Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. С. Брузон, М. Л. Гандариас, С. Мурьель, Х. Рамирес, Ф. Р. Ромеро, Решения вида бегущей волны для уравнений Шварца–Кортевега–де Фриза в размерности $2 + 1$ и Абловитца–Кауа–Ньюэлла–Сегура, получаемые посредством редукций симметрий, *ТМФ*, 2003, том 137, номер 1, 27–39

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf242>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 15:58:02

© 2003 г. М. С. Брузон*, М. Л. Гандариас*, С. Мурьель*,
Х. Рамирес*, Ф. Р. Ромеро†

РЕШЕНИЯ ВИДА БЕГУЩЕЙ
ВОЛНЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ
ШВАРЦА–КОРТЕВЕГА–ДЕ ФРИЗА В РАЗМЕРНОСТИ
 $2 + 1$ И АБЛОВИТЦА–КАУПА–НЬЮЭЛЛА–СЕГУРА,
ПОЛУЧАЕМЫЕ ПОСРЕДСТВОМ
РЕДУКЦИЙ СИММЕТРИЙ

Наиболее интересными решениями $(2 + 1)$ -мерного интегрируемого уравнения Шварца–Кортевега–де Фриза (ШКдФ) являются солитонные решения. Ранее нами была получена полная групповая классификация для уравнения ШКдФ в размерности $2 + 1$. В настоящей работе с использованием классических симметрий Ли рассматриваются редукции, приводящие к решениям вида бегущей волны с различными скоростями в зависимости от вида некоторой произвольной функции. Соответствующие решения данного $(2 + 1)$ -мерного уравнения включают до трех произвольных гладких функций, вследствие чего они демонстрируют весьма разнообразное качественное поведение. В частности, описано взаимодействие солитона Вадати с линейным солитоном. Более того, посредством преобразования Миуры уравнение ШКдФ тесно связано с уравнением Абловитца–Каупа–Ньюэлл–Сегура (АКНС) в размерности $2 + 1$. На основе классических симметрий Ли рассматриваются редукции, приводящие к решениям вида бегущей волны, для уравнения АКНС в размерности $2 + 1$. Интересно, что ни одна из рассматриваемых $(2 + 1)$ -мерных интегрируемых систем не допускает подалгебр типа Вирасоро.

Ключевые слова: уравнения в частных производных, симметрии Ли.

1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнение Шварца–Кортевега–де Фриза (ШКдФ)

$$\frac{\Phi_t}{\Phi_x} + \{\widehat{\Phi}; x\} = 0,$$

*Departamento de Matemáticas, Universidad de Cádiz, P.O. Box 40, 11510 Puerto Real, Cádiz, Spain. E-mail: santos.bruson@uca.es; marialuz.gandarias@uca.es; pepe.ramirez@uca.es

†Departamento de Física Teórica, Universidad de Sevilla, Avda. Reina Mercedes s/n, 41012, Seville, Spain. E-mail: romero@cica.es

где

$$\{\widehat{\Phi}; x\} = \left(\frac{\Phi_{xx}}{\Phi_x} \right)_x - \frac{1}{2} \left(\frac{\Phi_{xx}}{\Phi_x} \right)^2$$

— производная Шварца, широко известно и представляет большой интерес как для физики, так и для математики [1]. Это уравнение было введено Кричевером и Новиковым [2] и Вайссом [3] и является некоторым вариантом уравнения КдФ, инвариантным относительно преобразований Мёбиуса, т.е. относительно группы $PSL(2)$.

Кроме того, известно, что решения подобия интегрируемых нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП) приводят к трансцендентам Пенлеве [4], [5]. Эта связь между уравнениями Пенлеве и уравнениями солитонного типа привела к гипотезе Абловитца–Рамани–Сегура [6]. Именно, было показано, что обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ), полученные в результате редукции известных солитонных уравнений, дают ОДУ, обладающие свойством Пенлеве (современный обзор, посвященный свойству Пенлеве, см. в [7]). Более того, редукции подобия для наиболее известных солитонных уравнений приводят к уравнениям Пенлеве второго порядка [4], [8].

Интересно рассмотреть редукции подобия уравнений Шварца к ОДУ. В [9] редукция подобия для уравнения ШКдФ была получена с использованием группы масштабных преобразований.

