Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Д. Гриффитс, Р. Гримшоу, К. Р. Хуснутдинова, Влияние модуляционной неустойчивости на обмен энергией в связанных уравнениях синус-Гордон, *ТМФ*, 2003, том 137, номер 1, 108–120

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf249>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 03:37:55

© 2003 г. С. Д. Гриффитс*, Р. Г. Дж. Гримшоу*,
К. Р. Хуснутдинова*,†

ВЛИЯНИЕ МОДУЛЯЦИОННОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ НА ОБМЕН ЭНЕРГИЕЙ В СВЯЗАННЫХ УРАВНЕНИЯХ СИНУС-ГОРДОН

Рассматривается двухкомпонентная система связанных уравнений типа синус-Гордон. Частные решения этой системы задают обобщение на непрерывный случай процесса с периодическим обменом энергией, имеющего место в системе связанных маятников. Слабонелинейные решения, которые описывают процесс периодического обмена энергией, происходящего между волнами, распространяющимися в двух компонентах, задаются в зависимости от масштаба пространственного изменения амплитуд либо двумя нелокально связанными нелинейными уравнениями Шредингера, в которых члены, отвечающие за перенос масс, различны ввиду различия между групповыми скоростями, либо моделью, оказывающейся бездисперсионной в главном порядке. С помощью асимптотического анализа и численных экспериментов удастся показать, что эффекты дисперсии оказывают существенное влияние на структуру указанных решений и приводят к модуляционной неустойчивости и образованию локализованных структур, но тем не менее сохраняют картину обмена энергией между компонентами системы.

Ключевые слова: связанные уравнения синус-Гордон, амплитудные уравнения, линейные волны, нелинейные волны, обмен энергией в двухкомпонентных системах, модуляционная неустойчивость.

1. ВВЕДЕНИЕ

Система связанных уравнений Клейна–Гордона

$$u_{tt} - u_{xx} = f_u(u, w), \quad w_{tt} - c^2 w_{xx} = f_w(u, w), \quad (1)$$

где нижние индексы обозначают частные производные, возникает в целом ряде приложений (см., например, [1]–[3]). В этой системе $f(u, w)$ представляет собой потенциальную функцию нелинейной связи, а величина c задает отношение акустических скоростей компонент u и w . В простейшем виде уравнения (1) описывают динамику длинных волн

*Department of Mathematical Sciences, Loughborough University, Loughborough, LE11 3TU, UK. E-mail: K.Khusnutdinova@lboro.ac.uk

†Постоянное место работы: Институт механики, ул. Карла Маркса 6, Уфа, Россия

в двух связанных между собой одномерных периодических цепочках частиц, в которых связи между элементами внутри каждой цепочки линейны, а связи между элементами различных цепочек нелинейны.

Система уравнений (1) представляет собой лагранжеву систему с лагранжевой плотностью

$$L = \frac{1}{2}(u_t^2 + w_t^2 - u_x^2 - c^2 w_x^2) + f(u, w).$$

Для любой функции $f(u, w)$ в этой системе присутствуют два закона сохранения – энергии и импульса:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2}(u_t^2 + w_t^2 + u_x^2 + c^2 w_x^2) - f(u, w) \right] - \frac{\partial}{\partial x} [u_t u_x + c^2 w_t w_x] &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} [u_t u_x + w_t w_x] - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2}(u_t^2 + w_t^2 + u_x^2 + c^2 w_x^2) + f(u, w) \right] &= 0. \end{aligned}$$

Групповая классификация системы уравнений (1) по точечным симметриям была проведена в работе [1] при $c \neq 1$, $f_{uw}(u, w) \neq 0$. Более общий случай системы (1) при $c = 1$ (с произвольными функциями от u и w в правой части) был исследован в работе [4], в которой были найдены примеры уравнений, допускающих симметрии Ли–Беклунда, а потому являющихся (полностью или частично) интегрируемыми. В случае $f_{uw}(u, w) = 0$ система уравнений (1) распадается на два независимых уравнения Клейна–Гордона, групповая классификация которых по точечным симметриям была проведена в работе [5] (см. также [6]), а по симметриям Ли–Беклунда – в статье [7].

В случае, когда потенциальная функция имеет вид $f(u, w) = \cos(\delta u - w) - 1$, система (1) может быть приведена к системе связанных уравнений синус-Гордон

$$u_{tt} - u_{xx} = -\delta^2 \sin(u - w), \quad w_{tt} - c^2 w_{xx} = \sin(u - w), \quad (2)$$

где переменная u заменяет собой переменную δu в исходной системе (1). Случай связанных уравнений синус-Гордон является обобщением известной модели дислокации Френкеля–Конторовой [8] (см. также работу [9] и приведенную там литературу) и, кроме того, представляет собой модель одномерных нелинейных волновых процессов, протекающих в двухслойном материале с неидеальным интерфейсом [10]. Отметим также, что система уравнений (2) с параметром c , близким к единице, была предложена в качестве модели, описывающей открытые состояния молекулы ДНК [2].

