Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Г. Эстевес, Ч. Чу, Расширенные группы вращений и масштабных преобразований для нелинейных эволюционных уравнений, *ТМФ*, 2003, том 137, номер 1, 74–86

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf246>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 13:20:38

РАСШИРЕННЫЕ ГРУППЫ ВРАЩЕНИЙ И МАСШТАБНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

(1+1)-мерное нелинейное эволюционное уравнение является инвариантным относительно группы вращений, если оно инвариантно относительно инфинитезимального генератора $V = x\partial_u - u\partial_x$. В этом случае решение удовлетворяет условию $u_x = -x/u$. Для уравнений, которые не допускают группу вращений, определяется расширение этой группы. Соответствующее точное решение может быть построено с помощью инвариантного множества $R_0 = \{u : u_x = xF(u)\}$ контактных дифференциальных структур первого порядка, где F – подлежащая определению гладкая функция. Показано, что временной эволюцией на множестве R_0 управляет динамическая система первого порядка. Вводится расширение группы масштабных преобразований, характеризующее инвариантным множеством $\tilde{S}_0$, которое зависит от двух констант ϵ и $n \neq 1$. При $\epsilon = 0$ это множество превращается в инвариантное множество S_0 , введенное Галактионовым. Вводится также обобщение обеих групп (вращений и масштабных преобразований), которое характеризуется инвариантным множеством E_0 с параметрами a и b . При $a = 0$ или $b = 0$ это множество превращается в множество R_0 или S_0 , соответственно. Указанные подходы используются для получения точных решений и редукций динамических систем нелинейных эволюционных уравнений.

Ключевые слова: дифференциальные эволюционные уравнения, группа вращений, группа масштабных преобразований.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим (1 + 1)-мерное нелинейное эволюционное уравнение k -го порядка вида

$$u_t = E(x, u, u_1, \dots, u_k), \quad (1)$$

где $u_t = \partial u / \partial t$ – производная по времени, а через u_i обозначены частные производные $\partial^i u / \partial x^i$ по пространственной переменной x порядка i . Функция E является гладкой функцией указанных переменных. Решения уравнения (1) предполагаются гладкими.

*Area de Física Teórica, Facultad de Ciencias, Universidad de Salamanca, 37008 Salamanca, Spain. E-mail: pilar@gugu.usal.es

†Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an, 710069 China

Для построения точных решений нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП) разработано несколько методов, связанных с теорией групп симметрий. Эти методы включают классический метод групп симметрий [1], неклассический метод [2], обобщенный условно-симметричный подход [3], прямой метод [4], метод дифференциальных связей [5] и подход, основанный на знаковой инвариантности и инвариантных подпространствах [6], [7]. В некотором смысле эти подходы связаны между собой.

Галактионов предложил [8] нелинейное расширение обычной группы масштабных преобразований, которое характеризуется инвариантным множеством $S_0 = \{u: u_x = F(u)/x\}$. Подход был применен для построения точных решений уравнений вида (1). Этот подход связан с подходом, основанным на знаковой инвариантности и инвариантных подпространствах, а также с обобщенным условно-симметричным подходом. В конце работы [8] было указано на важность задачи о построении нелинейных расширений для других групп, не являющихся группами масштабных преобразований.

Целью настоящей работы является введение некоторых новых расширений группы вращений и группы масштабных преобразований. В разделе 2 мы предлагаем нелинейное расширение обычной группы вращений в $\mathbb{R}^2$, которое характеризуется инвариантным множеством $R_0 = \{u(x): u_x = xF(u)\}$. В разделе 3 мы вводим новое нелинейное расширение группы масштабных преобразований, которое характеризуется инвариантным множеством

$$\tilde{S}_0 = \left\{ u: u_x = F(u)/x + \epsilon F \exp \left[(n-1) \int_0^u \frac{1}{F(z)} dz \right] \right\},$$

где $\epsilon \neq 0$ и $n \neq 1$ – некоторые константы. При $\epsilon = 0$ это множество превращается в множество S_0 , введенное Галактионовым [8], [9]. Наконец, в разделе 4 мы вводим расширение для обеих групп (S_0 и R_0), которое характеризуется инвариантным множеством $E_0 = \{u(x): u_x = f(x)F(u), f' = af^2 + b\}$. Раздел 5 содержит заключительные замечания.