Тода и Ю построили [10] некоторые новые интегрируемые модели, используя метод Калоджеро. В рамках этого метода новое уравнение получается при рассмотрении L – T -пары Лакса для исходного уравнения и таком изменении оператора T , чтобы он включал еще одну пространственную переменную z . Таким образом из уравнения ШКдФ ими было получено уравнение

$$W_t + \frac{1}{4}W_{xxz} - \frac{W_x W_{xz}}{2W} - \frac{W_{xx} W_z}{4W} + \frac{W_x^2 W_z}{2W^2} - \frac{W_x}{8} \partial_x^{-1} \left(\frac{W_x^2}{W^2} \right)_z = 0, \quad (1)$$

где $\partial_x^{-1} f = \int f dx$. Уравнение (1) инвариантно относительно преобразования Мёбиуса и для решений вида $W(x, z, t) = \overline{W}(x + z, t)$ сводится к уравнению ШКдФ. В работе [10] была выписана соответствующая пара Лакса и было доказано, что она проходит тест Пенлеве в смысле метода Вайсса–Табора–Карневале [11].

Свойства инвариантности для уравнений Кадомцева–Петвиашвили [12], Дэви–Стюартсона [13] и некоторых других физически важных интегрируемых нелинейных уравнений в размерности $2 + 1$ изучались при помощи анализа симметрий Ли. Было показано, что все эти уравнения допускают бесконечномерные точечные группы Ли со специальной структурой Каца–Мули–Вирасоро. Сентил Велан и Лакшманан представили [14] два примера $(2 + 1)$ -мерных интегрируемых уравнений, которые не допускают подалгебр типа Вирасоро. Однако они утверждали, что обе системы допускают некоторую симметрию специального вида. Например, оба уравнения явным образом допускают инфинитезимальные элементы, имеющие вид полинома не выше четвертой степени по t , однако они не допускают никаких произвольных функций в бесконечно малых вариациях переменной t , что, в свою очередь, приводит к отсутствию подалгебр типа Каца–Мули–Вирасоро.

В настоящей работе рассматривается $(2 + 1)$ -мерное интегрируемое обобщение уравнения ШКдФ (1). Хотя это $(2 + 1)$ -мерное уравнение ШКдФ возникает в нелокальной форме, с помощью преобразований

$$W = \phi_x, \quad \phi = e^\psi, \quad \psi_x = u, \quad \psi_t = v \quad (2)$$

его можно записать в виде системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} 4u^2v_x - 4uu_xv + u^2u_{xxz} - uu_{xx}u_z - 3uu_xu_{xz} + 3u_x^2u_z - u^4u_z &= 0, \\ u_t - v_x &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Интересно, что система (3), так же как и уравнение (1), впервые были введены Кудряшовым и Пикерингом [15]. Посредством преобразования Миуры

$$h_x = \frac{u_{xx}}{4u} - \frac{3u_x^2}{8u^2} - \frac{u^2}{8}, \quad h_z = -\frac{v}{u}$$

уравнение ШКдФ тесно связано со следующим уравнением на функцию h :

$$4h_{xt} + h_{xxxz} + 8h_{xz}h_x + 4h_zh_{xx} = 0. \quad (4)$$

Это хорошо известное уравнение Абловитца–Каупа–Ньюэлла–Сегура (АКНС) в размерности $2 + 1$. Отметим, что одна из рассмотренных в работе [14] систем – уравнение с опрокидывающимся солитонным решением – также может быть записана в виде уравнения АКНС при помощи некоторого преобразования.

В этой работе мы получаем редукции, приводящие к решениям вида бегущей волны с изменяющейся скоростью, зависящей от вида некоторой произвольной функции. Для этого мы применяем классический метод Ли к системе (3), а также к связанному с ней уравнению (4) и рассматриваем редукции, порожденные группами сдвигов и бесконечномерной группой.

Интересная особенность нашего исследования состоит в том, что обе интегрируемые системы в размерности $2 + 1$ – ШКдФ и АКНС – допускают бесконечномерную точечную группу Ли симметрий, но не допускают подалгебр типа Вирасоро.

Инвариантное изучение этих редуцированных систем и $(1 + 1)$ -мерных уравнений и дальнейшие редукции приводят к системам ОДУ и интегрируемым ОДУ второго порядка. Решения всех этих ОДУ выражаются через известные функции; некоторые из решений могут быть выражены через трансценденты Пенлеве II и III. Мы также получаем точные решения для $(2 + 1)$ -мерного интегрируемого обобщения уравнения ШКдФ. Появление произвольных функций в этих решениях делает возможным весьма разнообразное качественное физическое поведение последних. В частности, мы наблюдаем взаимодействие солитона Вадати с различными искривленными солитонами.

