T_2T_3\psi = h\psi. \quad (7)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Существование такой функции h означает, что алгебраическая кривая C является гиперболической.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть h – функция из леммы и

$$h(a_1) = 1. \quad (8)$$

Пусть δ_2 и δ_3 обозначают первые коэффициенты локальных разложений функции h соответственно по параметрам t_2 и t_3 в точках a_2 и a_3 :

$$h = t_2(\delta_2 + \dots), \quad h = t_3(\delta_3 + \dots).$$

Тогда функция

$$\tilde{\tau} = \tau \delta_2^{-n_2(n_2-1)/2} (-\delta_3)^{-n_3(n_3-1)/2} \quad (9)$$

удовлетворяет дискретному уравнению КДФ (5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разлагая уравнение (7) в точке a_1 и используя дополнительное предположение (8), получаем

$$T_2 T_3 \rho_1 = \rho_1.$$

Разложение уравнения (7) в точках a_2 и a_3 дает

$$T_2 T_3 \rho_2 = \delta_2 \rho_2, \quad T_2 T_3 \rho_3 = -\delta_3 \rho_3.$$

Следовательно, функции

$$\tilde{\rho}_1 = \rho_1, \quad \tilde{\rho}_2 = \delta_2^{-n_2} \rho_2, \quad \tilde{\rho}_3 = (-\delta_3)^{-n_3} \rho_3$$

удовлетворяют условию

$$T_2 T_3 \tilde{\rho}_i = \tilde{\rho}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (10)$$

Согласно следствию 1 функции $\tilde{\rho}_i, i = 1, 2, 3$, определяют новый потенциал $\tilde{\tau}$, связанный с τ равенством (9) и удовлетворяющий дискретному уравнению КП (4). Более того, условия (10) означают, что $\tilde{\tau}$ подчиняется условию (6).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. С помощью вышеописанной процедуры мы получаем однопараметрическое (с параметром n_2) семейство решений дискретного уравнения КдФ.

4. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ ДИСКРЕТНЫХ УРАВНЕНИЙ КП И КДФ ПО ВАКУУМНЫМ ФУНКЦИЯМ

В этом разделе мы приведем результаты, позволяющие построить N -солитонную τ -функцию исходя из вакуумной ($N = 0$) волновой функции на алгебраической кривой над конечным полем. Методы получения этих результатов совпадают с методами, использованными в соответствующем разделе работы [3].

В случае $N = 0$ добавим верхний индекс “0” ко всем определенным выше функциям. Определим вспомогательные вакуумные волновые функции $\phi_\alpha^0, \alpha = 1, \dots, N$, следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть локальные параметры t_α в точках $c_\alpha, \alpha = 1, \dots, N$, фиксированы. Для любого α определим функцию ϕ_α^0 следующими условиями:

- 1) в точке a_0 она имеет полюс порядка не более $n_1 + n_2 + n_3 - 1$;
- 2) в точках $a_i, i = 1, 2, 3$, она имеет нули порядка не менее n_i ;
- 3) в точке c_α она имеет не более чем простой полюс;
- 4) первый нетривиальный коэффициент разложения функции ϕ_α^0 по t_α в точке c_α нормирован на единицу;
- 5) в точках $f_\gamma, \gamma = 1, \dots, g$, она имеет не более чем простые полюсы.

Используя теорему Римана–Роха, можно показать, что функция ϕ_α^0 существует и единственна.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $\psi^0(\mathbf{d}, \mathbf{e})$ обозначает столбец из N элементов вида

$$[\psi^0(\mathbf{d}, \mathbf{e})]_\beta = \psi^0(d_\beta) - \psi^0(e_\beta), \quad \beta = 1, \dots, N,$$

а $\phi_{\mathbf{A}}^0$ – строку из N элементов

$$[\phi_{\mathbf{A}}^0]_\alpha = \phi_\alpha^0, \quad \alpha = 1, \dots, N,$$

и пусть $\phi_{\mathbf{A}}^0(\mathbf{d}, \mathbf{e})$ обозначает $(N \times N)$ -матрицу, элемент которой на пересечении строки α и столбца β имеет вид

$$[\phi_{\mathbf{A}}^0(\mathbf{d}, \mathbf{e})]_{\alpha\beta} = \phi_\alpha^0(d_\beta) - \phi_\alpha^0(e_\beta), \quad \alpha, \beta = 1, \dots, N.$$

