Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Карле, Расширенная цепочка Тоды, *ТМФ*, 2003, том 137, номер 1, 40–46

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf243>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 18:26:42

© 2003 г.

Г. Карле*

РАСШИРЕННАЯ ЦЕПОЧКА ТОДЫ

Введены нелокальные потоки, коммутирующие с потоками классической иерархии Тоды. Определен логарифм разностного оператора Лакса. С его помощью получено представление Лакса для новых потоков.

Ключевые слова: цепочка Тоды, логарифм разностного оператора, представление Лакса, бигамильтонов формализм.

Уравнение цепочки Тоды представляет собой нелинейное эволюционное уравнение, описывающее бесконечную систему масс на прямой, взаимодействующих посредством экспоненциальных сил. Это уравнение было предложено Тодой [2]. В подходящих координатах оно записывается в виде системы

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} u_n &= e^{v_{n+1}} - e^{v_n}, \\ \frac{\partial}{\partial t} v_n &= u_n - u_{n-1},\end{aligned}\tag{1}$$

где $n \in \mathbb{Z}$. Вскоре стало понятно, что это уравнение является вполне интегрируемым (т.е. имеет бесконечное число сохраняющихся величин), может быть решено методом обратной задачи рассеяния для быстро убывающих граничных условий [3] и имеет квазипериодические решения, которые могут быть получены в явном виде алгебро-геометрическими методами [4]. Оно имеет важные приложения в различных областях, в частности в теории Громова–Виттена инвариантов $\mathbb{C}P^1$, где настоящее расширение играет особую роль [5].

Уравнение цепочки Тоды можно рассматривать как первый элемент иерархии коммутирующих потоков – иерархии цепочки Тоды. Все потоки можно записать с помощью представления Лакса [3]

$$\epsilon \frac{\partial L}{\partial t_q} = \left[\frac{1}{(q+1)!} (L^{q+1})_+, L \right],$$

где

$$L = \Lambda + u + e^v \Lambda^{-1}$$

Данная работа основана на нашей совместной работе с Дубровиным и Шангом [1].

*SISSA, Via Beirut 2–4, 34014 Trieste, Italy. E-mail: carlet@sissa.it

– разностный оператор. Мы используем обозначения (см. [6]) с непрерывной пространственной переменной $x = n\epsilon$, где ϵ – шаг цепочки, и $t_0 = \epsilon t$, т.е. $u(x) = u_n$ и $v(x) = v_n$ при $x = \epsilon n$. Обозначим через Λ оператор сдвига $\Lambda f(x) = f(x + \epsilon)$. Для любого разностного оператора $A = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \Lambda^k$ обозначим через A_+ и A_- его положительную и отрицательную части: $A_+ = \sum_{k \geq 0} a_k \Lambda^k$, $A = A_+ + A_-$. Первый поток t_0 дается уравнениями Тоды (1); в качестве другого примера приведем второй поток:

$$\begin{aligned}\epsilon u_{t_1}(x) &= \frac{1}{2}((u(x + \epsilon) + u(x))e^{v(x+\epsilon)} - (u(x - \epsilon) + u(x))e^{v(x)}), \\ \epsilon v_{t_1}(x) &= \frac{1}{2}(e^{v(x+\epsilon)} - e^{v(x-\epsilon)} + u^2(x) - u^2(x - \epsilon)).\end{aligned}$$

Эта иерархия является гамильтоновой по отношению к двум различным гамильтоновым структурам [7]. Первая структура в нашей непрерывной формулировке задается скобкой Пуассона

$$\begin{aligned}\{u(x), v(y)\}_1 &= \frac{1}{\epsilon}(\delta(x - y + \epsilon) - \delta(x - y)), \\ \{u(x), u(y)\}_1 &= \{v(x), v(y)\}_1 = 0.\end{aligned}\tag{2}$$

Вторая скобка Пуассона имеет вид

$$\begin{aligned}\{u(x), u(y)\}_2 &= \frac{1}{\epsilon}(e^{v(x+\epsilon)}\delta(x - y + \epsilon) - e^{v(x)}\delta(x - y - \epsilon)), \\ \{u(x), v(y)\}_2 &= \frac{1}{\epsilon}u(x)(\delta(x - y + \epsilon) - \delta(x - y)), \\ \{v(x), v(y)\}_2 &= \frac{1}{\epsilon}(\delta(x - y + \epsilon) - \delta(x - y - \epsilon)).\end{aligned}\tag{3}$$