2. РАСШИРЕННАЯ ГРУППА ВРАЩЕНИЙ

2.1. Группа вращений. Уравнение (1) инвариантно относительно группы вращений, если оно инвариантно относительно группы Ли преобразований $x^* = x \cos \theta + u \sin \theta$, $u^* = -x \sin \theta + u \cos \theta$. Это означает, что уравнение допускает инфинитезимальный генератор

$$V_0 = x \frac{\partial}{\partial u} - u \frac{\partial}{\partial x}.$$

Если уравнение допускает группу вращений, то соответствующее решение может быть получено с помощью совместного решения уравнения $u_x = -x/u$ и уравнения (1). Действительно, уравнение $u_x = -x/u$ является условием инвариантности поверхности по отношению к группе вращений. Другими словами, множество $\{u: u_x = -x/u\}$ инвариантно относительно группы вращений. Используя указанный факт, мы можем получить точное решение, которое имеет вид $u = (g(t) - x^2)^{1/2}$.

2.2. Алгебра дифференцирований. Начнем наше рассмотрение инвариантных множеств и точных решений в случае, когда уравнение (1) не допускает группы вращений, с введения множества функций

$$R_0 = \{u: u_x = xF(u)\}, \quad (2)$$

где $F(u)$ – функция класса C^∞ , подлежащая определению из следующего условия инвариантности:

$$u(x, 0) \in R_0 \Rightarrow u(x, t) \in R_0 \quad \text{при } t \in (0, 1].$$

Структура этого многообразия была использована для построения знаковых инвариантов первого порядка для радиально-симметричных параболических уравнений (см. с. 1605 в работе [6]). При $F = -1/u$ контактная структура характеризует группу вращений.

Выпишем в общем случае, когда

$$u_x = xF(u), \quad (3)$$

выражения для нескольких используемых ниже производных:

$$\begin{aligned} u_{xx} &= x^2 F F' + F, \\ u_{xxx} &= x^3 F (F F')' + 3x F F', \\ u_{xxxx} &= x^4 F (F (F F')')' + 6x^2 F (F F')' + 3F F', \end{aligned} \quad (4)$$

где штрих означает дифференцирование по переменной u . Теперь применим наш подход к нескольким типичным нелинейным эволюционным уравнениям.

2.3. Квазилинейные уравнения теплопроводности. Рассмотрим общее уравнение реакции-диффузии параболического типа

$$u_t = D(u)u_{xx} + Q(u)u_x^2 + G(u) \equiv A_1(u), \quad (5)$$

где $D \geq 0$, Q и G – гладкие функции. При подстановке (4) в (5) правая часть уравнения (5) принимает вид

$$A_1(u) = x^2 (D F F' + Q F^2) + D F + G.$$

Для $u \in R_0$ интегрирование равенства $u_x = xF(u)$ показывает, что решение дается явным выражением

$$\int^u \frac{1}{F(z)} dz = \frac{1}{2} x^2 + g(t), \quad (6)$$

функцию $g(t)$ в котором нужно определить. Из (6) следует, что

$$u_t = g'(t)F(u). \quad (7)$$

Поэтому уравнение (5) эквивалентно уравнению

$$g'(t) = x^2(DF' + QF) + D + \frac{G}{F}.$$

Поскольку левая часть последнего уравнения не зависит от переменной x , то, дифференцируя его по x , получаем

$$x^3 F(DF' + QF)' + x \left[F \left(D + \frac{G}{F} \right)' + 2(DF' + QF) \right] \equiv 0,$$