2. КЛАССИЧЕСКИЕ СИММЕТРИИ ЛИ

Чтобы применить классический метод к $(2+1)$ -мерной системе (3), рассмотрим однопараметрическую группу Ли инфинитезимальных преобразований в пространстве (x, z, t, u, v) . Связанная с этой группой алгебра Ли инфинитезимальных симметрий есть множество векторных полей вида

$$\mathbf{v} = X \frac{\partial}{\partial x} + Z \frac{\partial}{\partial z} + T \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial u} + V \frac{\partial}{\partial v}.$$

Потребуем теперь, чтобы множество решений системы (3) было инвариантно относительно этого преобразования. Данное требование приводит к переопределенной системе линейных уравнений для инфинитезимальных элементов $X(x, z, t, u, v)$, $Z(x, z, t, u, v)$, $T(x, z, t, u, v)$, $U(x, z, t, u, v)$ и $V(x, z, t, u, v)$. После того как инфинитезимальные элементы определены, переменные симметрии находятся путем разрешения условий инвариантности поверхности

$$\begin{aligned}\Phi_1 &\equiv X \frac{\partial u}{\partial x} + Z \frac{\partial u}{\partial z} + T \frac{\partial u}{\partial t} - U = 0, \\ \Phi_2 &\equiv X \frac{\partial v}{\partial x} + Z \frac{\partial v}{\partial z} + T \frac{\partial v}{\partial t} - V = 0.\end{aligned}$$

Применение классического метода к системе (3) дает систему уравнений, которая приводит к четырехпараметрической группе Ли. Связанная с этой группой алгебра Ли представима с помощью генераторов

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 &= \frac{\partial}{\partial t}, & \mathbf{v}_2 &= \frac{\partial}{\partial z}, \\ \mathbf{v}_3 &= x \frac{\partial}{\partial x} - 2z \frac{\partial}{\partial z} - u \frac{\partial}{\partial u}, & \mathbf{v}_4 &= t \frac{\partial}{\partial t} + z \frac{\partial}{\partial z} - v \frac{\partial}{\partial v}\end{aligned}$$

и бесконечномерных векторных полей вида

$$\mathbf{v}_\alpha = \alpha(t) \frac{\partial}{\partial x} - \alpha'(t) u \frac{\partial}{\partial v}.$$

Ассоциированная алгебра $\{\mathbf{v}_\alpha\}$ с $\alpha(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$ не является алгеброй Вирасоро, поскольку коммутационное соотношение между $\mathbf{v}_{\alpha_1}$ и $\mathbf{v}_{\alpha_2}$ имеет вид

$$[\mathbf{v}_{\alpha_1}, \mathbf{v}_{\alpha_2}] = 0.$$

Для того чтобы найти неэквивалентные ветви решений, мы строим одномерную оптимальную систему подалгебр. Соответствующие генераторы оптимальной системы подалгебр суть

$$\begin{aligned}\langle \mu \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4 \rangle, & \quad \left\langle \mu \mathbf{v}_2 + \frac{1}{2} \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4 \right\rangle, & \langle \mu \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 \rangle, \\ \langle \mu \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \rangle, & \langle \mu \mathbf{v}_3 \rangle, & \langle \mathbf{v}_4 \rangle, & \langle \mathbf{v}_1 \rangle,\end{aligned}$$

где $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ — произвольное число. В предыдущих работах мы выписали переменные подобия и решения подобия, а также системы ДУЧП, возникающие в результате редукции системы (3) с использованием генераторов $\{\mathbf{u}_i\}$, $i = 1, \dots, 7$, которые получаются добавлением бесконечномерного генератора $\mathbf{v}_\alpha$ к генераторам оптимальной системы.

Целью настоящей работы является применение теории симметричных редукций для нахождения решений $(2+1)$ -мерного уравнения ШКдФ в виде бегущей волны. Для этого рассмотрим следующие редукции, связанные со сдвигами $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ и бесконечномерным векторным полем $\mathbf{v}_\alpha$.

