Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. И. Мохов, Пары Лакса для уравнений, описывающих согласованные нелокальные скобки Пуассона гидродинамического типа, и интегрируемые редукции уравнений Ламе, *ТМФ*, 2004, том 138, номер 2, 283–296

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf25>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 02:43:55

ПАРЫ ЛАКСА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ
СОГЛАСОВАННЫЕ НЕЛОКАЛЬНЫЕ СКОБКИ
ПУАССОНА ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА,
И ИНТЕГРИРУЕМЫЕ
РЕДУКЦИИ УРАВНЕНИЙ ЛАМЕ

Решена задача описания согласованных нелокальных скобок Пуассона гидродинамического типа. Доказано, что для неособых пар согласованных скобок существуют специальные локальные координаты, в которых метрики и операторы Вейнгартена обеих скобок диагональны. В этих специальных координатах получены эволюционные нелинейные уравнения, описывающие все неособые пары согласованных нелокальных скобок Пуассона гидродинамического типа, и доказана интегрируемость этих уравнений методом обратной задачи. Найдены пары Лакса со спектральным параметром для этих уравнений. Построены различные классы интегрируемых редукций полученных уравнений, представляющие самостоятельный дифференциально-геометрический и прикладной интерес. В частности, если одна из согласованных скобок Пуассона является локальной, мы получаем интегрируемые редукции классических уравнений Ламе, описывающих все ортогональные криволинейные системы координат в плоском пространстве, а если одна из согласованных скобок порождена метрикой постоянной кривизны, то соответствующие уравнения описывают интегрируемые редукции уравнений для ортогональных криволинейных систем координат в пространстве постоянной кривизны.

Ключевые слова: нелокальные скобки Пуассона гидродинамического типа, согласованные метрики, согласованные скобки Пуассона, метод обратной задачи, ортогональные криволинейные системы координат, интегрируемые системы.

1. ВВЕДЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

В настоящей работе решена задача классификации всех неособых пар согласованных нелокальных скобок Пуассона гидродинамического типа. Прежде всего мы доказываем

*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, Москва, Россия.
E-mail: mokhov@mi.ras.ru; mokhov@landau.ac.ru

важную теорему о том, что для каждой из этих неособых согласованных пар существуют специальные локальные координаты, в которых метрики и все аффиноры обеих рассматриваемых согласованных скобок Пуассона диагональны. С помощью этой ключевой теоремы в статье получены общие совместные эволюционные нелинейные уравнения, описывающие все неособые пары согласованных нелокальных скобок Пуассона гидродинамического типа, и доказана интегрируемость этих уравнений методом обратной задачи рассеяния. Для этих общих уравнений найдена пара Лакса со спектральным параметром. Более того, мы демонстрируем интегрируемость уравнений для некоторых особенно важных частных классов согласованных нелокальных скобок Пуассона гидродинамического типа (интегрируемость соответствующих редукций), представляющих самостоятельный дифференциально-геометрический и прикладной интерес, в частности, для наиболее важного случая, когда одна из согласованных скобок Пуассона локальна, а также для случая, когда одна из согласованных скобок Пуассона порождена метрикой постоянной римановой кривизны. Случай, когда одна из согласованных скобок Пуассона гидродинамического типа локальна и невырождена, был изучен в нашей предыдущей статье [1], где рассматривался другой подход к описанию соответствующих согласованных скобок Пуассона гидродинамического типа, были получены соответствующие нелинейные уравнения в плоских координатах локальной скобки и анонсировалась интегрируемость этих уравнений, доказанная в настоящей статье. Этот случай очень важен, поскольку, как было показано в [1], любое решение этих интегрируемых уравнений порождает интегрируемую бигамильтонову иерархию гидродинамического типа в явном виде. Более того, эти уравнения описывают важный класс интегрируемых редукций классических уравнений Ламе. В случае, когда одна из согласованных скобок Пуассона порождена метрикой постоянной римановой кривизны, соответствующие уравнения описывают интегрируемые редукции уравнений для ортогональных криволинейных систем координат в пространствах постоянной кривизны. Найденная в статье пара Лакса со спектральным параметром для общих уравнений, описывающих согласованные нелокальные скобки Пуассона гидродинамического типа, также позволяет без труда построить интегрируемые редукции этих уравнений, связанные и с другими классами метрик и поверхностей в псевдоевклидовых пространствах.