Уравнения движения могут быть записаны в виде

$$\frac{d}{dt_q} \cdot = \{ \cdot, \bar{h}_q \}_1 = \frac{1}{q+1} \{ \cdot, \bar{h}_{q-1} \}_2,\tag{4}$$

где $\bar{h}_q = \int h_q dx$, а гамильтонианы являются следами степеней оператора Лакса L :

$$h_q = \frac{1}{(q+2)!} \text{Res}(L^{q+2}).\tag{5}$$

Вычет любого разностного оператора $A = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \Lambda^k$ по определению равен $\text{Res } A = a_0$.

Наличие двух гамильтоновых структур позволяет получить все гамильтонианы при помощи рекуррентного соотношения (4) Ленарда–Магри [8], отправляясь от оператора Казимира первой скобки Пуассона. В нашем случае, начав с оператора Казимира $h_{-1} = u$, мы получим все определенные выше гамильтонианы. Более того, эта процедура гарантирует, что все получающиеся гамильтонианы коммутируют друг с другом.

Чтобы увидеть, почему и как эту иерархию уравнений можно расширить, рассмотрим ее бездисперсионный предел, получающийся при $\epsilon \rightarrow 0$. Можно показать [6], что представление Лакса бездисперсионных потоков имеет вид

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t_q} = \left\{ \frac{1}{(q+1)!} (\mathcal{L}^{q+1})_+, \mathcal{L} \right\}.$$

В этом случае $\mathcal{L}$ является функцией x и дополнительной переменной p ,

$$\mathcal{L} = p + u(x) + e^{v(x)} p^{-1},$$

а скобка имеет вид

$$\{\mathcal{B}, \mathcal{C}\} = p \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial p} \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial x} - p \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial p} \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial x},$$

где $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ – функции p и x , а $(\mathcal{B})_+$ означает, что в разложении $\mathcal{B}$ в степенной ряд рассматриваются только неотрицательные степени p .

Бездисперсионные гамильтонианы и скобки Пуассона нетрудно получить из соответствующих дисперсионных величин (5) и скобок (2), (3), полагая $\epsilon \rightarrow 0$. В частности, в бездисперсионном случае остается справедливым рекуррентное соотношение (4).

Как отмечено в работе [9], при аппроксимации рода нуль топологической CP^1 модели новые потоки можно добавить к приведенным выше обычным бездисперсионным потокам; их представление Лакса имеет вид

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{t}_q} = \left\{ \frac{2}{q!} (\mathcal{L}^q (\ln \mathcal{L} - c_q))_+, \mathcal{L} \right\}, \quad (6)$$

где $c_q = \sum_{k=1}^q 1/k$, $c_0 = 0$. Логарифм $\mathcal{L}$ надо понимать в смысле равенства

$$\ln \mathcal{L} = \frac{1}{2} v + \frac{1}{2} \ln(1 + up^{-1} + e^v p^{-2}) + \frac{1}{2} \ln(1 + ue^{-v} p + e^{-v} p^2),$$

где первый логарифм в правой части рассматривается как разложение по отрицательным, а второй – по положительным степеням p .

Эти потоки можно представить в гамильтоновой форме:

$$\frac{d}{d\tilde{t}_q} \cdot = \{ \cdot, \bar{h}_q^{\text{disp}} \}_1,$$

где скобка Пуассона представляет собой бездисперсионный предел формулы (2), а бездисперсионные гамильтонианы определяются соотношением

$$\bar{h}_q^{\text{disp}} = \frac{2}{(q+1)!} \text{Res}_{p=0} [p^{-1} \mathcal{L}^{q+1} (\ln \mathcal{L} - c_{q+1})].$$

Однако эти гамильтонианы удовлетворяют рекуррентному соотношению, отличающемуся от соотношения (4):

$$\{ \cdot, \bar{h}_{q-1} \}_2 = q \{ \cdot, \bar{h}_q \}_1 + 2 \{ \cdot, \bar{h}_{q-1} \}_1. \quad (7)$$

