Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. С. Брузон, М. Л. Гандариас, С. Мурбель, Х. Рамирес, С. Саез, Ф. Р. Роме-ро, Уравнение Калоджеро–Богоявленского–Шиффа в размерности $2 + 1$, *ТМФ*, 2003, том 137, номер 1, 14–26

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf241>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 04:11:23

© 2003 г. М. С. Брузон*, М. Л. Гандариас*, С. Мурьель*,
Х. Рамирес*, С. Саез*, Ф. Р. Ромеро†

УРАВНЕНИЕ КАЛОДЖЕРО–БОГОЯВЛЕНСКОГО–ШИФФА В РАЗМЕРНОСТИ $2 + 1$

Классические и неклассические методы используются для получения редукций симметрии и точных решений $(2 + 1)$ -мерного интегрируемого уравнения Калоджеро–Богоявленского–Шиффа. Хотя это $(2 + 1)$ -мерное уравнение возникает в нелокальной форме, оно может быть записано как система дифференциальных уравнений и, в потенциальной форме, как дифференциальное уравнение в частных производных четвертого порядка. Классические и неклассические методы позволяют получить некоторые точные решения этого $(2 + 1)$ -мерного уравнения, включающие несколько произвольных функций и потому демонстрирующие весьма разнообразное качественное поведение.

Ключевые слова: уравнения в частных производных, симметрии.

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование многомерных интегрируемых систем является одним из главных направлений в теории интегрируемых систем. В последнее время в контексте $(2 + 1)$ -мерных уравнений были развиты несколько интегрируемых моделей.

В настоящей работе рассматривается $(2 + 1)$ -мерное интегрируемое уравнение Калоджеро–Богоявленского–Шиффа (КБШ)

$$u_t + uu_z + \frac{1}{2}u_x \partial_x^{-1} u_z + \frac{1}{4}u_{xxz} = 0, \quad (1)$$

где $\partial_x^{-1} f = \int f dx$.

Данное уравнение было построено в работах Богоявленского и Шиффа по-разному. Именно, Богоявленский использовал модифицированный формализм Лакса [1]–[3], тогда как Шифф получил то же уравнение путем редукции автодуального уравнения Янга–Миллса [4]. В работах [4] и [5] было показано, что уравнению (1) можно придать

*Departamento de Matemáticas, Universidad de Cádiz, P.O. Box 40, 11510 Puerto Real, Cádiz, Spain. E-mail: santos.bruson@uca.es; marialuz.gandarias@uca.es; pepe.ramirez@uca.es

†Departamento de Física Teórica, Universidad de Sevilla, Avda. Reina Mercedes s/n, 41012, Seville, Spain. E-mail: romero@cica.es

трилинейную форму. В работе [1] было показано, что рассматриваемое $(2 + 1)$ -мерное уравнение, записанное в потенциальной форме

$$u_{tx} - 4u_x u_{xz} - 2u_{xx} u_z + u_{xxxz} = 0, \quad (2)$$

допускает представление Лакса и может быть проинтегрировано методом одномерной обратной задачи рассеяния. В работе [2] Богоявленский доказал, что уравнение, эквивалентное (2), обладает решением в виде опрокидывающегося солитона. В работе [3] были построены несколько периодических и опрокидывающихся решений для уравнения (2), а также для модифицированного уравнения, связанного с (2) преобразованием Миуры $v^2 \pm v_x = u_x$.

Тода и Ю построили [6] некоторые новые $(2 + 1)$ -мерные интегрируемые модели, используя метод Калоджеро. В рамках этого метода $(2+1)$ -мерные уравнения получаются при рассмотрении L – T -пары Лакса и таком изменении оператора T , чтобы он включал еще одну пространственную переменную z . Таким образом они вывели $(2 + 1)$ -мерное уравнение КБШ из уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ).

Хотя $(2 + 1)$ -мерное уравнение КБШ возникает в нелокальной форме, оно может быть записано как система дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} v_x - u_z &= 0, \\ 2u_x v + u_{xxz} + 4u_t + 4uu_z &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

а также в потенциальной форме:

$$4h_{tx} + 4h_x h_{xz} + 2h_{xx} h_z + h_{xxxz} = 0. \quad (4)$$

В настоящей работе мы применяем к системе (3), а также к соответствующему потенциальному уравнению (4) классический метод групп Ли инфинитезимальных преобразований. Отметим, что классические симметрии Ли и редукция подобия для системы (3) были получены в работе [7]. Тем не менее с помощью построения инвариантных решений с помощью метода оптимальной системы мы обнаружили некоторые редукции подобия, не представленные явно в [7]. Мы также получили некоторые новые редуцированные системы дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП) размерности $1 + 1$ и обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ).