1.1. Локальные скобки Пуассона гидродинамического типа. *Локальной скобкой Пуассона гидродинамического типа* или *скобкой Дубровина–Новикова* [2] называется произвольная локальная однородная скобка Пуассона первого порядка, т.е. любая скобка Пуассона вида

$$\{I, J\} = \int \frac{\delta I}{\delta u^i(x)} \left(g^{ij}(u(x)) \frac{d}{dx} + b_k^{ij}(u(x)) u_x^k \right) \frac{\delta J}{\delta u^j(x)} dx, \quad (1.1)$$

где $u^1, \dots, u^N$ — локальные координаты на некотором заданном гладком N -мерном многообразии M . Здесь $u^i(x)$, $1 \leq i \leq N$, — функции (поля) одной независимой переменной x , коэффициенты $g^{ij}(u)$ и $b_k^{ij}(u)$ скобки (1.1) — гладкие функции локальных координат,

$I[u]$ и $J[u]$ – произвольные функционалы на пространстве полей $u^i(x)$, $1 \leq i \leq N$. Локальная скобка (1.1) называется невырожденной, если $\det(g^{ij}(u)) \neq 0$.

ТЕОРЕМА 1.1 ([2]). Если $\det(g^{ij}(u)) \neq 0$, то скобка (1.1) является скобкой Пуассона, т.е. она кососимметрична и удовлетворяет тождеству Якоби, тогда и только тогда, когда $g^{ij}(u)$ – произвольная плоская псевдориманова контравариантная метрика (метрика нулевой римановой кривизны) и $b_k^{ij}(u) = -g^{is}(u)\Gamma_{sk}^j(u)$, где $\Gamma_{sk}^j(u)$ – риманова связность, порождаемая контравариантной метрикой $g^{ij}(u)$ (связность Леви-Чивита).

Следовательно, для любой невырожденной локальной скобки Пуассона гидродинамического типа всегда существуют локальные координаты $v^1, \dots, v^N$ (плоские координаты метрики $g^{ij}(u)$), в которых все коэффициенты скобки постоянны: $\tilde{g}^{ij}(v) = \eta^{ij} = \text{const}$, $\tilde{\Gamma}_{jk}^i(v) = 0$, $\tilde{b}_k^{ij}(v) = 0$, т.е. скобка имеет вид

$$\{I, J\} = \int \frac{\delta I}{\delta v^i(x)} \eta^{ij} \frac{d}{dx} \frac{\delta J}{\delta v^j(x)} dx, \quad (1.2)$$

где η^{ij} – невырожденная симметричная постоянная матрица: $\det(\eta^{ij}) \neq 0$, $\eta^{ij} = \eta^{ji}$, $\eta^{ij} = \text{const}$.

1.2. Нелокальные скобки Пуассона гидродинамического типа. Нелокальные скобки Пуассона гидродинамического типа (скобки Мохова–Ферапонтова) были введены и изучены в работе [3]. Они имеют вид

$$\{I, J\} = \int \frac{\delta I}{\delta u^i(x)} \left(g^{ij}(u(x)) \frac{d}{dx} + b_k^{ij}(u(x)) u_x^k + K u_x^i \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} u_x^j \right) \frac{\delta J}{\delta u^j(x)} dx, \quad (1.3)$$

где K – произвольная константа. Скобка (1.3) называется невырожденной, если

$$\det(g^{ij}(u)) \neq 0.$$

ТЕОРЕМА 1.2 ([3]). Если $\det(g^{ij}(u)) \neq 0$, то скобка (1.3) является скобкой Пуассона тогда и только тогда, когда $g^{ij}(u)$ – произвольная псевдориманова контравариантная метрика постоянной римановой кривизны K и $b_k^{ij}(u) = -g^{is}(u)\Gamma_{sk}^j(u)$, где $\Gamma_{sk}^j(u)$ – риманова связность, порождаемая контравариантной метрикой $g^{ij}(u)$ (связность Леви-Чивита).

В работе [4] Ферапонтов ввел и изучил более общие нелокальные скобки Пуассона гидродинамического типа (скобки Ферапонтова), а именно скобки Пуассона вида

$$\begin{aligned} \{I, J\} = & \int \frac{\delta I}{\delta u^i(x)} \left(g^{ij}(u(x)) \frac{d}{dx} + b_k^{ij}(u(x)) u_x^k + \right. \\ & \left. + \sum_{\alpha=1}^L \varepsilon_{\alpha} (w^{\alpha})_k^i(u(x)) u_x^k \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} (w^{\alpha})_s^j(u(x)) u_x^s \right) \frac{\delta J}{\delta u^j(x)} dx, \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\det(g^{ij}(u)) \neq 0,$$

где $\varepsilon_{\alpha} = \pm 1$, $\alpha = 1, \dots, L$.