Заметим, что все потоки в бездисперсионном пределе можно ввести совсем по-другому, пользуясь связью между системами гидродинамического типа и фробениусовыми многообразиями [10]. Пуассонов пучок Тоды в бездисперсионном пределе ассоциирован с фробениусовым многообразием, характеризующимся свободной энергией $F = u^2 v/2 + e^v$. При этом все гамильтонианы системы можно получить путем разложения так называемых деформированных плоских координат фробениусова многообразия. Соотношение между дисперсионной и бездисперсионной версиями иерархии Тоды – это лишь частный случай предложенной в работе [11] программы классификации бигамильтоновых интегрируемых иерархий, основанной на восстановлении всей дисперсионной иерархии по ее бездисперсионному пределу.

Итак, мы видим, что в бездисперсионном случае в иерархии Тоды имеются две последовательности абсолютно корректно определенных коммутирующих друг с другом потоков, обозначенных временами t_q и $\tilde{t}_q$ при $q \geq 0$. Классические дисперсионные потоки, соответствующие определенным выше временам t_q , сводятся к соответствующим потокам в бездисперсионной иерархии при $\epsilon \rightarrow 0$. С другой стороны, в классической дисперсионной формулировке, очевидно, нет потоков, переходящих при $\epsilon \rightarrow 0$ в бездисперсионные потоки, соответствующие временам $\tilde{t}_q$.

По аналогии с процедурой Ленарда–Магри для первого набора гамильтонианов мы полагаем, что второй набор потоков дисперсионной иерархии получается из другого оператора Казимира первой скобки Пуассона с помощью рекуррентного соотношения (7) (на этот раз с полными дисперсионными скобками). Первая скобка Пуассона действительно имеет второй оператор Казимира $\tilde{h}_{-1} = v$. Однако легко видеть, что в этом случае рекуррентное соотношение (7) не справедливо, поскольку $\tilde{h}_{-1}$ является оператором Казимира *обеих* скобок Пуассона. Это явление называется *резонансом* пуассонова пучка.

Однако можно ввести предложенный в [12] анзац для первого нетривиального гамильтониана $\tilde{h}_0$; он имеет такой вид, что соответствующий поток совпадает с x -трансляцией:

$$\tilde{h}_0 = u\Lambda(\Lambda - 1)^{-1}\epsilon v_x. \quad (8)$$

Этот гамильтониан нелокален, поскольку он содержит величину, обратную к дискретной производной, которую можно записать в виде формального ряда по ϵ :

$$(\Lambda - 1)^{-1}\epsilon v_x = \sum_{k \geq 0} \frac{B_k}{k!} (\epsilon \partial_x)^k v,$$

где числа Бернулли B_k определяются соотношением

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k \geq 0} \frac{B_k}{k!} x^k.$$

Отправляясь от этого анзаца, при помощи рекуррентного соотношения (7) можно определить все гамильтонианы $\tilde{h}_q$ и показать, что они коммутируют друг с другом и со всеми классическими потоками Тоды.

Для получения этих новых потоков в явном виде важно найти их представление Лакса. Рассмотрение бездисперсионного представления Лакса (6) подсказывает, что необходимо ввести логарифм оператора Лакса L . Такой оператор можно ввести при помощи формализма одевания. Хорошо известно [13], что L можно представить в виде одетых операторов сдвига Λ и Λ^{-1} :

$$L = P\Lambda P^{-1} = Q\Lambda^{-1}Q^{-1}, \quad (9)$$

где

$$P = \sum_{k \geq 0} p_k \Lambda^{-k}, \quad p_0 = 1,$$

$$Q = \sum_{k \geq 0} q_k \Lambda^k.$$

После подстановки в определение (9) функции p_k и q_k можно выразить через u и v .