Редукция 1. Используя генератор $\mu\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_\alpha$, мы получаем переменные подобия и решения подобия

$$\begin{aligned} z_1 &= x - \frac{1}{\mu} \int \alpha(t) dt, & z_2 &= \mu z - t, \\ u &= f(z_1, z_2), & v &= g(z_1, z_2) - \frac{1}{\mu} \alpha f(z_1, z_2) \end{aligned} \quad (5)$$

и систему ДУЧП $\mathbf{S}_1$

$$\begin{aligned} \mu(-ff_{z_1 z_1} f_{z_2} + 3f_{z_1}^2 f_{z_2} - f^4 f_{z_2} + f^2 f_{z_1 z_1 z_2} - 3ff_{z_1} f_{z_1 z_2}) + 4f^2 g_{z_1} - 4ff_{z_1} g &= 0, \\ g_{z_1} + f_{z_2} &= 0. \end{aligned}$$

Редукция 2. Используя генератор $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_\alpha$, мы получаем переменные подобия и решения подобия

$$\begin{aligned} z_1 &= x - \int \alpha(t) dt, & z_2 &= z, \\ u &= f(z_1, z_2), & v &= g(z_1, z_2) - \alpha f(z_1, z_2) \end{aligned} \quad (6)$$

и систему ДУЧП $\mathbf{S}_2$

$$\begin{aligned} -ff_{z_1 z_1} f_{z_2} + 3f_{z_1}^2 f_{z_2} - f^4 f_{z_2} + f^2 f_{z_1 z_1 z_2} - 3ff_{z_1} f_{z_1 z_2} - 4ff_{z_1} g &= 0, \\ g_{z_2} &= 0. \end{aligned}$$

Редукция 3. Используя генератор $\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_\alpha$, мы получаем переменные подобия и решения подобия

$$\begin{aligned} z_1 &= z - \frac{x}{\alpha(t)}, & z_2 &= t, \\ u &= f(z_1, z_2), & v &= g(z_1, z_2) - z\alpha'(t)f(z_1, z_2) \end{aligned}$$

и систему ДУЧП $\mathbf{S}_3$

$$\begin{aligned} -4\alpha f^2 g_{z_1} + 4\alpha f f_{z_1} g + f^2 f_{z_1 z_1 z_1} - 4ff_{z_1} f_{z_1 z_1} + 3f_{z_1}^3 - \alpha^2 f^4 f_{z_1} &= 0, \\ -\alpha_{z_2} z_1 f_{z_1} + g_{z_1} + \alpha f_{z_2} &= 0. \end{aligned}$$

3. РЕДУКЦИИ К ОДУ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

В некоторых случаях редуцированные системы $(1+1)$ -мерных ДУЧП допускают симметрии, которые делают возможной их дальнейшую редукцию к системам ОДУ. Мы снова используем технику теории групп Ли. Более того, все эти системы ОДУ могут быть редуцированы к ОДУ второго порядка, решения которых выражаются через известные функции, такие как трансценденты Пенлеве II и III [16].

Две из этих систем $(1+1)$ -мерных ДУЧП допускают симметрии с произвольными функциями. Соответствующие решения $(2+1)$ -мерного уравнения включают до трех произвольных гладких функций.

Система S_1 допускает симметрии

$$\mathbf{v}_{11} = \frac{\partial}{\partial z_1}, \quad \mathbf{v}_\beta = \beta(z_2) \frac{\partial}{\partial z_2} - \beta'(z_2) g \frac{\partial}{\partial g}.$$

Используя генератор $c\mathbf{v}_{11} + \mathbf{v}_\beta$, мы получаем переменную подобия и решения подобия

$$w = z_1 - c \int \frac{dz_2}{\beta(z_2)}, \quad f = h, \quad g = \frac{1}{\beta(z_2)} k(w) \quad (7)$$

и систему ОДУ

$$\begin{aligned} k' - ch' &= 0, \\ \mu c(4hh'h'' - h^2h''' - 3(h')^3 + h^4h') + 4h^2k' - 4hh'k &= 0. \end{aligned}$$

Эта система эквивалентна ОДУ второго порядка

$$2dh + c\mu(h^4 + (h')^2 - hh'') - k_1h^3 = 0$$

и

$$k = ch + k_1.$$

Общее решение может быть записано через эллиптические функции Якоби, вследствие чего существуют решения вида

$$h = \frac{a_1}{a_2 + \operatorname{sn}^2(a_4 + a_3x \mid a_5)},$$

где a_1, a_2, a_3 и a_4 — произвольные постоянные и

$$a_5 = -\frac{1}{a_2} - \frac{a_1^2}{4a_2^2a_3^2(1+a_2)}.$$

Мы нашли несколько частных решений при подходящем выборе параметров, наиболее интересными из которых являются следующие:

$$\begin{aligned} h &= d_1, & h &= \pm \frac{d_2}{1 + e^{d_2(w-d_1)}}, \\ h &= \pm \frac{2d_2}{(w-d_1)^2 - d_2^2}, & h &= \frac{d_2}{\cos(d_2(w-d_1))}, \end{aligned} \quad (8)$$

где d_1 и d_2 — произвольные постоянные.