Используя эти новые редуцированные ОДУ, мы получаем точные решения уравнения КБШ (1). Наиболее интересные решения – это солитонные решения, которые локализованы на некоторой кривой и экспоненциально затухают по мере удаления от этой кривой. Некоторые из этих решений были получены Богоявленским [3]. Насколько известно авторам, такие солитонные решения никогда ранее не получались при помощи методов, основанных на использовании симметрий.

2. СИММЕТРИИ ЛИ

Этот раздел посвящен анализу симметрий Ли для $(2 + 1)$ -мерной системы (3). Рассмотрим однопараметрическую группу Ли инфинитезимальных преобразований в пространстве (x, z, t, u, v) , которая задается формулами

$$\begin{aligned} x^* &= x + \varepsilon X(x, z, t, u, v) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ z^* &= z + \varepsilon Z(x, z, t, u, v) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ t^* &= t + \varepsilon T(x, z, t, u, v) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ u^* &= u + \varepsilon U(x, z, t, u, v) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ v^* &= v + \varepsilon V(x, z, t, u, v) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (5)$$

где ε — параметр группы. Потребуем, чтобы множество решений системы (3) было инвариантно относительно этих преобразований. Это требование приводит к переопределенной системе линейных уравнений для инфинитезимальных элементов $X(x, z, t, u, v)$, $Z(x, z, t, u, v)$, $T(x, z, t, u, v)$, $U(x, z, t, u, v)$ и $V(x, z, t, u, v)$. Соответствующая алгебра Ли инфинитезимальных симметрий есть набор векторных полей вида

$$\mathbf{v} = X \frac{\partial}{\partial x} + Z \frac{\partial}{\partial z} + T \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial u} + V \frac{\partial}{\partial v}. \quad (6)$$

После того как инфинитезимальные элементы определены, переменные симметрии находятся путем разрешения условий инвариантности поверхности

$$\Phi_1 \equiv X \frac{\partial u}{\partial x} + Z \frac{\partial u}{\partial z} + T \frac{\partial u}{\partial t} - U = 0, \quad \Phi_2 \equiv X \frac{\partial v}{\partial x} + Z \frac{\partial u}{\partial z} + T \frac{\partial v}{\partial t} - V = 0. \quad (7)$$

Применение классического метода к системе (3) дает систему уравнений, которая приводит к шестипараметрической группе Ли. Связанная с этой группой алгебра Ли представима с помощью генераторов

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \frac{\partial}{\partial t}, & \mathbf{v}_2 &= \frac{\partial}{\partial z}, & \mathbf{v}_3 &= t \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial u}, \\ \mathbf{v}_4 &= t \frac{\partial}{\partial t} + z \frac{\partial}{\partial z} - v \frac{\partial}{\partial v}, \\ \mathbf{v}_5 &= tx \frac{\partial}{\partial x} + 2t^2 \frac{\partial}{\partial t} + 2tz \frac{\partial}{\partial z} + (2z - 2tu) \frac{\partial}{\partial u} + (2x - 3tv) \frac{\partial}{\partial v}, \\ \mathbf{v}_6 &= x \frac{\partial}{\partial x} - 2z \frac{\partial}{\partial z} - 2u \frac{\partial}{\partial u} + v \frac{\partial}{\partial v} \end{aligned}$$

и бесконечномерного генератора

$$\mathbf{v}_\alpha = \alpha(t) \frac{\partial}{\partial x} + 2\alpha'(t) \frac{\partial}{\partial v}.$$

3. ОПТИМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ И РЕДУКЦИИ

Для построения одномерной оптимальной системы по Оливеру построим таблицу коммутаторов (табл. 1) и таблицу присоединенных действий (табл. 2), в которой показаны присоединенные действия каждого из элементов $\mathbf{v}_i$, $i = 1, \dots, 6$, на все остальные элементы по отдельности. Эту таблицу нетрудно получить суммированием ряда Ли.