Инвариантные решения системы уравнений (2), а также решения, описывающие динамику системы в присутствии дополнительных сдвиговых сил, были исследованы в работе [1]. Пространственно-периодические линейные и нелинейные решения, допускающие обмен энергией между двумя физическими компонентами системы и задающие обобщение на непрерывный случай процесса обмена энергией в системе связанных маятников [11] (см. также [12]), были исследованы в работе [13]. В настоящей работе исследуется поведение некоторых из найденных частных решений под влиянием малых возмущений.

Статья имеет следующую структуру. В разделе 2 кратко обсуждаются линейные решения, в которых имеет место периодический обмен энергией между волнами, распространяющимися по двум компонентам. В разделе 3 найдены асимптотические модели, описывающие слабонелинейные решения в двух различных режимах: с наличием или отсутствием дисперсионных членов. В разделе 4 исследуется бездисперсионная асимптотическая модель. Влияние дисперсии исследуется в разделе 5 для случая периодической задачи. При этом используется другая асимптотическая модель. Случай, когда параметр c близок к единице, оказывается привлекательным как с точки зрения наличия аналитического решения в пределе $c = 1$, так и с точки зрения потенциальных приложений получаемых результатов к задачам описания процессов в молекулах ДНК и в двухслойных материалах, и потому этот случай рассматривается отдельно. Результаты численного эксперимента для исходной системы связанных уравнений синус-Гордон (2) обсуждаются и сравниваются с теоретическими предсказаниями в разделе 6. Краткое заключение содержится в разделе 7.

2. ОБМЕН ЭНЕРГИЕЙ В ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ

В случае, когда $|u - w| \ll 1$, связанные уравнения синус-Гордон (2) сводятся к линейной системе. Решения ищутся в виде $(u, w) = (1, \alpha)e^{i(kx - \omega t)} + \text{к.с.}$, что приводит к дисперсионному соотношению

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[\nu_1^2 + \nu_2^2 \mp \sqrt{(\nu_1^2 - \nu_2^2)^2 + 4\delta^2} \right], \quad (3)$$

где $\nu_1^2 = \delta^2 + k^2$ и $\nu_2^2 = 1 + c^2 k^2$. Ввиду симметрии достаточно рассмотреть дисперсионную кривую только в первом квадранте $k > 0$, $\omega > 0$. Кривая состоит из двух ветвей ω_1 и ω_2 , типичная форма которых показана на рис. 1 в случаях $c = 1$ и $c \neq 1$. Соответствующие значения параметра α , задающие отношение w/u , имеют вид

$$\alpha_{1,2} = \frac{\nu_1^2 - \omega_{1,2}^2}{\delta^2} = \frac{1}{\nu_2^2 - \omega_{1,2}^2}.$$

Заметим, что $\alpha_1 > 0$, а $\alpha_2 < 0$. Например, в случае $c = 1$ имеют место соотношения $\alpha_1 = 1$ и $\alpha_2 = -\delta^{-2}$.

Рассмотрим теперь суперпозицию двух линейных волн, выбранных таким образом, что обе движутся влево направо и имеют одно и то же волновое число k , но различные частоты $\omega_1(k)$ и $\omega_2(k)$. Более того, будем предполагать, что одна из компонент, например u , первоначально является возбужденной, в то время как вторая компонента, w , первоначально находится в состоянии покоя. Тогда легко показать, что

$$\begin{aligned} u &= \frac{U}{\alpha_1 + |\alpha_2|} \left[|\alpha_2| \cos(kx - \omega_1 t) + \alpha_1 \cos(kx - \omega_2 t) \right], \\ w &= -\frac{2\alpha_1 |\alpha_2| U}{\alpha_1 + |\alpha_2|} \sin(\gamma_- t) \sin(kx - \gamma_+ t), \end{aligned} \quad (4)$$

где $\gamma_{\pm} = (\omega_2 \pm \omega_1)/2$. Это решение описывает процесс обмена энергией между волнами, распространяющимися в двух компонентах u и w .

 Рис. 1. Дисперсионная кривая для случаев $c = 1$ (а) и $c \neq 1$ (б).