Тогда волновая функция ψ дискретного уравнения КП имеет вид

$$\psi = \psi^0 - \phi_{\mathbf{A}}^0 [\phi_{\mathbf{A}}^0(\mathbf{d}, \mathbf{e})]^{-1} \psi^0(\mathbf{d}, \mathbf{e}).$$

Обозначим в случае общего положения через $H_{0,\alpha}^0$ первый нетривиальный коэффициент разложения функции ϕ_α^0 по униформизирующему параметру t_0 в точке a_0 :

$$\phi_\alpha^0 = \frac{1}{t_0^{n_1+n_2+n_3-1}} (H_{0,\alpha}^0 + \dots).$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Соответствующие выражения для ρ_i имеют вид

$$\rho_i = \rho_i^0 (1 + (T_i H_{0,\mathbf{A}}^0) [\phi_{\mathbf{A}}^0(\mathbf{d}, \mathbf{e})]^{-1} \psi^0(\mathbf{d}, \mathbf{e})), \quad i = 1, 2, 3,$$

где $H_{0,\mathbf{A}}^0$ – строка из N элементов $H_{0,\alpha}^0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. τ -функцию можно построить по формуле

$$\tau = \tau^0 \det \phi_{\mathbf{A}}^0(\mathbf{d}, \mathbf{e}). \quad (11)$$

СЛЕДСТВИЕ 3. Исходя из $\mathbb{K}$ -значной функции τ^0 и локальных параметров t_α в точках s_α , выбранных согласованно с действием группы Галуа $G(\overline{\mathbb{K}}/\mathbb{K})$ на $C_{\overline{\mathbb{K}}}$, получаем $\mathbb{K}$ -значную функцию τ .

СЛЕДСТВИЕ 4. Из уравнения (9) следует, что та же формула (11) справедлива и для функции $\tilde{\tau}$ при редукции дискретного уравнения КП к дискретному уравнению КдФ.

Приведем теперь явные формулы для вакуумных функций в простейшем случае $g = 0$. При построении вакуумных функций воспользуемся стандартным параметром t на проективной прямой $\mathbb{P}(\mathbb{K})$ и положим $a_0 = \infty$. Явное выражение для вакуумной волновой функции имеет вид

$$\psi^0 = (t - a_1)^{n_1} (t - a_2)^{n_2} (t - a_3)^{n_3},$$

что дает следующие формулы для функций ρ_1 , ρ_2 и ρ_3 :

$$\begin{aligned}\rho_1^0 &= (a_1 - a_2)^{n_2} (a_1 - a_3)^{n_3}, \\ \rho_2^0 &= (-1)^{n_1} (a_2 - a_1)^{n_1} (a_2 - a_3)^{n_3}, \\ \rho_3^0 &= (-1)^{n_1+n_2} (a_3 - a_1)^{n_1} (a_3 - a_2)^{n_2}.\end{aligned}$$

Явное выражение для вакуумной τ -функции имеет вид

$$\tau^0 = (a_1 - a_2)^{n_1 n_2} (a_1 - a_3)^{n_1 n_3} (a_2 - a_3)^{n_2 n_3}.$$

Вспомогательные вакуумные волновые функции ϕ_α^0 , $\alpha = 1, \dots, N$, можно записать как

$$\phi_\alpha^0 = \frac{1}{t - c_\alpha} \cdot \frac{(t - a_1)^{n_1} (t - a_2)^{n_2} (t - a_3)^{n_3}}{(c_\alpha - a_1)^{n_1} (c_\alpha - a_2)^{n_2} (c_\alpha - a_3)^{n_3}}. \quad (12)$$