Коммутаторы алгебры Ли ТАБЛИЦА 1

	$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_3$	$\mathbf{v}_4$	$\mathbf{v}_5$	$\mathbf{v}_6$
$\mathbf{v}_1$	0	0	$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_6 + 4\mathbf{v}_4$	0
$\mathbf{v}_2$	0	0	0	$\mathbf{v}_2$	$2\mathbf{v}_3$	$-2\mathbf{v}_2$
$\mathbf{v}_3$	$-\mathbf{v}_2$	0	0	0	0	$-2\mathbf{v}_3$
$\mathbf{v}_4$	$-\mathbf{v}_1$	$-\mathbf{v}_2$	0	0	$\mathbf{v}_5$	0
$\mathbf{v}_5$	$-(\mathbf{v}_6 + 4\mathbf{v}_4)$	$-2\mathbf{v}_3$	0	$-\mathbf{v}_5$	0	0
$\mathbf{v}_6$	0	$2\mathbf{v}_2$	$2\mathbf{v}_3$	0	0	0

Присоединенные действия ТАБЛИЦА 2

	$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_3$	$\mathbf{v}_4$	$\mathbf{v}_5$	$\mathbf{v}_6$
$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_3 - \epsilon \mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_4 - \epsilon \mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_5 - \epsilon(\mathbf{v}_6 + 4\mathbf{v}_4)$	$\mathbf{v}_6$
$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_3$	$\mathbf{v}_4 - \epsilon \mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_5 - 2\epsilon \mathbf{v}_3$	$\mathbf{v}_6 + 2\epsilon \mathbf{v}_2$
$\mathbf{v}_3$	$\mathbf{v}_1 + \epsilon \mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_3$	$\mathbf{v}_4$	$\mathbf{v}_5$	$\mathbf{v}_6 + 2\epsilon \mathbf{v}_3$
$\mathbf{v}_4$	$e^\epsilon \mathbf{v}_1$	$e^\epsilon \mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_3$	$\mathbf{v}_4$	$e^{-\epsilon} \mathbf{v}_5$	$\mathbf{v}_6$
$\mathbf{v}_5$	$\mathbf{v}_1 + \epsilon(\mathbf{v}_6 + 4\mathbf{v}_4)$	$\mathbf{v}_2 + 2\epsilon \mathbf{v}_3$	$\mathbf{v}_3$	$\mathbf{v}_4 + \epsilon \mathbf{v}_5$	$\mathbf{v}_5$	$\mathbf{v}_6$
$\mathbf{v}_6$	$\mathbf{v}_1$	$e^{-2\epsilon} \mathbf{v}_2$	$e^{-2\epsilon} \mathbf{v}_3$	$\mathbf{v}_4$	$\mathbf{v}_5$	$\mathbf{v}_6$

Соответствующие генераторы оптимальной системы подалгебр имеют вид

$$\begin{aligned} \langle a\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_6 \rangle, \quad \langle \mathbf{v}_6 \rangle, \quad \langle \mathbf{v}_4 + b\mathbf{v}_6 \rangle, \\ \langle a\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 \rangle, \quad \langle \mathbf{v}_3 \rangle, \quad \langle \mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 \rangle, \end{aligned}$$

где $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, и $b \in \mathbb{R}$ произвольны.

Далее выпишем соответствующие переменные подобия и решения подобия, а также системы ДУЧП, получаемые при редукции системы (3) посредством генераторов оптимальной системы и добавленного к ним бесконечномерного генератора $\mathbf{v}_\alpha$.

РЕДУКЦИЯ 1. Используя генератор $a\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_6 + \mathbf{v}_\alpha$, мы получаем переменные подобия и решения подобия

$$\begin{aligned} w_1 &= e^{-t/a} x - \frac{1}{a} \int f(t) e^{-t/a} dt, & w_2 &= e^{2t/a} z, \\ u &= e^{-2t/a} h_1(w_1, w_2), & v &= e^{t/a} \left(h_2(w_1, w_2) + \frac{2}{a} \int f'(t) e^{-t/a} dt \right) \end{aligned}$$

и систему ДУЧП $\mathbf{S}_1$

$$\begin{aligned} h_{2w_1} - h_{1w_2} &= 0, \\ 8w_2 h_{1w_2} - 4w_1 h_{1w_1} + 2ah_2 h_{1w_1} + 4ah_1 h_{1w_2} + ah_{1w_1 w_1 w_2} - 8h_1 &= 0. \end{aligned}$$

РЕДУКЦИЯ 2. Используя генератор $\mathbf{v}_6 + \mathbf{v}_\alpha$, мы получаем переменные подобия и решения подобия

$$\begin{aligned} w_1 &= t, & w_2 &= z(x + \alpha(t))^2, \\ u &= zh_1(w_1, w_2), & v &= z^{-1/2} h_2(w_1, w_2) - 2\alpha'(t) \end{aligned}$$

и систему ДУЧП $\mathbf{S}_2$

$$\begin{aligned} w_2 h_{1w_2} - 2\sqrt{w_2} h_{2w_2} + h_1 &= 0, \\ 2h_{1w_2 w_2 w_2} w_2^3 + 7h_{1w_2 w_2} w_2^2 + 2h_1 h_{1w_2} w_2^2 + \\ &+ 2h_{1w_2} h_2 w_2^{3/2} + 2h_{1w_2} w_2 + 2h_{1w_1} w_2 + 2h_1^2 w_2 = 0 \end{aligned}$$

с $x + \alpha(t) > 0$.