Полный обмен энергией между двумя компонентами, от нулевого до ненулевого значения, происходит, если выполнено условие

$$(c^2 - 1)k^2 = \delta^2 - 1. \quad (5)$$

В этом случае $\nu_1^2 = \nu_2^2 = \nu^2$, $\alpha_1 = -\alpha_2 = \delta^{-1}$, и решение (4) сводится к формулам

$$\begin{aligned} u &= U \cos(\gamma_- t) \cos(kx - \gamma_+ t), \\ w &= -U\delta^{-1} \sin(\gamma_- t) \sin(kx - \gamma_+ t). \end{aligned} \quad (6)$$

Это решение описывает периодический обмен энергией с периодом $T = 2\pi/\gamma_-$ между волнами, распространяющимися по компонентам u и w . Этот процесс изображен на рис. 2 для $c = \delta = 1$, $k = 1.6$. Если $\nu^2 \gg \delta$, то период T обмена энергией стремится к бесконечности.

Если отношение $c = 1$, то условие (5) может быть выполнено только в случае, если $\delta = 1$ при произвольном параметре k . Если $c \neq 1$, то условие (5) не выполняется ни при каком k , если $(\delta^2 - 1)/(c^2 - 1) < 0$. В противном случае это условие будет выполняться только тогда, когда волновое число $k = ((\delta^2 - 1)/(c^2 - 1))^{1/2}$.

Если параметр $\gamma_- = (\omega_2 - \omega_1)/2$ достаточно мал, т.е. частоты ω_1 и ω_2 достаточно близки при некотором волновом числе k , то компонента u решения (6) оказывается почти в положении равновесия при $t = \pi/2\gamma_-$, $3\pi/2\gamma_-$, ... При $t = 0$, π/γ_- , ... наблюдается обратная ситуация.

Частичный обмен энергией между двумя компонентами системы имеет место при $(c^2 - 1)k^2 \neq (\delta^2 - 1)$. Тогда $\nu_1^2 \neq \nu_2^2$, и компонента u решения (4) может быть записана в виде

$$u = \tilde{U}(t) \cos[kx - \omega_2 t + \theta(t)],$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{U}(t) &= \frac{U}{\alpha_1 + |\alpha_2|} \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2\alpha_1|\alpha_2| \cos(\omega_2 - \omega_1)t}, \\ \theta(t) &= \arctg \left[\frac{|\alpha_2| \sin(\omega_2 - \omega_1)t}{\alpha_1 + |\alpha_2| \cos(\omega_2 - \omega_1)t} \right]. \end{aligned}$$

Рис. 2. Полный обмен энергией в линейном двухволновом решении (6).

При этом компонента w остается такой же, как и в решении (4). Амплитуда волны, распространяющейся в компоненте u , осциллирует в пределах между своим исходным значением U и меньшим ненулевым значением $U|\alpha_1 - |\alpha_2||/(\alpha_1 + |\alpha_2|)$.

Рассматривая суперпозицию всех четырех возможных волн с одним и тем же волновым числом k , можно найти решения для двух пар волн, распространяющихся в противоположных направлениях и описывающих периодический обмен энергией между стоячими волнами в компонентах u и w (см. [13]). Однако в данной работе рассматриваются только решения для суперпозиции двух сонаправленных волн, обсуждавшиеся выше.

3. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СЛАБОНЕЛИНЕЙНЫХ РЕШЕНИЙ

В случае $c = 1$ точные нелинейные решения, описывающие обмен энергией между волнами, распространяющимися в компонентах u и w , могут быть построены в терминах эллиптических функций Якоби [13]. При этом, вводя новые переменные $p = u - w$, $q = u + \delta^2 w$, можно расщепить систему связанных уравнений в уравнение синус-Гордон для переменной p и линейное волновое уравнение для переменной q .

В общем случае можно изучать слабонелинейные решения, сводя связанные уравнения синус-Гордон (2) к связанным уравнениям, описывающим медленную пространственно-временную эволюцию волновых амплитуд. Медленная эволюция задается многомасштабным асимптотическим разложением

$$\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} u_1 \\ w_1 \end{pmatrix} + \varepsilon^2 \begin{pmatrix} u_2 \\ w_2 \end{pmatrix} + \varepsilon^3 \begin{pmatrix} u_3 \\ w_3 \end{pmatrix} + O(\varepsilon^4),$$

в котором в случае двух волн нужно положить

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ w_1 \end{pmatrix} = A e^{i(kx - \omega_1 t)} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} + C e^{i(kx - \omega_2 t)} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + \text{к.с.} \quad (7)$$

Здесь $\varepsilon \ll 1$ представляет собой малый параметр, а величины A и C суть функции только медленных переменных.

