Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Х. Куевас, Ф. Палмеро, Х. Арчилла, Ф. Р. Ромеро, Взаимодействие движущихся локализованных осцилляций с локальной неоднородностью в нелинейных гамильтоновых решетках Клейна–Гордона, *ТМФ*, 2003, том 137, номер 1, 59–65

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf245>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 13:06:54

© 2003 г.

Х. Куевас*, Ф. Палмеро*,
Х. Ф. Р. Арчилла*, Ф. Р. Ромеро†

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВИЖУЩИХСЯ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ ОСЦИЛЛЯЦИЙ С ЛОКАЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ В НЕЛИНЕЙНЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ РЕШЕТКАХ КЛЕЙНА–ГОРДОНА

Рассмотрено взаимодействие движущихся локализованных осцилляций с локальной неоднородностью в дискретной нелинейной гамильтоновой системе. Выдвинуто предположение, что явление захвата возможно лишь при условии резонанса со статической нелинейной локализованной осцилляцией с центром в локальной неоднородности. Аналитические расчеты и численные данные согласуются с нашей гипотезой.

Ключевые слова: дискретные бризеры, мобильные бризеры, внутренние локализованные моды, примеси, неоднородность.

1. ВВЕДЕНИЕ

Взаимодействие нелинейных локализованных осцилляций с локальными неоднородностями системы является важной задачей, изучавшейся в рамках различных подходов. В частности, рассматривались рассеяние кинков и солитонов огибающей на локальных неоднородностях в одномерных атомных решетках с нелинейными взаимодействиями [1], взаимодействие между высокочастотными непрерывными бризерами и локальными неоднородностями в модели синус-Гордон [2], [3], рассеяние кинков в непрерывных моделях синус-Гордон и ϕ^4 [4] и в модели Френкеля–Конторовой [5], [6]. В работах [1] и [5] описаны солитоны, которые в зависимости от скорости могут отражаться от неоднородности или проходить сквозь нее, а в работах [2] и [4] было замечено, что при промежуточных скоростях возможен захват солитонов.

В последнее время много внимания уделяется локализованным осцилляциям в нелинейных дискретных системах (дискретным бризерам). На решетках Клейна–Гордона

*ETS Ingeniería Informática, Universidad de Sevilla, Avda Reina Mercedes s/n, 41012 Seville, Spain. E-mail: jcuevas@us.es; palmero@us.es; archilla@us.es

†Facultad de Física, Universidad de Sevilla, Avda Reina Mercedes s/n, 41012 Seville, Spain. E-mail: romero@cica.es

они возникают как точные решения динамических уравнений [7]. Кроме того, при определенных условиях такие локализованные осцилляции могут двигаться (обычно они называются *движущимися бризерами*) [8]–[12].

Взаимодействие движущегося дискретного бризера с локальной неоднородностью в цепочке Клейна–Гордона ранее рассматривалось Форином с соавторами [13] в приближении слабой нелинейности. Они установили, что возможны три варианта поведения: движущийся бризер проходит сквозь неоднородность, отражается или захватывается и превращается в накопитель энергии. Все эти эффекты связаны с резонансами с линейной локализованной модой.

В данной работе изучаются особенности взаимодействия движущихся дискретных бризеров с локальной неоднородностью в гамильтоновой осцилляторной цепочке Клейна–Гордона с сильной нелинейностью. Наше предположение состоит в том, что захват возможен лишь при наличии бризера с центром в локальной неоднородности, причем его частота должна быть близка к частоте движущегося бризера. Это условие гарантирует существование широкого диапазона параметров, при которых может произойти захват. Вместе с тем оно не является достаточным, поскольку захват не может произойти в том случае, когда хвосты движущегося бризера и линейной локализованной моды имеют различные типы вибрации. Мы выдвигаем гипотезу, что для того чтобы произошел захват, оба хвоста должны иметь один и тот же тип вибрации.