РЕДУКЦИЯ 3. Используя генератор $\mathbf{v}_4 + b\mathbf{v}_6 + \mathbf{v}_\alpha$, мы получаем переменные подобия и решения подобия

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{x}{t^b} - \int \frac{f(t)}{t^{b+1}} dt, & w_2 &= t^{2b-1} z, \\ u &= \frac{1}{t^{2b}} h_1(w_1, w_2), & v &= \left(h_2(w_1, w_2) + 2 \int \frac{\alpha'(t)}{t^b} dt \right) t^{b-1} \end{aligned}$$

и систему ДУЧП $\mathbf{S}_3$

$$\begin{aligned} h_{2w_1} - h_{1w_2} &= 0, \\ 8bw_2 h_{1w_2} - 4w_2 h_{1w_2} - 4bw_1 h_{1w_1} + 2h_2 h_{1w_1} + 4h_1 h_{1w_2} + h_{1w_1 w_1 w_2} - 8bh_1 &= 0. \end{aligned}$$

РЕДУКЦИЯ 4. Используя генератор $\alpha \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_\alpha$, мы получаем переменные подобия и решения подобия

$$\begin{aligned} w_1 &= x - \frac{1}{a} \int \alpha(t) dt, & w_2 &= z - \frac{t^2}{2b}, \\ u &= \frac{t}{a} + h_1(w_1, w_2), & v &= \frac{2f(t)}{b} + h_2(w_1, w_2) \end{aligned}$$

и систему ДУЧП $\mathbf{S}_4$

$$\begin{aligned} h_{2w_1} - h_{1w_2} &= 0, \\ 2ah_2h_{1w_1} + 4ah_1h_{1w_2} + ah_{1w_1w_1w_2} + 4 &= 0. \end{aligned}$$

РЕДУКЦИЯ 5. Используя генератор $\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_\alpha$, мы получаем переменные подобия и решения подобия

$$\begin{aligned} w_1 &= t, & w_2 &= z - \frac{xt}{\alpha(t)}, \\ u &= \frac{z}{t} + h_1(w_1, w_2), & v &= \frac{2\alpha'(t)x}{\alpha(t)} + h_2(w_1, w_2) \end{aligned}$$

и систему ДУЧП $\mathbf{S}_5$

$$\begin{aligned} -w_1^2 h_{2w_2} - \alpha h_{1w_2} w_1 + 2\alpha_{w_1} w_1 - \alpha &= 0, \\ 4\alpha^2 h_{1w_2} w_2 + h_{1w_2} w_2^3 - 2\alpha h_{1w_2} h_{2w_1}^2 + 4\alpha^2 h_1 h_{1w_2} w_1 + 4\alpha^2 h_1 &= 0. \end{aligned}$$

РЕДУКЦИЯ 6. Используя генератор $\mathbf{v}_\alpha$, мы получаем переменные подобия и решения подобия

$$w_1 = t, \quad w_2 = z, \quad u = h_1(w_1, w_2), \quad v = 2x \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} + h_2(w_1, w_2)$$

и систему (1+1)-мерных ДУЧП $\mathbf{S}_6$

$$\begin{aligned} 2 \frac{\alpha_{w_1}}{\alpha} - h_{1w_2} &= 0, \\ 4h_1 h_{1w_2} + h_{1w_1} &= 0. \end{aligned}$$

РЕДУКЦИЯ 7. Используя генератор $\mathbf{v}_1 + \alpha \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_\alpha$, мы получаем переменные подобия и решения подобия

$$w_1 = x - \int \alpha(t) dt, \quad w_2 = z - at, \quad u = h_1(w_1, w_2), \quad v = 2\alpha(t) + h_2(w_1, w_2)$$

и систему ДУЧП $\mathbf{S}_7$

$$\begin{aligned} h_{2w_1} - h_{1w_2} &= 0, \\ 2h_2 h_{1w_1} + 4h_1 h_{1w_2} + h_{1w_1w_1w_2} - 4ah_{1w_2} &= 0. \end{aligned}$$

Хотя классические симметрии для системы (3) были получены в [7], некоторые из представленных выше редукций не фигурировали явно в этой работе. К числу таковых относятся системы $\mathbf{S}_2$, $\mathbf{S}_5$ и $\mathbf{S}_6$.

4. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СИММЕТРИИ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

В некоторых случаях редуцированные системы $(1+1)$ -мерных ДУЧП обладают дополнительными симметриями, что делает возможной их дальнейшую редукцию к системам ОДУ. Мы снова используем технику теории групп Ли. Ниже мы рассмотрим симметрии для систем $\mathbf{S}_2$ и $\mathbf{S}_7$.

Система $\mathbf{S}_2$ допускает симметрии

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{21} &= \frac{\partial}{\partial w_1}, \\ \mathbf{v}_{22} &= z_1^2 \frac{\partial}{\partial z_1} + 2z_1 z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} + (1 - 2z_1 h_1) \frac{\partial}{\partial h_1} + (z_2^{1/2} - z_1 h_2) \frac{\partial}{\partial h_2}, \\ \mathbf{v}_{23} &= 2z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + 2z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} - 2h_1 \frac{\partial}{\partial h_1} - h_2 \frac{\partial}{\partial h_2}. \end{aligned}$$

Используя генератор $\mathbf{v}_{23}$, мы получаем переменную подобия и решения подобия

$$w = \frac{z_1}{z_2}, \quad h_1 = \frac{1}{z_1} g(w), \quad h_2 = \frac{1}{z_1^2} k(w)$$

и систему ОДУ

$$\begin{aligned} wg' - g - 2w^{3/2}k' &= 0, \\ 2w^4g''' - 5w^3g'' - 2w^{3/2}g'k - (2g - 2)wg' + 2g^2 - 2g &= 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим систему $\mathbf{S}_7$, которая допускает симметрии

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{71} &= \frac{\partial}{\partial w_1}, \\ \mathbf{v}_{72} &= z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} - 2(h_1 - a) \frac{\partial}{\partial h_1} - h_2 \frac{\partial}{\partial h_2}, \\ \mathbf{v}_\beta &= \beta(w_2) \frac{\partial}{\partial z_2} - \beta'(z_2) h_2 \frac{\partial}{\partial h_2}. \end{aligned}$$

Используя генератор $c\mathbf{v}_{72} + \mathbf{v}_\beta$, мы получаем переменную подобия и решения подобия

$$\begin{aligned} w &= w_1 \exp \left(- \int \frac{c}{\beta(w_2)} dw_2 \right), \\ h_1 &= a + g(w) \exp \left(-2 \int \frac{c}{\beta(w_2)} dw_2 \right), \\ h_2 &= k(w) \frac{1}{\beta(w_2)} \exp \left(- \int \frac{c}{\beta(w_2)} dw_2 \right) \end{aligned}$$

и систему ОДУ

$$\begin{aligned} cg'w + k' + 2gc &= 0, \\ 2kg' - cg'''w - 4cgg'w - 4cg'' - 8cg^2 &= 0. \end{aligned}$$

Полагая $k = 0$, получаем следующее точное решение:

$$g(w) = k_1 e^{-w^2}, \quad k(w) = 0.$$

Соответствующее решение $(2 + 1)$ -мерного уравнения КБШ (1) имеет вид

$$u = k_1 \exp \left(-2\delta(z - at) - \left(x - \int \alpha(t) dt \right)^2 e^{-2\delta(z - at)} \right),$$

где

$$\delta(z_2) = c \int \beta(z_2)^{-1} dz_2, \quad z_2 = z - at.$$

Используя генератор $c\mathbf{v}_{71} + \mathbf{v}_\beta$, мы получаем переменную подобия и решения подобия

$$w = z_1 - c \int \frac{1}{\beta(z_2)} dz_2, \quad h_1 = g(w), \quad h_2 = \frac{1}{\beta(z_2)} k(w)$$

и систему ОДУ

$$\begin{aligned} cg' + k' &= 0, \\ 2kg' - cg''' - 4cgg' + 4acg &= 0. \end{aligned}$$

Эта система может быть преобразована в ОДУ второго порядка

$$k_2 - cg'' - 3cg^2 + 2k_1g + 4acg = 0$$

и

$$k = -cg + k_1.$$

Полагая $k_2 = 0$, получаем следующее точное решение:

$$g = k_3 \operatorname{sch}^2 \left(\sqrt{\frac{k_3}{2}} w \right).$$

Соответствующее решение $(2 + 1)$ -мерного уравнения КБШ (1) имеет вид

$$u = k_3 \operatorname{sch}^2 \left(\sqrt{\frac{k_3}{2}} (x - \varphi(t) - \delta(z - at)) \right), \quad (8)$$