Мы будем исследовать два различных режима, для каждого из которых предлагается своя асимптотическая модель. Мы получаем один или другой режим в зависимости от того, на каком пространственном масштабе, ε^{-1} или ε^{-2} , происходит изменение амплитуд волн. Как будет показано ниже, дисперсионные члены оказываются существенными в первом режиме, в то время как во втором режиме ими можно пренебречь.

Для того чтобы получить первую модель, будем следовать подходу работы [14]. Предположим, что решения периодичны с пространственным периодом $\varepsilon^{-1}L$, и введем пространственную переменную больших расстояний $\chi = \varepsilon x$ и переменные медленных времен $\tau = \varepsilon t$ и $T = \varepsilon^2 t$. Тогда в порядке $O(\varepsilon)$ (т.е. в главном порядке исследуемого разложения) получаются линейные уравнения для переменных u_1 и w_1 , которые задают двухволновое решение (7) с $A = A(\tau, T, \chi)$ и $C = C(\tau, T, \chi)$. В порядке $O(\varepsilon^2)$ получаем два условия разрешимости $A_\tau + v_{g1}A_\chi = 0$ и $C_\tau + v_{g2}C_\chi = 0$. Вводя переменные

$$\eta = \chi - v_{g1}\tau, \quad \xi = \chi - v_{g2}\tau \quad (8)$$

и предполагая, что $v_{g1} \neq v_{g2}$, эти условия можно записать в виде

$$A = A(\eta, T), \quad C = C(\xi, T). \quad (9)$$

Тогда члены порядка $O(\varepsilon^2)$ в разложении примут вид

$$\begin{pmatrix} u_2 \\ w_2 \end{pmatrix} = A_2(\eta, \xi, T)e^{i(kx - \omega_1 t)} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} + C_2(\eta, \xi, T)e^{i(kx - \omega_2 t)} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

В порядке $O(\varepsilon^3)$ обычным образом получают условия разрешимости:

$$\begin{aligned} (\partial_\tau + v_{g1}\partial_\chi)A_2 + A_T &= \frac{i}{2}\omega_1''A_{\chi\chi} + i\mu_1|A|^2A + i\mu_2|C|^2A, \\ (\partial_\tau + v_{g2}\partial_\chi)C_2 + C_T &= \frac{i}{2}\omega_2''C_{\chi\chi} + i\mu_3|C|^2C + i\mu_4|A|^2C, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} v_{gi} &= \omega_i' = \frac{k}{\omega_i} \frac{1 + \alpha_i^2 \delta^2 c^2}{1 + \alpha_i^2 \delta^2}, \\ \omega_i'' &= \frac{1 - v_{gi}^2 + \alpha_i^2 \delta^2 (c^2 - v_{gi}^2) + 4\omega_i^2 \alpha_i (v_{gi} - k/\omega_i)(v_{gi} - c^2 k/\omega_i)}{\omega_i(1 + \alpha_i^2 \delta^2)}, \\ \mu_1 &= \frac{\delta^2(1 - \alpha_1)^4}{4\omega_1(1 + \alpha_1^2 \delta^2)}, \quad \mu_2 = \frac{\delta^2(1 - \alpha_1)^2(1 - \alpha_2)^2}{2\omega_1(1 + \alpha_1^2 \delta^2)}, \\ \mu_3 &= \frac{\delta^2(1 - \alpha_2)^4}{4\omega_2(1 + \alpha_2^2 \delta^2)}, \quad \mu_4 = \frac{\delta^2(1 - \alpha_1)^2(1 - \alpha_2)^2}{2\omega_2(1 + \alpha_2^2 \delta^2)}. \end{aligned} \quad (10)$$

Записывая частные производные в терминах переменных η и ξ из (8), получим

$$\begin{aligned} (v_{g1} - v_{g2})A_{2\xi} + A_T &= \frac{i}{2}\omega_1''A_{\eta\eta} + i\mu_1|A|^2A + i\mu_2|C|^2A, \\ (v_{g2} - v_{g1})C_{2\eta} + C_T &= \frac{i}{2}\omega_2''C_{\xi\xi} + i\mu_3|C|^2C + i\mu_4|A|^2C. \end{aligned}$$

Поскольку указанные решения пространственно-периодичны с периодом L по переменной χ , из формул (8) следует, что решения также должны быть периодичны по переменным η и ξ с тем же периодом L . Тогда можно проинтегрировать первое из двух уравнений, записанных выше, по переменной ξ в пределах от 0 до L , учитывая, что $A = A(\eta, T)$,