2. МОДЕЛЬ

Чтобы исследовать влияние локальной неоднородности на движение бризеров, рассмотрим простую модель, в которой могут существовать движущиеся бризеры, а именно цепочку Клейна–Гордона со взаимодействием притяжения между ближайшими соседями [8], [9]. Ее гамильтониан имеет вид

$$H = \sum_{n=1}^N \left(\frac{m_n}{2} \dot{u}_n^2 + V_n(u_n) + W_n(u_n, u_{n-1}, u_{n+1}) \right), \quad (1)$$

где u_n – смещение n -й частицы относительно ее равновесного положения, W_n – потенциал взаимодействия, а $V_n(u_n)$ – потенциал подложки в n -м узле. При введении локальной неоднородности динамические уравнения имеют два типа решений: линейные, соответствующие колебаниям малой амплитуды, и нелинейные, соответствующие внутренним локализованным модам дискретных бризеров.

2.1. Мягкий потенциал подложки. Прежде всего рассмотрим случай мягкого потенциала в узлах. В качестве V возьмем потенциал Морса $V_n(u) = D_n(e^{-u} - 1)^2$, где D_n – глубина потенциальной ямы в n -м узле. Далее рассмотрим линейный член взаимодействия $W_n(u_n, u_{n-1}, u_{n+1}) = C_n(2u_n - u_{n+1} - u_{n-1})$ и введем неоднородность, изменяя в единственном узле глубину потенциальной ямы $D_n = D_o(1 + \alpha\delta_{n,0})$, константу взаимодействия $C_n = C_o(1 + \beta\delta_{o,n})$ ($C > 0$) или массу частицы $m_n = m_o(1 + \gamma\delta_{o,n})$. При этом частицу, расположенную в узле $n = 0$, будем называть локальной неоднородностью, величина которой контролируется параметрами α , β или γ , принимающими значения в интервале $[-1, \infty)$. Эта модель оказалась весьма удобной для получения

движущихся бризеров [9], [10], [12] и широко использовалась в динамике ДНК [14]. Считаем $D_0 = 1/2$ и $m_0 = 1$.

Гамильтониан (1) приводит к динамическим уравнениям

$$F(\{u_n\}) \equiv m_n \ddot{u}_n + V'_n(u_n) + C_n(2u_n - u_{n+1} - u_{n-1}) = 0. \quad (2)$$

2.1.1. Линейные моды. Динамические уравнения можно линеаризовать, если амплитуды колебаний малы. Следовательно, линейные моды можно вычислить, предполагая, что локализованная мода имеет вид $u_n(t) = u_0 e^{i\omega_L t} r^n$ [13]. Имеется одна линейная локализованная мода и $N-1$ линейных расширенных мод.

В случае локальной неоднородности глубины потенциальной ямы расширенные моды имеют вид

$$\omega(q, \alpha) = \sqrt{\omega_0^2 + 4C \sin^2 \frac{q(\alpha)}{2}}, \quad (3)$$

где $q(\alpha)$ – волновой вектор расширенных мод (сложным образом зависящий от α), ω_0 – линейная частота (в нашем случае $\omega_0 = \sqrt{2D}$). Частота линейной локализованной моды имеет вид

$$\omega_L^2 = \omega_0^2 + 2C + \text{sgn}(\alpha) \sqrt{\alpha^2 \omega_0^4 + 4C^2}. \quad (4)$$

Знак r определяет тип вибрации линейной локализованной моды: если $r > 0$, то частицы в этой моде колеблются в фазе друг с другом (волновой вектор $q = 0$), а если $r < 0$, то, напротив, мода имеет зигзагообразный тип вибрации и волновой вектор $q = \pi$. Параметр r имеет вид

$$r = -\text{sgn}(\alpha) \frac{\alpha \omega_0^2 + \sqrt{4C^2 + \alpha^2 \omega_0^4}}{2C}. \quad (5)$$

Следовательно, α и r имеют противоположные знаки. Отсюда также следует, что $q \in (0, \pi]$ при $\alpha < 0$ и $q \in [0, \pi)$ при $\alpha > 0$ для расширенных мод.