где

$$k_3 = \frac{k_1 + 2ac}{c}, \quad \varphi(t) = \int \alpha(t) dt, \quad \delta(z_2) = c \int \beta(z_2)^{-1} dz_2, \quad z_2 = z - at.$$

Заметим, что наличие двух произвольных функций $\varphi(t)$ и $\delta(z - at)$ в выражении (8) для солитонных решений делает возможным очень разнообразное качественное физическое поведение этих решений. В частности, заданные формулой (8) решения локализованы на кривой $x + \varphi(t) + \delta(z - at) = 0$ и экспоненциально затухают по мере удаления от этой кривой. Решение (8) с $\delta(z - at) = \text{Ai}(z)$ (а), где Ai – функция Эйри, и $\delta(z - at) = \sin z^2$ (б) приведено на рисунке.

Выбрав в формуле (8) в качестве функции $\varphi(t)$ постоянную и положив $a = 0$, мы получаем стационарные решения. Для нахождения когерентных систем нужно положить $\delta(z - at) = 0$ и $\varphi(t) = t$.

5. СИММЕТРИИ ЛИ ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ КБШ

Для изучения свойств инвариантности мы рассмотрим уравнение КБШ, записанное в потенциальной форме

$$4h_{tx} + 4h_x h_{xz} + 2h_{xx} h_z + h_{xxx} z = 0. \quad (9)$$

Рассмотрим однопараметрическую группу Ли инфинитезимальных преобразований в пространстве (x, z, t, u, v) , которая задается формулами

$$\begin{aligned} x^* &= x + \varepsilon X(x, z, t, h) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ z^* &= z + \varepsilon Z(x, z, t, h) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ t^* &= t + \varepsilon T(x, z, t, h) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ h^* &= h + \varepsilon H(x, z, t, h) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (10)$$

где ε – параметр группы. Связанная с этой группой алгебра Ли инфинитезимальных симметрий есть набор векторных полей вида

$$\mathbf{v} = X \frac{\partial}{\partial x} + Z \frac{\partial}{\partial z} + T \frac{\partial}{\partial t} + H \frac{\partial}{\partial h}. \quad (11)$$

После того как инфинитезимальные элементы определены, переменные симметрии находятся путем разрешения условий инвариантности поверхности

$$\Phi \equiv X \frac{\partial h}{\partial x} + Z \frac{\partial h}{\partial z} + T \frac{\partial h}{\partial t} - H = 0. \quad (12)$$

Применение классического метода к уравнению (9) дает систему уравнений, которая приводит к шестипараметрической группе Ли. Связанная с этой группой алгебра Ли представима с помощью генераторов

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \frac{\partial}{\partial t}, & \mathbf{v}_2 &= \frac{\partial}{\partial z}, \\ \mathbf{v}_3 &= x \frac{\partial}{\partial x} + z \frac{\partial}{\partial z} + t \frac{\partial}{\partial t} - u \frac{\partial}{\partial u}, & \mathbf{v}_4 &= 2tx \frac{\partial}{\partial x} + 2tz \frac{\partial}{\partial t} + t^2 \frac{\partial}{\partial z} + (4xz - 2tu) \frac{\partial}{\partial u}, \\ \mathbf{v}_5 &= 2t \frac{\partial}{\partial t} + 4x \frac{\partial}{\partial u}, & \mathbf{v}_6 &= -x \frac{\partial}{\partial x} + z \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial u} \end{aligned}$$

и бесконечномерных векторных полей вида

$$\mathbf{v}_\alpha = \alpha(t) \frac{\partial}{\partial x} + 2(\alpha'(t)z) \frac{\partial}{\partial u}, \quad \mathbf{v}_\beta = \beta(t) \frac{\partial}{\partial u}.$$

Нашей целью является применение метода симметричных редукций для нахождения решений $(2+1)$ -мерного уравнения КБШ в виде бегущей волны. Для этого рассмотрим следующую редукцию, связанную со сдвигами $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ и бесконечномерным векторным полем $\mathbf{v}_\alpha$.