а затем проинтегрировать второе уравнение по переменной η от 0 до L , учитывая, что $C = C(\xi, T)$. В результате получим

$$\begin{aligned} A_T &= \frac{i}{2} \omega_1'' A_{\eta\eta} + i\mu_1 |A|^2 A + i\mu_2 \left(\frac{1}{L} \int_0^L |C|^2 d\xi \right) A, \\ C_T &= \frac{i}{2} \omega_2'' C_{\xi\xi} + i\mu_3 |C|^2 C + i\mu_4 \left(\frac{1}{L} \int_0^L |A|^2 d\eta \right) C. \end{aligned} \quad (11)$$

Эти уравнения описывают слабонелинейную эволюцию волновых амплитуд в общем случае, когда $v_{g1} \neq v_{g2}$.

Вторую асимптотическую модель можно получить, вводя переменные большого расстояния $X = \varepsilon^2 x$ и медленного времени $T = \varepsilon^2 t$. В общем нерезонансном случае с помощью длинных, но простых выкладок можно получить систему связанных уравнений на волновые амплитуды $A = A(T, X)$ и $C = C(T, X)$ (см. [13]), которая в главном порядке имеет вид

$$\begin{aligned} i(A_T + v_{g1} A_X) + \mu_1 |A|^2 A + \mu_2 |C|^2 A &= 0, \\ i(C_T + v_{g2} C_X) + \mu_3 |C|^2 C + \mu_4 |A|^2 C &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

а коэффициенты задаются, как и раньше, формулами (10).

Заметим, что асимптотические модели, аналогичные моделям (11) и (12), были недавно построены [15] для случая противоположно распространяющихся волн.

Обе вышеприведенные асимптотические модели обладают одним и тем же решением в виде связанных волн (СВ-решением), не зависящим от переменной x :

$$A = A_0 e^{i\omega_a T}, \quad C = C_0 e^{i\omega_c T}, \quad (13)$$

где $\omega_a = \mu_1 |A_0|^2 + \mu_2 |C_0|^2$ и $\omega_c = \mu_3 |C_0|^2 + \mu_4 |A_0|^2$. Подставляя решение (13) в анзац (7), получим решение в главном порядке:

$$\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \varepsilon A_0 e^{i(kx - \omega_1 t + \omega_a \varepsilon^2 t)} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} + \varepsilon C_0 e^{i(kx - \omega_2 t + \omega_c \varepsilon^2 t)} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + \text{к.с.} \quad (14)$$

В пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ решение (14) превращается в линейное решение (4), если

$$\varepsilon A_0 = \frac{|\alpha_2| U}{2(\alpha_1 + |\alpha_2|)}, \quad \varepsilon C_0 = \frac{\alpha_1 U}{2(\alpha_1 + |\alpha_2|)}. \quad (15)$$

В случае $\varepsilon \neq 0$ решение (14) задает обобщение линейных решений ввиду наличия в нем поправок порядка $O(\varepsilon^2)$ к частотам $\omega_{1,2}(k)$, индуцированных нелинейностью.

Рассмотрим теперь более подробно каждую из указанных асимптотических моделей.

4. БЕЗДИСПЕРСИОННОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Бездисперсионная модель (12) оказывается интегрируемой в квадратурах. В самом деле, легко проверить, что величины AA^* и CC^* сохраняются:

$$(AA^*)_T + v_{g1}(AA^*)_X = 0, \quad (CC^*)_T + v_{g2}(CC^*)_X = 0,$$

что приводит к тому, что общее решение системы (12) имеет вид

$$A = a(\eta_1)e^{i\phi}, \quad C = c(\xi_1)e^{i\psi}, \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} \phi_T + v_{g1}\phi_X &= \mu_1 a^2(\eta_1) + \mu_2 c^2(\xi_1), \\ \psi_T + v_{g2}\psi_X &= \mu_3 c^2(\xi_1) + \mu_4 a^2(\eta_1), \end{aligned} \quad (17)$$

а $a(\eta_1)$ и $c(\xi_1)$ суть произвольные функции своих аргументов $\eta_1 = X - v_{g1}T$ и $\xi_1 = X - v_{g2}T$.