откуда следует, что функции D , F и G удовлетворяют системе

$$\begin{aligned} DF' + QF &= c, \\ F \left(D + \frac{G}{F} \right)' &= -2c \implies D + \frac{G}{F} = d - 2c \int^u \frac{1}{F(z)} dz, \end{aligned} \quad (8)$$

где c и d — произвольные константы. Следовательно, g удовлетворяет уравнению

$$g' = d - 2cg, \quad (9)$$

общее решение которого есть

$$g = \frac{d}{2c} + c_0 e^{-2ct}, \quad (10)$$

где c_0 — другая произвольная константа.

Система (8) легко может быть решена, если известны две из четырех входящих в нее функций. Рассмотрим несколько частных случаев.

СЛУЧАЙ 1. $F = -1/u$, $D = u^m$. В этом случае инвариантное множество R_0 характеризует группу вращений, т.е. уравнения инвариантны относительно этой группы. Решая систему (8), получаем

$$Q = -cu + u^{m-1}, \quad G = u^{m-1} - cu - du^{-1}.$$

Таким образом, показано, что уравнение

$$u_t = u^m u_{xx} + (u^{m-1} - cu)u_x^2 + u^{m-1} - cu - du^{-1}$$

допускает группу вращений и имеет точное решение

$$u = \left(-\frac{d}{c} - 2c_0 e^{-2ct} - x^2 \right)^{1/2}. \quad (11)$$

СЛУЧАЙ 2. $F = u^k$, $D = u^m$, $k \neq -1$. В этом случае $Q = cu^{-k} - ku^{m-1}$ и функция G удовлетворяет условию

$$G = du^k - u^{m+k} - 2cu^k \int^u \frac{1}{F(z)} dz.$$

Имеются две различные возможности: $k = 1$ и $k \neq 1$.

Случай 2а. $k \neq 1$. Мы получаем равенство

$$G = du^k - u^{k+m} - \frac{2c}{1-k}u,$$

которое означает, что уравнение

$$u_t = u^m u_{xx} + (cu^{-k} - ku^{m-1})u_x^2 + du^k - u^{k+m} - \frac{2c}{1-k}u$$

имеет решение

$$u = \left[\frac{1-k}{2} \left(x^2 + \frac{d}{c} + 2c_0 e^{-2ct} \right) \right]^{1/(1-k)}. \quad (12)$$

Случай 2б. $k = 1$. Имеем равенство

$$G = du - u^{m+1} - 2cu \ln u.$$

Уравнение

$$u_t = u^m u_{xx} + (cu^{-1} - u^{m-1})u_x^2 + du - u^{m+1} - 2cu \ln u$$

имеет точное решение

$$u = \exp \left[\frac{x^2}{2} + \frac{d}{2c} + c_0 e^{-2ct} \right]. \quad (13)$$

СЛУЧАЙ 3. $F = u^k$, $D = e^u$. В этом случае

$$Q = cu^{-k} - ku^{-1}e^u, \quad G = du^k - u^k e - 2cu^k \int^u \frac{1}{F(z)} dz.$$

Возникают две возможности.

Случай 3а. $k \neq 1$. Здесь функция G задается выражением

$$G = du^k - u^k e^u + \frac{2c}{k-1}u.$$

Уравнение

$$u_t = e^u u_{xx} + (cu^{-k} - ku^{-1}e^u)u_x^2 + du^k - u^k e^u + \frac{2c}{k-1}u$$

имеет решение (12).

Случай 3б. $k = 1$. Здесь функция G имеет вид

$$G = du - ue^u - 2cu \ln u.$$

Уравнение

$$u_t = e^u u_{xx} + (cu^{-k} - ku^{-1}e^u)u_x^2 + du - ue^u - 2cu \ln u$$

имеет решение (13).