При введении локальной неоднородности в параметр взаимодействия имеем следующую зависимость частоты линейной локализованной моды от параметра β :

$$\omega_L^2 = \begin{cases} \omega_0^2, & \beta < 0, \\ \frac{\beta+2}{4\beta} C (\sqrt{9\beta^2 + 20\beta + 4} - 2 + 3\beta), & \beta > 0, \end{cases} \quad (6)$$

и

$$r + \frac{3\beta + 2 - \sqrt{9\beta^2 + 20\beta + 4}}{2\beta}.$$

При $\beta < 0$ линейных локализованных мод нет, а при $\beta > 0$ они существуют, причем $q = \pi$.

В случае неоднородности массы находим

$$\omega_L^2 = \frac{\omega_0^2 - \text{sgn}(\gamma) \sqrt{(\gamma)^2 \omega_0^2 (\omega_0^2 + 4C) + 4C^2}}{m(1 - (\gamma)^2)}, \quad (7)$$

$$r = \frac{|\gamma|(\omega_0^2 + 2C) - \text{sgn}(\gamma) \sqrt{(\gamma)^2 \omega_0^2 (\omega_0^2 + 4C) + 4C^2}}{2C(|\gamma| - 1)}. \quad (8)$$

Параметры r и γ имеют одинаковый знак. Поэтому, если $\gamma < 0$, то для локализованной моды имеем $q = \pi$, а для расширенных мод $q \in [0, \pi)$; если $\gamma > 0$, то для локализованной моды имеем $q = 0$, а для расширенных мод $q \in (0, \pi]$.

Рис. 1. Различные режимы взаимодействия движущегося бризера с примесью, введенной как неоднородность глубины потенциальной ямы в случае мягкого потенциала подложки.

2.1.2. *Численные эксперименты.* Для исследования взаимодействия движущегося дискретного бризера с локальной неоднородностью системы мы выполнили некоторые численные эксперименты. Для получения стационарного бризера использовались обычные методы, основанные на антинепрерывном пределе [15]. Если изначально выбранный осциллятор соответствует локальной неоднородности, то получается стационарный бризер с центром в примеси. Он называется *примесным бризером*.

При определенных условиях полученный стационарный бризер можно привести в движение. Имеется систематический метод расчета движущихся решений [8], [9]; он заключается в том, что к скоростям стационарного бризера добавляют возмущение λ , коллинеарное направлению пиннинг-моды, и позволяют системе эволюционировать во времени. Пиннинг-мода – это антисимметричная линейная локализованная мода, возникающая среди линейных возмущений системы при достаточно сильном взаимодействии [10]. Возмущение в направлении пиннинг-моды нарушает трансляционную симметрию системы и заставляет бризер двигаться.

При наличии неоднородности глубины потенциальной ямы были найдены четыре различных режима, разделенных критическими значениями контрольного параметра (см. рис. 1).

1. *Барьер.* Неоднородность играет роль потенциального барьера. Когда движущийся бризер достигает примеси, он, вообще говоря, отражается, на короткое время возбуждая примесь.
2. *Возбуждение.* Неоднородность возбуждается, а бризер отражается. Энергия возбужденной неоднородности больше энергии примесного бризера и, следовательно, возбужденная примесь вибрирует с частотой, меньшей ω_b , поскольку потенциал в узлах является мягким.
3. *Захват.* Бризер захватывается неоднородностью. При приближении к неоднородности движущийся бризер захватывается, а его центр осциллирует между соседними узлами. Более того, захваченный бризер испускает большое количество фононного излучения и представляется хаотическим.
4. *Яма.* Неоднородность играет роль потенциальной ямы. Бризер ускоряется при приближении к неоднородности и тормозится после прохождения через локальную неоднородность.

Переходы между разными режимами несколько размыты: критические значения α невозможно определить точно. Более того, они слабо зависят от скорости бризера. Эти

режимы были обнаружены при разных значениях частоты бризера. При сильном взаимодействии фоновое излучение велико и может скрыть часть описанных эффектов.