Общее решение системы (17) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \phi &= F(\eta_1) + \mu_1 T a^2(\eta_1) + \frac{\mu_2}{v_{g1} - v_{g2}} \int_0^{\xi_1} c^2(\mu) d\mu, \\ \psi &= G(\xi_1) + \mu_3 T c^2(\xi_1) + \frac{\mu_4}{v_{g2} - v_{g1}} \int_0^{\eta_1} a^2(\mu) d\mu, \end{aligned} \quad (18)$$

где $F(\eta_1)$ и $G(\xi_1)$ суть произвольные функции своих аргументов. СВ-решение, обсуждавшееся в предыдущем разделе, представляет собой частное решение, отвечающее начальным данным

$$a|_{T=0} = A_0, \quad c|_{T=0} = C_0, \quad (19)$$

$$\phi|_{T=0} = 0, \quad \psi|_{T=0} = 0. \quad (20)$$

Из вида общего решения (16), (18) следует, что всякое малое возмущение условий (20) вызывает лишь малое возмущение фаз СВ-решения. Хотя всякое малое возмущение условий (19) существенно влияет на фазы СВ-решения, оно приводит только лишь к малым возмущениям соответствующих амплитуд. Поэтому в данном режиме модуляционная неустойчивость отсутствует.

5. МОДУЛЯЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

Модуляционная неустойчивость слабонелинейных решений (14) может быть тем не менее исследована с использованием уравнений (11), которые оказываются справедливыми для возмущений с пространственным масштабом $O(\varepsilon^{-1})$.

Перед тем как рассмотреть общий случай, обратимся к случаю $c = 1$. Тогда имеем $\mu_1 = \mu_2 = \mu_4 = 0$, $\omega_1'' = 0$, и уравнения (11) принимают вид

$$A_T = 0, \quad C_T = \frac{i\omega_2''}{2} C_{\xi\xi} + i\mu_3 |C|^2 C, \quad (21)$$

где $A = A(\eta, T)$ и $C = C(\xi, T)$, а коэффициенты уравнения задаются условиями $\omega_1 = k$ и $\omega_2 = \sqrt{\delta^2 + 1 + k^2}$. При этом на функцию A получается тривиальное линейное уравнение, а функция C описывается стандартным нелинейным уравнением Шредингера, что напоминает о возможности расщепить уравнения синус-Гордон в данном случае.

Рассмотрим некоторое обобщение вышеприведенной ситуации, а именно случай, когда параметр c близок к единице, т.е. $c^2 = 1 + \rho$, где $|\rho| \ll 1$. Этот случай важен с точки зрения возможных приложений, и он может быть исследован с использованием асимптотического анализа по переменной ρ . Можно показать, что с точностью до поправок первого порядка по переменной ρ поведение системы по-прежнему описывается уравнениями (21), в которых коэффициенты следует вычислить, используя следующие приближения:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= k + \frac{1}{2}\rho k \frac{\delta^2}{\delta^2 + 1} + O(\rho^2), \\ \omega_2 &= \sqrt{\delta^2 + 1 + k^2} + \frac{1}{2}\rho k^2 \frac{1}{(\delta^2 + 1)\sqrt{\delta^2 + 1 + k^2}} + O(\rho^2).\end{aligned}$$

В самом деле, в этом приближении легко проверить, что

$$\alpha_1 = 1 - \rho k^2 / (\delta^2 + 1) + O(\rho^2), \quad \alpha_2 = -\delta^{-2}(1 + \rho k^2 / (\delta^2 + 1)) + O(\rho^2),$$

откуда, предполагая $k \sim \delta \sim 1$, можно вывести асимптотические условия $\mu_1 \sim O(\rho^4)$, $\mu_2 \sim \mu_4 \sim O(\rho^2)$ и $\mu_3 \sim O(1)$. Поскольку оба параметра ω_2'' и μ_3 положительны, приходим к заключению, что в случае, когда c близко к единице, СВ-решение оказывается модуляционно неустойчивым.

В общем случае решения уравнений (11) ищутся в виде

$$\begin{aligned}A(\eta, T) &= A_0(T)(1 + a_1 e^{iJ\eta + S_a T} + a_2^* e^{-iJ\eta + S_a^* T}), \\ C(\xi, T) &= C_0(T)(1 + c_1 e^{iJ\xi + S_c T} + c_2^* e^{-iJ\xi + S_c^* T}),\end{aligned}$$

который отвечает синусоидальным возмущениям СВ-решения $A_0(T)$, $C_0(T)$, задаваемого выражением (14). Выбор волнового числа J возмущения ограничивается условием периодичности по x . Пренебрегая членами второго порядка по амплитуде возмущения, из (11) получим две независимые линейные системы с дисперсионными соотношениями

$$S_a^2 = \mu_1 |A_0|^2 \omega_1'' J^2 - \frac{\omega_1''^2 J^4}{4}, \quad S_c^2 = \mu_3 |C_0|^2 \omega_2'' J^2 - \frac{\omega_2''^2 J^4}{4}.$$

С помощью выражения для ω_2'' (10) можно показать, что величина ω_2'' всегда положительна. Тогда, поскольку $\mu_3 > 0$, получим, что уравнение на величину S_c имеет корень с положительной вещественной составляющей при достаточно малых J , что соответствует неустойчивой моде. Из формулы (3) следует, что величина ω_1'' отрицательна при малых k , положительна при больших k и стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$. Поскольку $\mu_1 > 0$, величина S_a чисто мнимая при малых k , а потому неустойчивая мода не возникает, в то время как при больших k , при которых $\omega_1'' > 0$, есть неустойчивая мода.