РЕДУКЦИЯ. Используя генератор $\mu \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_\alpha$, мы получаем переменные подобия и решения подобия

$$z_1 = x - \int \alpha(t) dt, \quad z_2 = z - \mu t, \quad h = 2\alpha'(t)z + f(z_1, z_2)$$

и ДУЧП

$$4\mu f_{z_1 z_2} - 2f_{z_1 z_1} f_{z_2} - 4f_{z_1} f_{z_1 z_2} + f^2 f_{z_1 z_1 z_1 z_2} = 0. \quad (13)$$

6. ДАЛЬНЕЙШИЕ РЕДУКЦИИ К ОДУ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

Полученное редуцированное $(1+1)$ -мерное ДУЧП допускает симметрии, включающие произвольные функции, что делает возможным его дальнейшую редукцию к ОДУ. Соответствующие решения $(1+1)$ -мерного уравнения включают до трех произвольных гладких функций.

Уравнение (13) допускает симметрии

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\partial}{\partial z_1}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{\partial}{\partial f}, \quad \mathbf{v}_3 = z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + (2\mu z_1 - f) \frac{\partial}{\partial f}, \quad \mathbf{v}_\beta = \beta(z_2) \frac{\partial}{\partial z_2}.$$

Используя генератор $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_\beta$, мы получаем переменную подобия и решения подобия

$$w = z_1 - \int \frac{dz_2}{\beta(z_2)}, \quad f = z_1 + g$$

и ОДУ

$$g^{(\text{IV})} + 6g'g'' + 4(1 - \mu)g'' = 0.$$

Интегрируя один раз по переменной w и используя $y = g'$, мы получаем ОДУ второго порядка

$$y'' + 3y^2 + 4(1 - \mu)y - c = 0.$$

Решения этого уравнения могут быть выписаны через эллиптические функции.

Используя генератор $\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_\beta$, мы получаем переменную подобия и решения подобия

$$w = z_1 \exp\left(-\int \frac{dz_2}{\beta(z_2)}\right), \quad f = \mu z_1 + \frac{1}{z_1}g$$

и ОДУ

$$w^3 g^{(\text{IV})} + 6w^2 g'g'' - 4wgg'' - 4w(g')^2 + 4gg' = 0.$$

Интегрируя один раз по переменной w , мы получаем ОДУ третьего порядка

$$w^2 g''' - wg'' + 3w(g')^2 - 4gg' + kw = 0.$$

Частное решение этого уравнения имеет вид $g = \sqrt{k}w$.

7. НЕКЛАССИЧЕСКИЕ СИММЕТРИИ ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ КБШ

Для того чтобы применить неклассический метод к $(2 + 1)$ -мерному потенциальному уравнению (9), рассмотрим однопараметрическую группу Ли инфинитезимальных преобразований (10) в пространстве (x, z, t, u, v) с соответствующим набором векторных полей (11). После того как инфинитезимальные элементы определены, переменные симметрии находятся путем разрешения условий инвариантности поверхности (12).

Потребуем теперь, чтобы преобразование оставляло инвариантным подмножество решений уравнений (9) и (12). Это приводит к переопределенной системе нелинейных уравнений для инфинитезимальных элементов $X(x, z, t, h)$, $Z(x, z, t, h)$, $T(x, z, t, h)$ и $H(x, z, t, h)$. Применение неклассического метода к уравнению (9) приводит к системе из 17 уравнений, которая дает

$$\begin{aligned} X &= \alpha(t)x + \beta(t), & Z &= \eta(z, t), & T &= 1, \\ \phi &= \gamma + \beta(4\alpha z + 2\eta) + 2\beta'z + (\eta\eta_z + \eta_t + 2\alpha\eta)x - \alpha u, \end{aligned}$$

где $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ и $\eta = \eta(z, t)$ связаны условиями

$$\begin{aligned} \eta\eta_{zz} + (\eta_z)^2 + \eta_{tz} - 2\alpha' - 4\alpha^2 &= 0, \\ \eta(\eta_z)^2 + 2\eta_t\eta_z + 4\alpha\eta\eta_z + \eta_{tt} + \eta\eta_{tz} + 4\alpha\eta_t + 2\alpha'\eta + 4\alpha^2\eta &= 0. \end{aligned}$$

Однократное интегрирование по переменной z позволяет записать первое условие в виде

$$(-2\alpha' - 4\alpha^2)z + \eta\eta_z + \eta_t + \delta = 0,$$

где $\delta = \delta(t)$. При $\alpha = 0$ и $\delta = 0$ эти условия выполнены, если $\eta\eta_z + \eta_t = 0$. Выбор $\beta = 0$ приводит к дополнительной редукции

$$z_1 = x, \quad z_2 = a(z, t), \quad h = f(z_1, z_2) + d(z, t) \quad (14)$$

и к $(1 + 1)$ -мерному ДУЧП

$$2\psi(z_2)f_{z_1z_1} + 4\phi(z_2)f_{z_1z_2} + 2f_{z_1z_1}f_{z_2} + 4f_{z_1}f_{z_1z_2} + f^2f_{z_1z_1z_1z_2} = 0$$