Заметив, что $\Lambda = e^{\epsilon \partial_x}$, приходим к двум различным определениям логарифма:

$$\ln_+ L = P\epsilon \partial P^{-1} = \epsilon \partial + P\epsilon P_x^{-1},$$

$$\ln_- L = -Q\epsilon \partial Q^{-1} = -\epsilon \partial - Q\epsilon Q_x^{-1}.$$

Ввиду наличия члена $\epsilon \partial$ оба эти логарифма являются дифференциально-разностными операторами. Нам нужно найти выражение типа (6) и придать смысл его части, содержащей $(\cdot)_+$. Поэтому желательно иметь для логарифма чисто разностное выражение. Определим его соотношением

$$\ln L = \frac{1}{2} \ln_+ L + \frac{1}{2} \ln_- L = -\frac{\epsilon}{2} (P_x P^{-1} - Q_x Q^{-1}).$$

В этом определении производные выпадают, и мы получаем разностный оператор вида

$$\ln L = \sum_{k \in \mathbb{Z}} w_k \Lambda^k.$$

Мы хотим выразить коэффициенты w_k через переменные u и v . Это действительно можно сделать (доказательство см. в [1]). Существенно, что все определенные выше логарифмы по определению коммутируют с L , например

$$[\ln_+ L, L] = 0. \quad (10)$$

Подставляя

$$\ln_+ L = \epsilon \partial + 2 \sum_{k \leq -1} w_k \Lambda^k$$

в (10), можно получить рекуррентное решение и представить коэффициенты w_k при $k \leq -1$ в виде формальных рядов с коэффициентами, являющимися дифференциальными полиномами по u и v . Аналогичное выражение для $\ln_- L$ дают коэффициенты w_k при $k \geq 0$. Например, несколько первых коэффициентов имеют вид

$$\begin{aligned} w_{-1} &= \frac{1}{2}(\Lambda - 1)^{-1}\epsilon u_x, \\ w_0 &= \frac{1}{2}\Lambda(\Lambda - 1)^{-1}\epsilon v_x, \\ w_1 &= \frac{1}{2}\Lambda e^{-v}(\Lambda - 1)^{-1}\epsilon u_x. \end{aligned}$$

Отметим, что для коэффициентов p_k и q_k одевающих операторов это, вообще говоря, невозможно.

Пользуясь данным определением логарифма L , можно построить представление Лакса для новых потоков. Формально оно аналогично бездисперсионному представлению Лакса:

$$\epsilon \frac{\partial L}{\partial \tilde{t}_q} = [A_q, L], \quad A_q = \frac{2}{q!}[L^q(\ln L - c_q)]_+,$$

где A_q – разностный оператор бесконечного порядка. Эквивалентным образом можно использовать оператор

$$\tilde{A}_q = \frac{2}{q!}[L^q(\ln L - c_q)]_+ - \frac{1}{q!}L^q(\ln_- L - c_q),$$

который также содержит дифференциальную часть, но имеет конечный порядок. Он приводит к тем же уравнениям Лакса, так как отличается от A_q членом, коммутирующим с L . Например, первые два оператора Лакса имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{A}_0 &= \epsilon \partial, \\ \tilde{A}_1 &= \Lambda(\epsilon \partial - 1) + \Lambda(\Lambda - 1)^{-1}\epsilon u_x + u(\epsilon \partial - 1) + \\ &\quad + e^v(\epsilon \partial + 1 - (\Lambda - 1)^{-1}\epsilon v_x)\Lambda^{-1}. \end{aligned}$$

Как и следовало ожидать, первый оператор соответствует x -трансляциям, а второй дает первый нетривиальный расширенный поток Тоды

$$\begin{aligned} \epsilon u_{\tilde{t}_1} &= (\Lambda - 1)(-e^v(\Lambda^{-1} - 1)^{-1}\epsilon v_x) - 2(\Lambda - 1)e^v + \epsilon \left(\frac{u^2}{2} + e^v \right)_x, \\ \epsilon v_{\tilde{t}_1} &= ((\Lambda^{-1} - 1)^{-1}\epsilon v_x)(\Lambda^{-1} - 1)u + \\ &\quad + \epsilon v_x(\Lambda^{-1}u) + \Lambda^{-1}\epsilon u_x + \epsilon u_x + 2(\Lambda^{-1} - 1)u. \end{aligned} \tag{11}$$

По аналогии с бездисперсионным случаем можно получить явное выражение для гамильтонианов:

$$\tilde{h}_q = \frac{2}{(q+1)!} \text{Res}[L^{q+1}(\ln L - c_{q+1})].$$

С точностью до полных производных они совпадают с гамильтонианами, определенными выше при помощи рекуррентного соотношения и анзаца (8).