Ниже мы будем предполагать, что либо величина k такова, что $\omega_1'' < 0$, либо неустойчивость в компоненте C оказывается доминирующей, что имеет место в численном

эксперименте, обсуждаемом в следующем разделе. Тогда, используя условия (15) на величину $|C_0|$ и возвращаясь к нерастянутым переменным с $s_c = \varepsilon^2 S_c$ и $j = \varepsilon J$, получим, что дисперсионное соотношение для возмущений решения (14), описывающих обмен энергией, имеет вид

$$s_c^2 = \frac{\mu_3 \omega_2'' \alpha_1^2 U^2 j^2}{4(\alpha_1 + |\alpha_2|)^2} - \frac{\omega_2''^2 j^4}{4}, \quad (22)$$

где следует положить $U = O(\varepsilon)$ и $j \sim \varepsilon^{-1}$, для того чтобы обеспечить формальную справедливость разложения. Если только позволяет геометрия задачи, то наиболее неустойчивая мода с инкрементом нарастания s_* имеет место при волновом числе j_* , где

$$s_* = \frac{\mu_3 \alpha_1^2 U^2}{4(\alpha_1 + |\alpha_2|)^2}, \quad j_*^2 = \frac{\mu_3 \alpha_1^2 U^2}{2\omega_2''(\alpha_1 + |\alpha_2|)^2}.$$

6. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Представим теперь результаты наших численных экспериментов для системы (2), представляющей собой исходную систему связанных уравнений синус-Гордон. Это позволит оценить точность и применимость теоретических предсказаний для неустойчивости, представленных в разделе 5. Хотя в основном будут проверяться оценки инкремента нарастания и длины волны для модуляционной неустойчивости частных решений, обсуждавшихся в разделах 2 и 3, мы также обсудим структуру решений в режиме, когда неустойчивости достигают максимума амплитуды.

Поскольку моделируются пространственно-периодические решения, естественно использовать базис Фурье по переменной x для величин u и w . Для шага по времени используется схема расщеплений вида $\hat{L}(\Delta t/2) \hat{N}(\Delta t) \hat{L}(\Delta t/2)$. Здесь разностный оператор $\hat{L}$ точно решает линейную часть системы, а оператор $\hat{N}$ решает нелинейную часть системы с использованием метода Рунге–Кутты второго порядка, в которой нелинейные составляющие вычисляются псевдоспектрально. В целом схема представляет собой схему второго порядка по времени и имеет то преимущество, что она является точной при отсутствии нелинейных членов.

В проделанных вычислениях шаг по времени выбирался, как правило, в промежутке от 0.025 до 0.1 и в направлении x аппроксимация проводилась по 256 точкам. Закон сохранения энергии выполняется в нелинейной схеме с большой точностью – типичная ошибка имеет порядок 10^{-5} %. Схема была протестирована на примере вычисления инкремента нарастания неустойчивости Бенджамина–Фейера при $s = 1$ и $\varepsilon \ll 1$. Вычисленные значения инкремента нарастания, как правило, совпадали с хорошо известными теоретическими предсказаниями (см., например, [16]) с точностью до четырех значащих цифр.

Каждый численный эксперимент начинался с СВ-решения (4) при некоторых выбранных значениях параметров k и U . Ширина области $2\pi L_c$ при этом ограничена необходимостью выбора $L_c = n/k$, где n – положительное целое число. Неустойчивость инициировалась с помощью фонового шума, который для величин u и w имел порядок, по крайней мере в тысячу раз меньший, чем величина U . Если нестабильность имеет место, то в эволюции системы наблюдается этап экспоненциального роста амплитуды

Рис. 3. Обмен энергией при $c = 0.5$, $\delta = 0.5$, $k = 1$ и $U = 0.2$.