СЛУЧАЙ 4. $F = u^k$, $D = 1/(1 + u^2)$. В этом случае

$$Q = cu^{-k} - ku^{-1}(1 + u^2)^{-1}, \quad G = du^k - \frac{u^k}{1 + u^2} - 2cu^k \int^u \frac{1}{F(z)} dz.$$

Имеются две возможности.

Случай 4а. $k \neq 1$. Функция G имеет вид

$$G = du^k - (1 + u^2)^{-1}u^k - \frac{2c}{1 - k}u.$$

Случай 4б. $k = 1$. Функция G имеет вид

$$G = du - u(1 + u^2)^{-1} - 2cu \ln u.$$

Поэтому решения уравнений

$$u_t = \frac{1}{1 + u^2}u_{xx} + (cu^{-k} - ku^{-1}(1 + u^2)^{-1})u_x^2 + du^k - (1 + u^2)^{-1}u^k - \frac{2c}{1 - k}u,$$

$$u_t = \frac{1}{1 + u^2}u_{xx} + (cu^{-1} - u^{-1}(1 + u^2)^{-1})u_x^2 + du - u(1 + u^2)^{-1} - 2cu \ln u$$

даются соответственно формулами (12) и (13).

3. РАСШИРЕННАЯ ГРУППА МАСШТАБНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

3.1. Инвариантное множество. Группа Ли масштабных преобразований

$$x^* = e^\epsilon x, \quad t^* = e^{\mu\epsilon} t,$$

где ϵ – параметр, имеет инфинитезимальный генератор

$$X = x \frac{\partial}{\partial x} + \mu t \frac{\partial}{\partial t}.$$

Если функция E в уравнении (1) является однородной, т.е. удовлетворяет условию

$$E\left(sx, u, \frac{1}{s}u_1, \dots, \frac{1}{s^m}u_m\right) = \left(\frac{1}{s}\right)^\mu A(x, u, u_1, \dots, u_m),$$

то уравнение (1) допускает самоподобные решения

$$u = \theta(\xi), \quad \xi = \frac{x}{t^{1/\mu}}, \quad (14)$$

и ДУЧП сводится к ОДУ на функцию θ

$$E(\xi, \theta, \theta', \dots, \theta^m) + \frac{1}{\mu}\xi\theta' = 0.$$

Галактионов предложил [8], [9] интересное и естественное обобщение группы масштабных преобразований. Он рассмотрел уравнение на инвариантном множестве $S_0 = \{u(x) : u_x = F(u)/x\}$, где F — функция класса C^∞ , подлежащая определению из следующего условия инвариантности:

$$u(\cdot, 0) \in S_0 \Rightarrow u(\cdot, t) \in S_0 \quad \text{при } t \in (0, 1].$$

Легко видеть, что контактная структура уравнения

$$u_x = \frac{1}{x}F(u)$$

включает масштабный инвариант (14).

Для уравнений, не обладающих масштабной инвариантностью, введем следующее инвариантное множество

$$S_1 = \left\{ u \in C^\infty, u_x = \frac{s}{x}F(u) + \epsilon F(u) \exp \left[(n-1) \int^u \frac{1}{F(z)} dz \right] \right\}, \quad (15)$$

где ϵ , s и $n \neq 1$ — некоторые константы. При $\epsilon = 0$ множество S_1 превращается в инвариантное множество S_0 . Далее для простоты мы рассматриваем только случай $F = u$, т.е. инвариантное множество принимает вид

$$S_2 = \left\{ u \in C^\infty, u_x = \frac{s}{x}u + u^n \right\}, \quad (16)$$

где константа ϵ выбрана равной единице без ограничения общности. Для $u \in S_2$ имеют место формулы