ТЕОРЕМА 1.3 ([4]). Скобка (1.4) является скобкой Пуассона тогда и только тогда, когда $b_k^{ij}(u) = -g^{is}(u)\Gamma_{sk}^j(u)$, где $\Gamma_{sk}^j(u)$ – риманова связность, порождаемая контравариантной метрикой $g^{ij}(u)$ (связность Леви-Чивита), и ковариантная метрика $g_{ij}(u)$ ($g^{is}(u)g_{sj}(u) = \delta_j^i$) и набор аффиноров $(w^\alpha)_j^i(u)$ удовлетворяют соотношениям

$$g_{ik}(u)(w^\alpha)_j^k(u) = g_{jk}(u)(w^\alpha)_i^k(u), \quad \alpha = 1, \dots, L, \quad (1.5)$$

$$\nabla_k(w^\alpha)_j^i(u) = \nabla_j(w^\alpha)_k^i(u), \quad \alpha = 1, \dots, L, \quad (1.6)$$

$$R_{kl}^{ij}(u) = \sum_{\alpha=1}^L \varepsilon_\alpha ((w^\alpha)_l^i(u)(w^\alpha)_k^j(u) - (w^\alpha)_l^j(u)(w^\alpha)_k^i(u)), \quad (1.7)$$

где ∇_k – оператор ковариантного дифференцирования, порождаемый метрикой $g_{ij}(u)$, а $R_{kl}^{ij}(u)$ – соответствующий тензор римановой кривизны. Кроме того, семейство аффиноров $w^\alpha(u)$ должно быть коммутативным: $[w^\alpha, w^\beta] = 0$.

Соотношения (1.5)–(1.7) – не что иное, как уравнения Гаусса–Кодаши для N -мерных поверхностей M с плоской нормальной связностью в $(N+L)$ -мерном псевдоевклидовом пространстве, т.е. поверхностей, допускающих оснащение полем единичных нормалей $\vec{n}^\alpha$, $\alpha = 1, \dots, L$, таких, что $d\vec{n}^\alpha \in TM$. При этом $g_{ij}(u)$ – первая квадратичная форма поверхности M , а $(w^\alpha)_j^i(u)$ – операторы Вейнгартена, отвечающие полю нормалей $\vec{n}^\alpha$.

Выпишем все соотношения для коэффициентов нелокальной скобки Пуассона (1.4) в удобном для дальнейшего использования виде.

ЛЕММА. Скобка (1.4) является скобкой Пуассона тогда и только тогда, когда ее коэффициенты удовлетворяют соотношениям

$$g^{ij} = g^{ji}, \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial u^k} = b_k^{ij} + b_k^{ji}, \quad (1.9)$$

$$g^{is}b_s^{jk} = g^{js}b_s^{ik}, \quad (1.10)$$

$$g^{is}(w^\alpha)_s^j = g^{js}(w^\alpha)_s^i, \quad (1.11)$$

$$(w^\alpha)_s^i(w^\beta)_j^s = (w^\beta)_s^i(w^\alpha)_j^s, \quad (1.12)$$

$$g^{is}g^{jr}\frac{\partial (w^\alpha)_r^k}{\partial u^s} - g^{jr}b_s^{ik}(w^\alpha)_r^s = g^{js}g^{ir}\frac{\partial (w^\alpha)_r^k}{\partial u^s} - g^{ir}b_s^{jk}(w^\alpha)_r^s, \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} & g^{is}\left(\frac{\partial b_r^{jk}}{\partial u^s} - \frac{\partial b_s^{jk}}{\partial u^r}\right) + b_s^{ik}b_r^{sj} - b_s^{ij}b_r^{sk} = \\ & = \sum_{\alpha=1}^L \varepsilon_\alpha g^{is}((w^\alpha)_s^j(w^\alpha)_r^k - (w^\alpha)_r^j(w^\alpha)_s^k). \end{aligned} \quad (1.14)$$

1.3. Согласованные скобки Пуассона. В работе [5] Магри предложил бигамильтонов подход к интегрированию нелинейных систем, показав, что интегрируемость тесно связана с бигамильтоновостью, т.е. с наличием у системы двух согласованных гамильтоновых представлений. Две скобки Пуассона $\{\cdot, \cdot\}_1$ и $\{\cdot, \cdot\}_2$ называются *согласованными*, если их произвольная линейная комбинация

$$\{\cdot, \cdot\} = \lambda_1 \{\cdot, \cdot\}_1 + \lambda_2 \{\cdot, \cdot\}_2, \quad (1.15)$$

где λ_1 и λ_2 — произвольные константы, также является скобкой Пуассона [5]. В этом случае говорят также, что скобки $\{\cdot, \cdot\}_1$ и $\{\cdot, \cdot\}_2$ образуют *пучок скобок Пуассона*. Как показано Магри [5], согласованные скобки Пуассона порождают интегрируемые иерархии систем дифференциальных уравнений. В частности, бигамильтоновость системы порождает рекуррентные соотношения для законов сохранения этой системы.