Для объяснения части полученных результатов мы выполнили продолжение стационарного бризера с центром в локальной неоднородности, варьируя параметр α . При этом обнаружили две бифуркации: одна при $\alpha = \alpha_c > 0$, а другая при $\alpha = \alpha_{\text{res}} < 0$. Первая возникает из-за локализованной собственной моды Флоке, которая покидает единичный круг и приводит к затуханию бризера. Таким образом, при $\alpha > \alpha_c$ примесного бризера не существует. Во втором случае бризер ответвляется от нулевого решения при помощи бифуркации типа вилки в пространстве обратимых по времени решений частоты ω_b ¹⁾.

При $\alpha = \alpha_{\text{res}}$ частота линейной локализованной моды та же, что и частота примесного бризера с частотой движущегося бризера, т.е. $\omega_L = \omega_b$. Величину α_{res} можно найти из уравнения (4) как функцию ω_b и C :

$$\alpha_{\text{res}} = -\frac{\sqrt{(\omega_b^2 - \omega_0^2)(\omega_b^2 - \omega_0^2 - 4C)}}{\omega_0^2}. \quad (9)$$

Поэтому захват бризера невозможен при $\alpha > 0$. Вероятно, это указывает на то, что захват бризера может произойти лишь при $\alpha \in (\alpha_{\text{res}}, 0)$.

При $\alpha < 0$ имеется следующий сценарий для захваченного бризера. В этом случае для линейной локализованной моды $q = 0$, а все частицы примесного бризера вибрируют в фазе. Этот тип вибрации указывает на то, что примесный бризер ответвляется от плоских волн с $q = 0$ [16], т.е. от локализованной моды, и является единственной локализованной модой, существующей при возбуждении неоднородности при $\alpha > \alpha_{\text{res}}$. Поэтому бризер может возбудить локализованную моду при подходе движущегося бризера к неоднородности. В действительности мы успешно выполнили продолжение от примесного бризера к локализованной моде при постоянных значениях действия и α .

При $\alpha < \alpha_{\text{res}}$ захват бризера невозможен, и движущийся бризер всегда отражается. Кроме того, примесного бризера не существует.

При $\alpha > 0$ сценарий меняется. В этом случае для локализованной моды $q = \pi$, но узлы примесного бризера снова колеблются в фазе. Это означает, что примесный бризер не ответвляется от локализованной моды. Поэтому при $\alpha > 0$ имеются два различных возбуждения: (линейная) локализованная мода и (нелинейный) примесный бризер. Однако в действительности описывающие систему уравнения нелинейны, и, следовательно, линейные моды могут соответствовать только колебаниям малой амплитуды. В случае примесного бризера линейный режим соответствует хвостам бризера, а значит, при достижении узла с неоднородностью движущийся бризер возбуждает примесный бризер и хвосты локализованной моды. Но эта мода имеет зигзагообразный тип вибрации. Следовательно, возникает два различных линейных локализованных объекта: хвосты локализованной моды (колеблющиеся зигзагообразно) и хвосты примесного бризера (колеблющиеся в фазе).

¹⁾Заметим, что динамические уравнения (2) не соответствуют стандартной динамической системе $\dot{x} = f(x, t)$, для которой обычно рассматривают бифуркации типа вилки.

Рис. 2. Различные режимы взаимодействия движущегося бризера с примесью, введенной как неоднородность параметра взаимодействия в случае мягкого потенциала подложки.

Рис. 3. Различные режимы взаимодействия движущегося бризера с примесью, введенной как неоднородность массы в случае мягкого потенциала подложки.

В случае неоднородности, введенной в параметр взаимодействия, захват бризера возможен лишь при $\beta < 0$ (см. рис. 2). Численная проверка подтвердила этот результат и показала, что имеется единственное критическое значение параметра $\beta = \beta_1$.

Наконец, при введении неоднородности массы наблюдается поведение, качественно близкое случаю неоднородности глубины потенциальной ямы. Захват возможен, если существует примесный бризер с тем же типом вибрации, что и у локализованной линейной моды (см. рис. 3).