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{s}{x}u + u^n, \\ u_{xx} &= \frac{1}{x^2}(s^2 - s)u + \frac{1}{x}s(n+1)u^n + nu^{2n-1}, \\ u_{xxx} &= \frac{1}{x^3}s_1u + \frac{1}{x^2}s_2u^n + \frac{1}{x}s_3u^{2n-1} + s_4u^{3n-2}, \\ u_{xxxx} &= \frac{1}{x^4}l_1u + \frac{1}{x^3}l_2u^n + \frac{1}{x^2}l_3u^{2n-1} + \frac{1}{x}l_4u^{3n-2} + l_5u^{4n-3}, \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} s_1 &= (s^2 - s)(s - 2), & s_2 &= (n^2 + n + 1)s^2 - (n + 2)s, & s_3 &= 3n^2s, \\ s_4 &= n(2n - 1), & l_1 &= (s - 3)s_1, & l_2 &= s_1 + (ns - 2)s_2, \\ l_3 &= ns_2 + [(2n - 1)s - 1]s_3, & l_4 &= (2n - 1)s_3 + (3n - 2)ss_4, \\ l_5 &= (3n - 2)s_4. \end{aligned}$$

Решение уравнения (1) в инвариантном множестве S_2 дается выражением

$$u = \left[-\frac{(n-1)}{s(n-1)+1}x + g(t)x^{s(1-n)} \right]^{1/(1-n)}, \quad (18)$$

в котором функция $g(t)$ подлежит определению. Решение такого рода возникает в физических ситуациях, например такой вид имеет специальное “дипольное” решение [10]. Далее мы рассмотрим некоторые применения инвариантного множества S_2 для уравнения (1) и получим точные решения для некоторых параболических и КдФ-подобных уравнений.

3.2. Квазилинейные уравнения теплопроводности. Для квазилинейного уравнения теплопроводности вида (5) можно воспользоваться правилами дифференцирования и вычислить

$$\begin{aligned} A_1(u) = & \frac{1}{x^2}[(s^2 - s)uD + s^2u^2Q] + \frac{1}{x}[(n+1)su^nD + 2su^{n+1}Q] + \\ & + nu^{2n-1}D + u^{2n}Q + G(u) \end{aligned}$$

на множестве S_2 . Из (18) следует

$$u_t = \frac{1}{1-n}x^{-a}g'(t)u^n,$$

где $a = s(n-1)$. Поэтому $g'(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-n}g'(t) = & x^{a-2}[(s^2 - s)u^{1-n}D + s^2u^{2-n}Q] + \\ & + x^{a-1}[(n+1)sD + 2suQ] + x^a[nu^{n-1}D + u^nQ + u^{-n}G] \equiv \\ \equiv & x^{a-2}D_1 + x^{a-1}D_2 + x^aD_3. \end{aligned} \quad (19)$$

Поскольку левая часть этого уравнения не зависит от переменной x , то дифференцирование по x дает

$$\begin{aligned} x^{a-3}[suD'_1 + (a-2)D_1] + x^{a-2}[u^nD'_1 + suD'_2 + (a-1)D_2] + \\ + x^{a-1}[u^nD'_2 + suD'_3 + aD_3] + x^au^nD'_3 = 0, \end{aligned}$$

откуда получаем

$$suD'_1 + (a-2)D_1 = 0, \quad (20)$$

$$u^nD'_1 + suD'_2 + (a-1)D_2 = 0, \quad (21)$$

$$u^nD'_2 + suD'_3 + aD_3 = 0, \quad (22)$$

$$D'_3 = 0. \quad (23)$$

Интегрируя уравнения (21)–(23), получаем

$$\begin{aligned} D_3 &= c_1, \\ D_2 &= \frac{a}{n-1} c_1 u^{1-n} + c_2, \\ D_1 &= -\frac{a}{2(n-1)^2} c_1 u^{2-2n} + \frac{a-1}{n-1} c_2 u^{1-n} + c_3, \end{aligned}$$

где c_i , $i = 1, 2, 3$, – константы интегрирования. Подстановка этих выражений для D_1 , D_2 и D_3 в (20) приводит к равенствам

$$\begin{aligned} (a-2)c_3 &= 0, \\ (a-1)c_2 &= 0, \\ (a+2)c_1 &= 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Случай $a = -2$ дает тривиальное решение $D = Q = G = 0$. Поэтому возникают две возможности.