С помощью преобразований (2), а также симметричных редукций (5) и (7), исходя из (8), соответствующее семейство решений $(2+1)$ -мерного уравнения ШКДФ (1) после некоторых упрощений может быть записано в виде

$$W = d_1 e^{d_1 x} \rho(z, t), \quad (9)$$

$$W = \frac{\rho(z)}{\operatorname{ch}^2(d_1 + d_2 x + \varphi(t) + \delta(-t + \mu z))}, \quad (10)$$

$$W = \frac{\rho(z)}{1 + \sin(d_2(d_1 - x + \varphi(t) + \delta(-t + \mu z)))}, \quad (11)$$

где

$$\varphi(t) = \frac{1}{\mu} \int e^{-t/\mu} \alpha(t) dt, \quad \delta(-t + \mu z) = c \int \frac{1}{\beta(z_2)} dz_2$$

и $\rho = \rho(z, t)$ — три произвольные функции.

Система $\mathbf{S}_2$ допускает симметрии

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{21} &= \frac{\partial}{\partial z_1}, & \mathbf{v}_{22} &= z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} - f \frac{\partial}{\partial f} - 2g \frac{\partial}{\partial g}, \\ \mathbf{v}_\beta &= \beta(z_2) \frac{\partial}{\partial z_2} - \beta'(z_2) g \frac{\partial}{\partial g}. \end{aligned}$$

Используя генератор $c\mathbf{v}_{21} + \mathbf{v}_{22} + \mathbf{v}_\beta$, мы получаем переменную подобия и решения подобия

$$\begin{aligned} w &= \ln(z_1 + c) - \int \frac{dz_2}{\beta(z_2)}, & f &= \frac{h(w)}{z_1 + c}, \\ g &= \frac{1}{\beta(z_2)} \exp\left(-2 \int \frac{dz_2}{\beta(z_2)}\right) k(w) \end{aligned}$$

и систему ОДУ

$$\begin{aligned} k' &= 0, \\ (4hh' - 4h^2)ke^{2w} - 4hh'h'' + h^2h''' + 3(h')^3 - h^4h' &= 0. \end{aligned}$$

Путем замены переменных $e^{2w} = z$, $h(w) = Y(z)$, деления на $u^4 z$ и однократного интегрирования по переменной z получаем

$$Y'' = \frac{(Y')^2}{Y} + \frac{1}{4z^2} Y^3 + \frac{k_1}{8z^2} Y^2 - \frac{Y}{z} + \frac{k}{2z} = 0.$$

Это уравнение есть уравнение Пенлеве III (1906 г.)

$$Y'' = \frac{(Y')^2}{Y} + \frac{\alpha Y^2 + \gamma Y^3}{4z^2} + \frac{\beta}{4z} + \frac{\delta}{4Y}$$

с $\alpha = k_1/2$, $\beta = 2k$, $\gamma = 1$ и $\delta = 0$.

Используя генератор $\mathbf{v}_{21} + \mathbf{v}_\beta$, мы получаем переменную подобия и решения подобия

$$w = z_1 - \int \frac{dz_2}{\beta(z_2)}, \quad f = h, \quad g = \frac{1}{\beta(z_2)}k(w)$$

и систему ОДУ

$$\begin{aligned} k' &= 0, \\ -4hh'h'' + h^2h''' + 3(h')^3 - h^4h' + 4h^2k' - 4hh'k &= 0. \end{aligned}$$

Эта система может быть сведена к автономному ОДУ второго порядка

$$h'' = \frac{3}{2} \frac{(h')^2}{h} + \frac{h^3}{2} - \frac{k_2}{2}h + 4c$$

и

$$k = c,$$

решение которого может быть выписано в эллиптических функциях.

Используя генератор $\mathbf{v}_\beta$, мы получаем переменную подобия и решения подобия

$$w = z_1, \quad f = h, \quad g = \beta(z_2)c. \quad (12)$$

Если положить $c = 0$, то функция h становится произвольной.

С помощью преобразований (2), а также симметричных редукций (6) и (12) находим, что соответствующее семейство решений $(2 + 1)$ -мерного уравнения ШКДФ (1) имеет вид

$$W = \rho(z)f(x - \varphi(t)),$$

где ρ и f — произвольные функции.