с $z_{2t} = \phi(z_2)z_{2z}$ и $d_z = \psi(z_2)z_{2z}$. При $\psi = -2\phi$ это уравнение инвариантно относительно сдвигов и сводится к ОДУ

$$g^{(IV)} + 6g'g'' = 0$$

с

$$w = z_1 + z_2, \quad f = g(w). \quad (15)$$

Интегрируя один раз по переменной w и полагая $g' = y$, мы получаем ОДУ второго порядка

$$y'' + 3y^2 = k_1.$$

Решения этого уравнения могут быть выписаны через эллиптические функции. Частное решение для $k_1 = 3k^2$ имеет вид

$$y = 3k \operatorname{sch}^2 \left(\sqrt{\frac{3k}{2}} w \right) - k.$$

Учитывая симметричные редукции (14) и (15), мы получаем соответствующее точное решение потенциального уравнения (9)

$$h = (6k)^{1/2} \operatorname{th} \left(\sqrt{\frac{3k}{2}} (x + a(z, t)) \right) - k(x + a(z, t)) + d(z, t), \quad (16)$$

где $\phi = \phi(a)$ – любая функция такая, что

$$a_t = \phi(a)a_z, \quad d_z = -2a_t.$$

Полученные Богоявленским в работе [3] опрокидывающиеся решения имеют вид

$$h = -c\lambda \operatorname{th} \left(\frac{c}{2} (\lambda x - \varphi) \right)$$

с $\lambda = \lambda(z, t)$, $\varphi = \varphi(z, t)$ и $\lambda_t = \alpha\lambda^2\lambda_z$, $\varphi_t = \alpha\lambda^2\varphi_z$, $\alpha = -c^2$.

Решение $(2 + 1)$ -мерного уравнения КБШ (1), которое может быть получено из (16), имеет вид

$$u = 3k \operatorname{sch}^2 \left(\sqrt{\frac{3k}{2}} (x + a(z, t)) \right) + k_1,$$

где $a = a(z, t)$ удовлетворяет условию $a_t = \phi(a)a_z$, а k_1 – произвольная константа.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы рассмотрели симметричные редукции и точные решения $(2 + 1)$ -мерного интегрируемого уравнения КБШ. Это $(2 + 1)$ -мерное уравнение было записано в локальной форме как система ДУЧП (3) и как ДУЧП четвертого порядка (9). Хотя классические симметрии для системы (3) были получены ранее [7], в настоящей работе мы получили некоторые новые редукции из оптимальных систем подалгебр. Мы также применили классические и неклассические методы к потенциальному уравнению (9). Эти редукции позволили получить некоторые точные решения данного $(2 + 1)$ -мерного уравнения, которые обладают разнообразным качественным поведением вследствие свободы выбора произвольных функций $\varphi(t)$ и $\delta(z - at)$. Были получены солитонные решения. Поскольку односолитонное решение (8) включает упомянутые выше произвольные функции, данное решение локализовано на кривой, которая может иметь произвольную форму. Некоторые из этих решений были ранее получены Богоявленским [3].

Благодарности. Авторы благодарны рецензенту, который указал им на некоторые интересные работы.

Список литературы

- [1] *О. И. Богоявленский.* Изв. РАН. Сер. матем. 1989. Т. 53. № 2. С. 243.
- [2] *О. И. Богоявленский.* Изв. РАН. Сер. матем. 1989. Т. 53. № 4. С. 907.
- [3] *О. И. Богоявленский.* Изв. РАН. Сер. матем. 1990. Т. 54. № 1. С. 123.
- [4] *J. Schiff.* Integrability of Chern–Simon–Higgs vortex equations and a reduction of the self-dual Yang–Mills equations to three dimensions. In: Painlevé Transcendents, Their Asymptotics and Physical Applications. Proc. of the NATO Advanced Research Workshop (Sainte-Adèle, Canada, September 3–7, 1990). NATO ASI Ser., Ser. B, Phys. 278. Eds. D. Levi et al. New York: Plenum, 1992. P. 393.
- [5] *B. Grammaticos, A. Ramani, J. Hietarinta.* Phys. Lett. A. 1994. V. 190. P. 65.
- [6] *K. Toda, S. Yu.* J. Math. Phys. 2000. V. 41. P. 4747.
- [7] *M. Senthil Velan, M. Lakshmanan.* J. Nonlinear Math. Phys. 1998. V. 5. P. 190.