СЛУЧАЙ 1. $a = 1$, $c_3 = c_1 = 0$, $c_2 \neq 0$. В этом случае D , Q и G удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} (s^2 - s)u^{1-n}D + s^2u^{2-n}Q &= 0, \\ (n+1)sD + 2suQ &= c_2, \\ nu^{n-1}D + u^nQ + u^{-n}G &= 0, \end{aligned}$$

которая имеет решение

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{3}c_2, \\ Q &= \frac{n-2}{3u}c_2, \\ G &= -\frac{2(n-1)u^{2n-1}}{3}c_2. \end{aligned}$$

При этом функция $g(t)$ удовлетворяет уравнению

$$g' = (1-n)c_2,$$

откуда

$$g(t) = (1-n)c_2(t-t_0).$$

Это означает, что уравнение

$$u_t = \frac{c_2}{3} \left[u_{xx} + (n-2)\frac{u_x^2}{u} - 2(n-1)u^{2n-1} \right]$$

имеет решение

$$u = \left[(1-n) \left(\frac{x}{2} + c_2 \frac{t-t_0}{x} \right) \right]^{1/(1-n)}. \tag{25}$$

СЛУЧАЙ 2. $a = 2$, $c_1 = c_2 = 0$, $c_3 \neq 0$. В этом случае D , Q и G удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned}(s^2 - s)u^{1-n}D + s^2u^{2-n}Q &= c_3, \\ (n+1)sD + 2suQ &= 0, \\ nu^{n-1}D + u^nQ + u^{-n}G &= 0,\end{aligned}$$

которая имеет решение

$$\begin{aligned}D &= -\frac{n-1}{4}u^{n-1}c_3, \\ Q &= \frac{n^2-1}{8}u^{n-2}c_3, \\ G &= \frac{(n-1)^2}{8}u^{3n-2}c_3.\end{aligned}$$

При этом функция $g(t)$ дается выражением

$$g = (1-n)c_3(t-t_0).$$

Поэтому решение уравнения

$$u_t = \frac{c_3(n-1)}{4}u^{n-1} \left[-u_{xx} + \frac{(n+1)}{2} \frac{u_x^2}{u} + \frac{(n-1)}{2} u^{2n-1} \right]$$

имеет вид

$$u = \left[(1-n) \left(\frac{x}{3} + c_3 \frac{t-t_0}{x^2} \right) \right]^{1/(1-n)}. \quad (26)$$

4. РАСШИРЕННАЯ ГРУППА МАСШТАБНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ И ВРАЩЕНИЙ

В этом разделе мы предлагаем расширение для обеих групп – расширенной группы масштабных преобразований (S_0) и группы вращений (R_0), которое характеризуется инвариантным множеством

$$E_0 = \{u: u_x = f(x)F(u)\}, \quad (27)$$

где $f(x)$ удовлетворяет условию

$$f_x = af^2 + b. \quad (28)$$

Поэтому

$$f = \frac{\sqrt{ab} \operatorname{tg}(\sqrt{ab}(x+x_0))}{a} \quad \text{при } ab > 0$$

или

$$f = \frac{\sqrt{-ab} \operatorname{cth}(\sqrt{-ab}(x + x_0))}{a},$$

$$f = -\frac{\sqrt{-ab} \operatorname{th}(\sqrt{-ab}(x + x_0))}{a} \quad \text{при } ab < 0,$$