Система $\mathbf{S}_3$ допускает симметрии

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{31} &= \beta(z_2) \frac{\partial}{\partial z_1} + (\alpha\beta' + \alpha'\beta) f \frac{\partial}{\partial g}, \\ \mathbf{v}_{32} &= -\frac{\alpha'(z_2)}{\alpha^2(z_2)} z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{1}{\alpha(z_2)} \frac{\partial}{\partial z_2} + \frac{\alpha'(z_2)}{\alpha^2(z_2)} g \frac{\partial}{\partial g}. \end{aligned}$$

Используя генератор $\mathbf{v}_{32}$, мы получаем переменную подобия и решения подобия

$$w = z_1 \alpha(z_2), \quad f = h, \quad g = \frac{1}{z_1} k(w)$$

и систему ОДУ

$$\begin{aligned} k - wk' &= 0, \\ w^2h^2h''' - 4w^2hh'h'' + 3w^2(h')^3 - w^2h^4h' - 4wh^2k' + 4whh'k + 4h^2k &= 0. \end{aligned}$$

Эта система эквивалентна автономному ОДУ второго порядка

$$h'' = \frac{3}{2} \frac{(h')^2}{h} + \frac{h^3}{2} - k_2h + 4k_1$$

и

$$k = k_1w,$$

решение которого может быть выписано в эллиптических функциях. Частным решением уравнения ШКДФ является

$$W = \frac{\rho(z)}{(2 + c_1(c_2 + x + z\alpha(t)))^2}.$$

4. КЛАССИЧЕСКИЕ СИММЕТРИИ ЛИ ДЛЯ $(2 + 1)$ -МЕРНОГО УРАВНЕНИЯ АКНС

Исследуем свойства инвариантности для уравнения АКНС (4). Инвариантность уравнения (4) относительно инфинитезимальных точечных преобразований в пространстве (x, t, z, h) , связанных с множеством векторных полей вида

$$\mathbf{v} = X \frac{\partial}{\partial x} + Z \frac{\partial}{\partial z} + T \frac{\partial}{\partial t} + H \frac{\partial}{\partial h},$$

приводит к описанной ниже бесконечномерной алгебре Ли симметрий.

Применение классического метода к уравнению (4) дает систему уравнений, которая приводит к шестипараметрической группе Ли. Связанная с этой группой алгебра Ли может быть представлена с помощью генераторов

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \frac{\partial}{\partial t}, & \mathbf{v}_2 &= \frac{\partial}{\partial z}, \\ \mathbf{v}_3 &= x \frac{\partial}{\partial x} + 2z \frac{\partial}{\partial z} + 4t \frac{\partial}{\partial t} - u \frac{\partial}{\partial u}, & \mathbf{v}_4 &= tx \frac{\partial}{\partial x} + 2tz \frac{\partial}{\partial t} + 2t^2 \frac{\partial}{\partial z} + (xz - tu) \frac{\partial}{\partial u}, \\ \mathbf{v}_5 &= 2t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial u}, & \mathbf{v}_6 &= -x \frac{\partial}{\partial x} + 2z \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial u} \end{aligned}$$

и бесконечномерных векторных полей вида

$$\mathbf{v}_\alpha = \alpha(t) \frac{\partial}{\partial x} + \alpha'(t) z \frac{\partial}{\partial u}, \quad \mathbf{v}_\beta = \beta(t) \frac{\partial}{\partial u}.$$

Интересно отметить, что эта ассоциированная алгебра не содержит алгебры Вирасоро.

Нашей целью является применение теории симметричных редукций для нахождения решений $(2+1)$ -мерного уравнения АКНС в виде бегущей волны. Для этого рассмотрим следующую редукцию, связанную со сдвигами $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ и бесконечномерным векторным полем $\mathbf{v}_\alpha$.

Редукция. Используя генератор $\mu \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_\alpha$, мы получаем переменные подобия и решения подобия

$$z_1 = x - \int \alpha(t) dt, \quad z_2 = z - \mu t, \quad h = \alpha z_2 + f(z_1, z_2)$$

и ДУЧП

$$4\mu f_{z_1 z_2} - 4f_{z_1 z_1} f_{z_2} - 8f_{z_1} f_{z_1 z_2} - f_{z_1 z_1 z_1 z_2} = 0. \quad (13)$$

5. РЕДУКЦИЯ К ОДУ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

Редуцированное $(1+1)$ -мерное ДУЧП допускает симметрии с произвольными функциями, что приводит к его дальнейшей редукции к ОДУ. Соответствующие решения $(2+1)$ -мерного уравнения включают до трех произвольных гладких функций.