При редукции уравнения КП к уравнению КдФ функция h имеет вид $h(t) = (t - a_2) \times (t - a_3)$, а точки a_i , $i = 1, 2, 3$, подчиняются условию $h(a_1) = (a_1 - a_2)(a_1 - a_3) = 1$. Тогда в обозначениях, использованных в предыдущем разделе, $\delta_2 = a_2 - a_3 = -\delta_3$, и согласно предложению 2 вакуумное решение дискретного уравнения КдФ имеет вид

$$\tilde{\tau}^0 = (a_1 - a_3)^{n_1(n_3-n_2)} (a_2 - a_3)^{n_2-(n_3-n_2)(n_3-n_2-1)/2}. \quad (13)$$

Наконец, согласно следствию 4 формулы (11)–(13) позволяют найти чистые N -солитонные решения дискретного уравнения КдФ над конечными полями.

Приведем пример решения дискретного уравнения КдФ, принимающего значения в конечном поле, в билинейной форме. Возьмем $\mathbb{K} = \mathbb{F}_5$, а все используемые при построении точки возьмем в $\mathbb{F}_{5^2}$, которое рассматривается как расширение $\mathbb{F}_5$ с помощью полинома $w(x) = x^2 + x + 1$. Соответствующая группа Галуа есть $G(\mathbb{F}_{5^2}/\mathbb{F}_5) = \{\text{id}, \sigma\}$, где σ – автоморфизм Фробениуса [7]. Параметры решения выбраны следующим образом:

$$\begin{aligned}a_1 &= (00), & a_2 &= (02), & a_3 &= (03), \\ c_1 &= (10), & c_2 &= \sigma(c_1) = (44), \\ d_1 &= (21), & e_1 &= \sigma(d_1) = (34), \\ d_2 &= (13), & e_2 &= \sigma(d_2) = (42).\end{aligned}$$

Вакуумное (а) и двухсолитонное (б) решения дискретного уравнения КдФ в $\mathbb{F}_5$: n_1 изменяется от 0 до 26 слева направо, n_3 – от 0 до 26 снизу вверх. Элементы $\mathbb{F}_5$ обозначены как $\square$ – (04), $\square$ – (03), $\square$ – (02), $\square$ – (01), и $\blacksquare$ – (00).

Функция $\tilde{t}$ нормирована на единицу при $n_1 = n_2 = n_3 = 0$. Это решение дискретного уравнения КдФ при $n_2 = 0$ изображено на рисунке, где для сравнения приведено также вакуумное решение.

Периодами по переменным n_1 и n_3 являются соответственно 4 и 24 (оба должны быть делителями $24 = |\mathbb{F}_{5^2}^*|$; см. [3]).

Отметим, наконец, что примеры многосолитонных решений на кривых ненулевого рода являются более сложными, и их построение требует привлечения некоторых методов теории якобианов алгебраических кривых [8].

Благодарности. Авторы выражают благодарность П. Климчевски за предоставление компьютерной программы графического изображения решений. М. Бялецки благодарит организаторов конференции NEEDS 2002 за поддержку. Работа была частично поддержана KBN (грант № 2P03B12622).

Список литературы

- [1] *R. Hirota.* J. Phys. Soc. Japan. 1981. V. 50. P. 3785–3791.
- [2] *R. Hirota.* J. Phys. Soc. Japan. 1977. V. 43. P. 1424–1433.
- [3] *A. Doliwa, M. Bialecki, P. Klimczewski.* J. Phys. A. 2003. V. 26. P. 4827–4839.
- [4] *И. М. Кривчер.* УМН. 1978. Т. 33. С. 215–216.
- [5] *I. M. Krichever, P. Wiegmann, A. Zabrodin.* Commun. Math. Phys. 1998. V. 193. P. 373–396.
- [6] *H. Stichtenoth.* Algebraic Function Fields and Codes. Berlin: Springer, 1993.
- [7] *С. Ленг.* Алгебра. М.: Мир, 1968.
- [8] *M. Bialecki, A. Doliwa.* Algebro-geometric solution of the discrete KP equation over a finite field out of a hyperbolic curve. nlin.SI/0309071.