где $a, b \neq 0$ – константы. Заметим, что при $a = 0$ или $b = 0$ инвариантное множество E_0 превращается в множество R_0 или S_0 , соответственно. Поэтому инвариантное множество E_0 может рассматриваться как обобщение множеств S_0 и R_0 . В инвариантном множестве E_0 имеют место формулы

$$\begin{aligned} u_x &= f(x)F(u), \\ u_{xx} &= f^2(FF' + aF) + bF, \\ u_{xxx} &= f^3[F(FF' + aF)' + 2aF(F' + a)] + bfF(3F' + 2a), \\ u_{xxxx} &= f^4\{F[F(FF' + aF)' + 2aF(F' + a)]' + 3aF[(FF' + aF)' + 2a(F' + a)]\} + \\ &+ f^2\{3b[F(FF' + aF)' + 2aF(F' + a)] + bF(3FF' + 2aF)'\} + \\ &+ abF(3F' + 2a)\} + b^2F(3F' + 2a). \end{aligned} \quad (29)$$

В инвариантном множестве E_0 решение имеет вид

$$\int^u \frac{ds}{F(s)} = -\frac{1}{a} \ln |\cos(\sqrt{ab}(x + x_0))| + g(t) \quad \text{при } ab > 0 \quad (30)$$

или

$$\begin{aligned} \int^u \frac{ds}{F(s)} &= -\frac{1}{a} \ln |\operatorname{sh}(\sqrt{-ab}(x + x_0))| + g(t) \quad \text{при } ab < 0, \\ \int^u \frac{ds}{F(s)} &= -\frac{1}{a} \ln |\operatorname{ch}(\sqrt{-ab}(x + x_0))| + g(t) \quad \text{при } ab < 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Используем теперь приведенные выше формулы для построения точных решений нелинейных эволюционных уравнений.

Квазилинейные уравнения теплопроводности. Рассмотрим квазилинейное уравнение теплопроводности. Подставляя (29) в (5), имеем

$$g'(t) = f^2(DF' + QF + aD) + \frac{G}{F} + bD. \quad (32)$$

Левая часть этой формулы не зависит от переменной x . Поэтому имеем

$$\begin{aligned} (DF' + QF + aD)'F + 2a(DF' + QF + aD) &= 0, \\ \left(\frac{G}{F} + bD\right)'F + 2b(DF' + QF + aD) &= 0. \end{aligned}$$

Интегрирование дает

$$\begin{aligned} DF' + QF + aD &= c_0 \exp \left[-2a \int^u \frac{ds}{F(s)} \right], \\ \frac{G}{F} + bD &= \frac{bc_0}{a} \exp \left[-2a \int^u \frac{ds}{F(s)} \right] + c_1, \end{aligned}$$

где c_0 и c_1 — произвольные константы. Следовательно, функция $g(t)$ удовлетворяет уравнению

$$g' = c_1 + \frac{b}{a} c_0 e^{-2ag} \implies g = \frac{1}{2a} \ln \left[\frac{bc_0 (e^{2ac_1(t+t_0)} - 1)}{ac_1} \right].$$

В частности, мы обнаруживаем, что уравнение

$$u_t = u_{xx} + G(u)$$

допускает решения (30), (31), когда функция F удовлетворяет уравнению

$$FF'' + 2a(F' + a) = 0$$

и функция $G(u)$ задается выражением

$$G = -2bF \ln F - 2abF \int^u \frac{ds}{F(s)} + cF,$$

где c — некоторая константа.

ЗАМЕЧАНИЕ. Данный подход может быть также использован для уравнений с зависящими от x коэффициентами. Например, уравнение

$$u_t = u_{xx} + X(x)G(u)$$

также допускает решения (30), (31), где функции F , G и X удовлетворяют системе

$$\begin{aligned} F \left(F' + \alpha \frac{G}{F} \right)' + 2a \left(F' + a + \alpha \frac{G}{F} \right) &= 0, \\ \beta \left(\frac{G}{F} \right)' F + 2b \left(F' + \alpha \frac{G}{F} + a \right) &= 0, \\ X(x) &= \alpha f^2 + \beta, \end{aligned}$$