Уравнение (13) допускает симметрии

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \frac{\partial}{\partial z_1}, & \mathbf{v}_2 &= \frac{\partial}{\partial f}, \\ \mathbf{v}_3 &= z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + (\mu z_1 - f) \frac{\partial}{\partial f}, & \mathbf{v}_\beta &= \beta(z_2) \frac{\partial}{\partial z_2}. \end{aligned}$$

Используя генератор $c\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_\beta$, мы получаем переменную подобия и решение подобия

$$w = z_1 - \int \frac{dz_2}{\beta(z_2)}, \quad f = z_1 + g(w)$$

и ОДУ

$$g^{(\text{IV})} + (8 - 4\mu)g'' + 12g'g''.$$

Интегрируя один раз по переменной w и используя $y = g'$, мы получаем ОДУ второго порядка

$$y'' + 6y^2 + (8 - 4\mu)y - c = 0,$$

решения которого могут быть выписаны в эллиптических функциях. Мы нашли несколько частных решений при надлежащем выборе параметров. Вот некоторые из них:

$$\begin{aligned} g &= c_1 w + c_2, \\ g &= \frac{\mu - 2}{3} w + \frac{1}{w + c_1} + c_2, \\ g &= \frac{\mu - 2 - c_1^2}{3} w + c_1 \operatorname{th}(c_1 w + c_2) + c_3. \end{aligned}$$

Соответствующие решения уравнения АКНС имеют вид

$$\begin{aligned} h &= c_2(x - \alpha(t)) + \beta(z - \mu t) + \alpha'(t)(z - \mu t), \\ h &= \frac{\mu - 2}{3}(x - \alpha(t) - \beta(z - \mu t)) + x - \alpha(t) + \\ &\quad + \alpha'(t)(z - \mu t) + \frac{1}{x - \alpha(t) - \beta(z - \mu t) + c_1} + c_2, \\ h &= \frac{\mu - 2 - c_1^2}{3}(x - \alpha(t) - \beta(z - \mu t)) + x - \alpha(t) + \alpha'(t)(z - \mu t) + \\ &\quad + c_1 \operatorname{th}(c_1(x - \alpha(t) - \beta(z - \mu t)) + c_2) + c_3. \end{aligned}$$

6. НЕКОТОРЫЕ ЯВНЫЕ РЕШЕНИЯ

Появление произвольных функций в решениях делает возможным очень разнообразное качественное физическое поведение последних. Ранее [16], [17] при надлежащем выборе произвольных функций нам удалось построить широкие семейства решений: уединенные волны, когерентные системы, такие как связанные n -солитонные состояния, кинки и большое многообразие стационарных решений, таких как мультидромионы. Выбирая функцию f класса C^∞ с компактным носителем, мы получили также компактоны.

Рис. 1. Солитон Вадати и линейный солитон.

Рис. 2. Солитон Вадати и параболический солитон.

Произвольная функция $\rho(z, t)$ в решении (9) может описывать любой процесс взаимодействия в размерности $1 + 1$. Кроме того, любая сумма когерентных систем в размерности $1 + 1$ доставляет новые решения. Эти последние описывают упругое столкновение. В частности, мы можем получить большое многообразие решений. Например, мы

Рис. 3. Солитон Вадати и линейный солитон, $t = -0.2$.

можем наблюдать взаимодействие промодулированных функций e^{ax} солитонов: солитона Вадати [18] в (z, t) , заданного выражением

$$2\partial_z \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{c \sin(nz + dt)}{n \operatorname{ch}(cz + et)} \right) \right),$$

и линейного солитона в (z, t) .

На рис. 1 мы можем наблюдать взаимодействие солитона Вадати в (z, t) с $n = 3$ и $c = 1$ с линейным солитоном, который эволюционирует вдоль прямой $z = 10t$, а на рис. 2 — взаимодействие солитона Вадати с параболическим солитоном, который эволюционирует вдоль кривой $z^2 - 10t - 3 = 0$. На рис. 3 изображено взаимодействие промодулированных функций $e^{x/10}$ солитона Вадати и линейного солитона, который эволюционирует вдоль прямой $z = 10t$, в плоскости (x, z) при $t = -0.2$.

Аналогично можно рассмотреть кинки, мультидромоны и т. д. в плоскости (z, t) , модулированные функцией e^{ax} .