Хотя новые потоки этой расширенной иерархии Тоды нелокальны, они обладают многими хорошими свойствами, присущими интегрируемым системам, в частности они имеют многосолитонные решения. Например, эволюция простого солитона, заданная нелокальными потоками (11), имеет вид

$$u(x, \tilde{t}_1) = (\Lambda - 1) \frac{\text{ch}((1/\epsilon)((x + \lambda_1 \tilde{t}_1) \ln z_1 + \tilde{t}_1(-z_1 + z_1^{-1})))}{\text{ch}((1/\epsilon)((x + \lambda_1 \tilde{t}_1) \ln z_1 + \tilde{t}_1(-z_1 + z_1^{-1})) - \ln z_1)},$$

$$v(x, \tilde{t}_1) = (1 - \Lambda^{-1})^2 \ln \left[2 \text{ch} \left(\frac{1}{\epsilon} (x + \lambda_1 \tilde{t}_1) \ln z_1 + \frac{1}{\epsilon} \tilde{t}_1 (-z_1 + z_1^{-1}) \right) \right],$$

где $\lambda_1 = z_1 + z_1^{-1}$, а z_1 — параметр. Как обычно, такое решение легко получается при помощи преобразования Дарбу из частного постоянного решения.

Мы ожидаем, что алгебро-геометрические квазипериодические решения также имеют хорошие свойства по отношению к этим потокам, но изучение этой проблемы еще не завершено. Ведется работа по дальнейшему обобщению на многокомпонентный случай.

Доказательства всех приведенных выше утверждений будут опубликованы позже [1].

Список литературы

- [1] *G. Carlet, B. Dubrovin, Y. Zhang.* Extended Toda hierarchy (to appear).
- [2] *M. Toda.* J. Phys. Soc. Japan. 1967. V. 23. P. 501; Progr. Theor. Phys. Suppl. 1970. № 45. P. 174.
- [3] *H. Flaschka.* Progr. Theor. Phys. 1974. V. 51. P. 703.
- [4] *Б. А. Дубровин, В. Б. Матвеев, С. П. Новиков.* УМН. 1976. Т. 31. № 1. С. 55; *E. Date, S. Tanaka.* Progr. Theor. Phys. 1976. V. 55. P. 457; Progr. Theor. Phys. Suppl. 1976. V. 59. P. 107; *И. М. Кривчев.* УМН. 1978. Т. 33. № 4. С. 215.
- [5] *E. Getzler.* The equivariant Toda lattice I. math.AG/0207025; The equivariant Toda lattice II. math.AG/0209110.
- [6] *K. Takasaki, T. Takebe.* Lett. Math. Phys. 1993. V. 28. № 3. P. 165.
- [7] *B. A. Kupersmidt.* Astérisque. 1985. V. 123. P. 1.
- [8] *F. Magri.* J. Math. Phys. 1978. V. 19. № 5. P. 1156.
- [9] *T. Eguchi, S.-K. Yang.* Mod. Phys. Lett. A. 1994. V. 9. P. 2893.
- [10] *B. Dubrovin.* Nucl. Phys. B. 1992. V. 379. P. 627.
- [11] *B. Dubrovin, Y. Zhang.* Normal forms of hierarchies of integrable PDEs, Frobenius manifolds and Gromov–Witten invariants. math.DG/0108160.
- [12] *Y. Zhang.* J. Geom. Phys. 2002. V. 40. P. 215; *E. Getzler.* The Toda conjecture. In: Symplectic Geometry and Mirror Symmetry. Proc. of the 4th KIAS Annual Int. Conf. (Seoul, South Korea, August 14–18, 2000). Eds. K. Fukaya, Y.-G. Oh, K. Ono, G. Tian. River Edge, N J: World Scientific, 2001. P. 51; math.AG/0108108.
- [13] *K. Ueno, K. Takasaki.* Toda lattice hierarchy. In: Group Representations and Systems of Differential Equations. Proc. of a Symp. (Tokyo, December 20–27, 1982). Adv. Stud. Pure Math. V. 4. Ed. K. Okamoto. Tokyo: Kinokuniya; Amsterdam: North-Holland, 1984. P. 1.