в которой α и β — некоторые константы.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы показали, что группа вращений допускает “нелинейное” расширение, которое характеризуется инвариантным множеством контактных дифференциальных структур первого порядка. Такое расширение аналогично “нелинейному” расширению групп масштабных преобразований. Это расширение было использовано для построения точных решений некоторых нелинейных эволюционных уравнений второго и четвертого порядков, не допускающих группы вращений. Мы предложили более общее “нелинейное” расширение группы масштабных преобразований, которое также характеризуется инвариантным множеством контактных дифференциальных структур первого порядка с неоднородным членом. В том случае, когда неоднородный член равен нулю, наше множество превращается в инвариантное множество, введенное в работе [8]. Мы ввели также дальнейшее расширение для обеих групп – расширенной группы масштабных преобразований (S_0) и группы вращений (R_0). Такие подходы были затем использованы для получения некоторых точных решений нелинейных эволюционных уравнений, включая уравнения типа КдФ.

Список литературы

- [1] *G. W. Bluman, S. Kumei.* Symmetries and Differential Equations. New York: Springer, 1989; *P. Olver.* Applications of Lie Groups to Differential Equations. New York: Springer, 1993.
- [2] *G. W. Bluman, J. D. Cole.* J. Math. Mech. 1969. V. 18. P. 1025–1042; *P. A. Clarkson, E. L. Mansfield.* Phys. D. 1993. V. 70. P. 250–288; *P. A. Clarkson.* Chaos Solitons Fractals. 1995. V. 5. P. 2261–2301; *D. J. Arrigo, P. Broadbridge, J. M. Hill.* IMA J. Appl. Math. 1994. V. 52. P. 1–24; *P. G. Estevez.* J. Phys. A. 1994. V. 27. P. 2113–2127; *P. G. Estevez, P. R. Gordoa.* Stud. Appl. Math. 1995. V. 95. P. 73–113; *M. C. Nucci.* Phys. D. 1994. V. 7. P. 124–134; *E. Pucci.* J. Phys. A. 1992. V. 25. P. 2631–2640.
- [3] *A. S. Fokas, Q. M. Liu.* Phys. Rev. Lett. 1994. V. 72. P. 3293–3296; *R. Z. Zhdanov.* J. Phys. A. 1995. V. 28. P. 3841–3850; *C. Z. Qu.* Stud. Appl. Math. 1997. V. 99. P. 107–136; *IMA J. Appl. Math.* 1999. V. 62. P. 283–302; *Nonlinear Anal.* 2000. V. 42. P. 301–327; *C. Z. Qu, S. L. Zhang, R. C. Liu.* Phys. D. 2000. V. 144. P. 97–123.
- [4] *P. A. Clarkson, M. D. Kruskal.* J. Math. Phys. 1989. V. 30. P. 2201–2213; *P. A. Clarkson.* European J. Appl. Math. 1990. V. 1. P. 279–300; *S. Y. Lou.* Phys. Lett. A. 1990. V. 151. P. 133–135; *P. G. Estevez.* Phys. Lett. A. 1992. V. 171. P. 259–261.
- [5] *P. J. Olver, P. Rosenau.* Phys. Lett. A. 1986. V. 114. P. 107–112; *SIAM J. Appl. Math.* 1987. V. 47. P. 263–275.
- [6] *V. A. Galaktionov.* Nonlinear Anal. 1994. V. 23. P. 1595–1621.
- [7] *V. A. Galaktionov.* Proc. Roy. Soc. Edinburgh A. 1995. V. 125. P. 225–246; *V. A. Galaktionov, S. A. Posashkov.* Phys. D. 1996. V. 99. P. 217–236.
- [8] *V. A. Galaktionov.* Groups of scalings and invariant sets for higher-order nonlinear evolution equations. Differ. Integral Eq. (to appear).
- [9] *V. A. Galaktionov.* Ordered invariant sets for nonlinear evolution equations of KdV-type. Comput. Math. Math. Phys. (to appear).
- [10] *J. R. King.* Phys. D. 1993. V. 63. P. 35–65.