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы рассмотрели редукции симметрии и точные решения $(2+1)$ -мерного интегрируемого обобщенного уравнения ШКдФ, а также $(2+1)$ -мерного уравнения АKNС. Последнее уравнение тесно связано с уравнением ШКдФ посредством преобразования Миуры. Мы рассмотрели редукции, приводящие к решениям вида бегущей волны, для этих интегрируемых уравнений в размерности $2+1$ при помощи классических симметрий Ли. Интересно отметить, что оба рассмотренных интегрируемых уравнения в размерности $2+1$ не допускают подалгебр типа Вирасоро.

Используя классический метод Ли, мы получили системы ДУЧП в размерности $1+1$ и системы ОДУ. С помощью дальнейших редукций мы получили интегрируемые ОДУ второго порядка, решения которых выражаются через известные функции. Некоторые из этих решений выражаются через трансценденты Пенлеве II и III. Для уравнения ШКдФ в размерности $2+1$ мы построили семейства решений с весьма разнообразным

качественным поведением. Это обусловлено свободой выбора произвольной функции типа $e^x \rho(z, t)$.

Благодарности. Нам приятно поблагодарить Р. Конта и М. Музетте за оказанную ими значительную помощь и Х. Л. Ромеро и Е. Медину за интересные комментарии. Авторы благодарны также рецензенту за его замечание.

Список литературы

- [1] *E. Hille*. Analytic Function Theory. V. 2. Boston: Ginn, 1962; *H. Schwerdtfeger*. Geometry of Complex Numbers. New York: Dover, 1979.
- [2] *И. М. Кривчевер, С. П. Новиков*. УМН. 1980. Т. 35. № 6. С. 47.
- [3] *J. Weiss*. J. Math Phys. 1983. V. 24. P. 1405; V. 26. P. 258.
- [4] *M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, H. Segur*. Stud. Appl. Math. 1974. V. 53. P. 249.
- [5] *B. Gambier*. Acta Math. 1909. V. 33. P. 1; *P. Painlevé*. Bull. Soc. Math. France. 1900. V. 28. P. 201; Acta Math. 1902. V. 25. P. 1.
- [6] *M. J. Ablowitz, A. Ramani, H. Segur*. Lett. Nuovo Cimento. 1978. V. 23. P. 333.
- [7] *R. Conte (ed.)*. The Painlevé Property: One Century Later. CRM Ser. Math. Phys. New York: Springer, 1999; *M. Musette*. Painlevé analysis for nonlinear partial differential equations. In: The Painlevé Property: One Century Later. CRM Ser. Math. Phys. New York: Springer, 1999. P. 517.
- [8] *M. J. Ablowitz, H. Segur*. Solitons and the Inverse Scattering Transform. Philadelphia: SIAM, 1981.
- [9] *F. Nijhoff*. On some “Schwarzian” equations and their discrete analogues. In: Algebraic Aspects of Integrable Systems. In Memory of Irene Dorfman. Prog. Nonlinear Differ. Eq. Appl. V. 26. Eds. A. S. Fokas et al. Boston, MA: Birkhäuser, 1997. P. 237.
- [10] *K. Toda, S. Yu.* J. Math. Phys. 2000. V. 41. P. 4747.
- [11] *J. Weiss, J. M. Tabor, G. Carnevale*. J. Math Phys. 1983. V. 24. P. 522.
- [12] *D. David, N. Kamran, D. Levi, P. Winternitz*. J. Math. Phys. 1986. V. 27. P. 1225.
- [13] *B. Champagne, P. Winternitz*. J. Math. Phys. 1988. V. 29. P. 1.
- [14] *M. Senthil Velan, M. Lakshmanan*. J. Nonlinear Math. Phys. 1998. V. 5. P. 190.
- [15] *N. Kudriashov, P. Pickering*. J. Phys. A. 1998. V. 31. P. 9505.
- [16] *J. Ramirez, M. S. Bruzón, C. Muriel, M. L. Gandarias*. J. Phys. A. 2003. V. 36. P. 1467.
- [17] *M. L. Gandarias, M. S. Bruzón, J. Ramírez*. Classical symmetries for a Boussinesq equation with nonlinear dispersion. In: Symmetry and Perturbation Theory. Eds. D. Bambusi, G. Gaeta, M. Cadoni. River Edge, NJ: World Scientific, 2001; *М. Л. Гандарияс, М. С. Брузон, Х. Рамуес*. ТМФ. 2003. Т. 134. № 1. С. 74.
- [18] *M. Wadati*. J. Phys. Soc. Japan. 1973. V. 34. P. 1289.