2.2. Жесткий потенциал подложки. Нами был рассмотрен жесткий потенциал подложки. Была изучена цепочка нелинейных осцилляторов с жестким потенциалом ϕ^4 в узлах и линейным взаимодействием. Гамильтониан в этом случае имеет вид

$$H = \sum_n \left(\frac{1}{2} \dot{u}_n^2 + \frac{1}{2} \omega_n^2 u_n^2 + \frac{1}{4} u_n^4 C \left(\frac{1}{2} (u_n - u_{n-1})^2 + \frac{1}{4} (u_n - u_{n-1})^4 \right) \right),$$

где $\omega_n^2 = \omega_0^2 (1 + \alpha \delta_{n,0})$.

Линейные моды в данном случае сходны с линейными модами в случае мягкого потенциала в узлах с той разницей, что тип вибрации примесного бризера меняется на противоположный. При численном анализе были найдены различные типы поведения; они показаны на рис. 4. Во всех случаях явление захвата наблюдается при $\alpha > 0$, а примесный бризер имеет нулевую амплитуду при $\alpha = \alpha_{\text{res}}$.

3. ГИПОТЕЗА ЗАХВАТА

Проведенные численные эксперименты позволяют предположить, что существование примесного бризера связано с явлением захвата и типом вибрации линейной локализованной моды. Таким образом, мы можем сформулировать следующую гипотезу.

Рис. 4. Различные режимы взаимодействия движущегося бризера с примесью, введенной как неоднородность глубины потенциальной ямы в случае жесткого потенциала подложки.

Существование примесного бризера при заданном значении α является необходимым условием существования захваченных бризеров. Но если существует линейная локализованная мода с типом вибрации, отличным от типа вибрации примесного бризера, то захват бризера невозможен.

4. ВЫВОДЫ

Было изучено взаимодействие движущихся дискретных бризеров с локальной неоднородностью в цепочке Клейна–Гордона с сильной нелинейностью. Захват происходит при условии, что выполнена *гипотеза захвата*: должен существовать примесный бризер с частотой, близкой к частоте движущегося бризера. Кроме того, не должно быть (линейных) локализованных мод с типом вибрации, отличным от типа вибрации примесного бризера.

Список литературы

- [1] Q. Li, St. Pnevmatikos, E. N. Economou, C. M. Soukoulis. Phys. Rev. B. 1988. V. 37. P. 3534.
- [2] B. A. Malomed. Phys. D. 1985. V. 15. P. 374; P. 385.
- [3] Z. Fei. Phys. Rev. E. 1998. V. 58. P. 2558.
- [4] Z. Fei, Yu. S. Kivshar, L. Vázquez. Phys. Rev. A. 1992. V. 45. P. 6019; 1992. V. 46. P. 5214.
- [5] O. M. Braun, Yu. S. Kivshar. Phys. Rev. B. 1991. V. 43. P. 1060.
- [6] O. M. Braun, Yu. S. Kivshar. Phys. Rep. 1998. V. 306. P. 1.
- [7] R. S. MacKay, S. Aubry. Nonlinearity. 1994. V. 7. P. 1623; S. Flach, C. R. Willis. Phys. Rep. 1998. V. 295. P. 181; S. Aubry. Phys. D. 1997. V. 103. P. 201.
- [8] D. Chen, S. Aubry, G. P. Tsironis. Phys. Rev. Lett. 1996. V. 77. P. 4776.
- [9] S. Aubry, T. Cretegny. Phys. D. 1998. V. 119. P. 34.
- [10] J. Cuevas, J. F. R. Archilla, Yu. B. Gaididei, F. R. Romero. Phys. D. 2002. V. 163. P. 106.
- [11] M. Ibañez, J. M. Sancho, G. P. Tsironis. Phys. Rev. E. 2002. V. 65. P. 041902.
- [12] J. Cuevas, F. Palmero, J. F. R. Archilla, F. R. Romero. Phys. Lett. A. 2002. V. 299. P. 221.
- [13] K. Forinash, M. Peyrard, B. A. Malomed. Phys. Rev. E. 1994. V. 49. P. 3400.
- [14] M. Peyrard, A. R. Bishop. Phys. Rev. Lett. 1989. V. 62. P. 2755.
- [15] J. L. Marín, S. Aubry. Nonlinearity. 1996. V. 9. P. 1501.
- [16] S. Flach. Phys. D. 1996. V. 91. P. 223.