Сравнение численно определенного инкремента нарастания s_n с теоретически предсказанным значением s_c

c	δ	k	U	j	s_n	s_c
1	1	2	0.5	2/5	0.01257	0.01262
0.8	1	4	0.5	2/3	0.006267	0.006454
1.01	1	2	0.2	1/6	0.001948	0.001950
0.5	2	2	0.2	1/5	0.004588	0.004592

возмущения, инкремент нарастания которого может быть вычислен. Выборка численных результатов представлена в таблице, где параметр j обозначает волновое число наблюдаемой неустойчивости (ограниченное размером области, в которой производятся

Рис. 4. Обмен энергией при $c = 1.01$, $\delta = 1$, $k = 2$ и $U = 0.2$.

вычисления), а параметр s_c представляет собой теоретически предсказанный на основе формулы (22) инкремент нарастания. Приведенные результаты свидетельствуют о том, что формула (22) правильно предсказывает величину инкремента нарастания неустойчивых возмущений в широком диапазоне значений параметров c , δ , k и j и вплоть до неожиданно больших значений амплитуды U .

Результаты численного эксперимента при $c = \delta = 0.5$, $k = 1$ и $U = 0.2$ представлены на рис. 3. СВ-решение показано слева, а нелинейное решение в области, где амплитуда возмущения достигает максимума, изображено справа. Ширина области составляет 20π . Неустойчивость растет с волновым числом 0.1, и длина волны неустойчивого возмущения тем самым совпадает с размером области. Также на рисунке можно видеть структуру первоначального обмена энергией в СВ-решении и то, как форма этого обмена видоизменяется в режиме, когда амплитуда возмущения достигает своего максимума. В последнем случае наибольшие отклонения от равновесия пульсируют между u и w , и видно, что обмен энергией сохраняется и в нелинейном режиме.

Соответствующие результаты вычислений при $c = 1.01$, $\delta = 1$, $k = 2$ и $U = 0.2$ в области шириной 12π показаны на рис. 4.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе на примере двухкомпонентной системы связанных уравнений синус-Гордон были исследованы частные процессы обмена энергией между двумя физическими компонентами системы и влияние модуляционной неустойчивости на эти процессы. Было показано как теоретически, так и прямыми численными расчетами, что периодический процесс обмена энергией между волнами, бегущими по этим двум компонентам, оказывается модуляционно неустойчивым, что приводит к формированию локализованных структур, но тем не менее не разрушает картину энергетического обмена между физическими компонентами системы.

Благодарности. Авторы благодарят В. А. Байкова, К. Мартеля, А. В. Михайлова и Д. Е. Пелиновского за полезные обсуждения. Авторы признательны за поддержку Математическому факультету Университета г. Лавборо.

Список литературы

- [1] И. Ш. Ахатов, В. А. Байков, К. Р. Хуснутдинова. Прикл. мат. мех. 1995. Т. 59. № 3. С. 376–384.
- [2] S. Yomosa. Phys. Rev. A. 1983. V. 27. P. 2120–2125.
- [3] L. V. Yakushevich. Nonlinear Physics of DNA. Chichester: Wiley, 1998.
- [4] А. В. Жубер, Н. Х. Ибрагимов, А. Б. Шабат. ДАН СССР. 1979. Т. 247. С. 1103–1105.
- [5] S. Lie. Arch. Math. Naturv. 1881. V. 6. P. 112–124.
- [6] N. H. Ibragimov (ed.). CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations. V. 1. Symmetries, Exact Solutions, and Conservation Laws. Boca Raton: CRC, 1994.
- [7] А. В. Жубер, А. Б. Шабат. ДАН СССР. 1979. Т. 247. С. 1103.
- [8] Т. А. Конторова, Я. И. Френкель. ЖЭТФ. 1938. Т. 8. С. 89–95; С. 1340–1368.
- [9] O. M. Braun, Yu. S. Kivshar. Phys. Rep. 1998. V. 306. P. 1–108.
- [10] K. R. Khusnutdinova, V. V. Silberschmidt. Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math. 2003. V. 52. P. 63–75.
- [11] Л. И. Мандельштам. Лекции по теории колебаний. М.: Наука, 1972.
- [12] В. И. Арнольд. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989.
- [13] K. R. Khusnutdinova, D. E. Pelinovsky. Wave Motion. 2003. V. 38. P. 1–10.
- [14] E. Knobloch, J. De Luca. Nonlinearity. 1990. V. 3. P. 975–980.
- [15] C. Martel, E. Knobloch, J. M. Vega. Phys. D. 2000. V. 137. P. 94–123; C. Martel, J. M. Vega, E. Knobloch. Phys. D. 2003. V. 174. P. 198–217.
- [16] C. Godrèche, P. Manneville (eds.). Hydrodynamics and Nonlinear Instabilities. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998.