1.4. Согласованные псевдоримановы метрики. Две псевдоримановы контравариантные метрики $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ называются *согласованными*, если для любой их линейной комбинации $g^{ij}(u) = \lambda_1 g_1^{ij}(u) + \lambda_2 g_2^{ij}(u)$, где λ_1 и λ_2 — произвольные константы, для которых $\det(g^{ij}(u)) \neq 0$, коэффициенты соответствующих связностей Леви-Чивита и компоненты соответствующих тензоров римановой кривизны связаны тем же самым соотношением: $\Gamma_k^{ij}(u) = \lambda_1 \Gamma_{1,k}^{ij}(u) + \lambda_2 \Gamma_{2,k}^{ij}(u)$ и $R_{kl}^{ij}(u) = \lambda_1 R_{1,kl}^{ij}(u) + \lambda_2 R_{2,kl}^{ij}(u)$ (в этом случае мы будем также говорить, что *метрики $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ образуют пучок согласованных метрик*) [6], [7]. Плоские пучки метрик, т.е. не что иное, как согласованные невырожденные локальные скобки Пуассона гидродинамического типа (согласованные скобки Дубровина–Новикова [2]), были введены в работе [8]. Две псевдоримановы контравариантные метрики $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ постоянной римановой кривизны K_1 и K_2 , соответственно, называются *согласованными*, если любая линейная комбинация этих метрик $g^{ij}(u) = \lambda_1 g_1^{ij}(u) + \lambda_2 g_2^{ij}(u)$, где λ_1 и λ_2 — произвольные константы, для которых $\det(g^{ij}(u)) \neq 0$, является метрикой постоянной римановой кривизны $\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2$, а коэффициенты соответствующих связностей Леви-Чивита связаны тем же самым соотношением: $\Gamma_k^{ij}(u) = \lambda_1 \Gamma_{1,k}^{ij}(u) + \lambda_2 \Gamma_{2,k}^{ij}(u)$ [6], [7]. В этом случае мы будем также говорить, что *метрики $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ образуют пучок согласованных метрик постоянной римановой кривизны* [6], [7]. Очевидно, что все эти определения взаимно согласованы, так что если согласованные метрики являются метриками постоянной римановой кривизны, то они образуют пучок согласованных метрик постоянной римановой кривизны, и если согласованные метрики плоские, то они образуют плоский пучок согласованных метрик. Пара псевдоримановых метрик $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ называется *неособой*, если собственные значения этой пары метрик, т.е. корни уравнения $\det(g_1^{ij}(u) - \lambda g_2^{ij}(u)) = 0$, различны (пучок метрик, образованный неособой парой метрик, также называется *неособым*). В работе [6] доказано, что произвольная неособая пара метрик согласована тогда и только тогда, когда существуют локальные координаты $u = (u^1, \dots, u^N)$ такие, что обе метрики диагональны в этих координатах и имеют

следующий специальный вид (можно считать, что одна из метрик, здесь $g_2^{ij}(u)$, является произвольной диагональной метрикой): $g_2^{ij}(u) = g^i(u)\delta^{ij}$ и $g_1^{ij}(u) = f^i(u)g^i(u)\delta^{ij}$, где $f^i(u^i)$, $i = 1, \dots, N$, — функции одной переменной (вообще говоря, комплексные). Очевидно, что собственные значения указанной пары метрик задаются функциями $f^i(u^i)$, $i = 1, \dots, N$.

2. СОГЛАСОВАННЫЕ МЕТРИКИ И СОГЛАСОВАННЫЕ НЕЛОКАЛЬНЫЕ СКОБКИ ПУАССОНА ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА

Рассмотрим две произвольные нелокальные скобки Пуассона гидродинамического типа:

$$\begin{aligned} \{I, J\}_1 = & \int \frac{\delta I}{\delta u^i(x)} \left(g_1^{ij}(u(x)) \frac{d}{dx} + b_{1,k}^{ij}(u(x)) u_x^k + \right. \\ & \left. + \sum_{\alpha=1}^{L_1} \varepsilon_{1,\alpha} (w_1^\alpha)_k^i(u(x)) u_x^k \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} (w_1^\alpha)_s^j(u(x)) u_x^s \right) \frac{\delta J}{\delta u^j(x)} dx, \quad (2.1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{I, J\}_2 = & \int \frac{\delta I}{\delta u^i(x)} \left(g_2^{ij}(u(x)) \frac{d}{dx} + b_{2,k}^{ij}(u(x)) u_x^k + \right. \\ & \left. + \sum_{\gamma=1}^{L_2} \varepsilon_{2,\gamma} (w_2^\gamma)_k^i(u(x)) u_x^k \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} (w_2^\gamma)_s^j(u(x)) u_x^s \right) \frac{\delta J}{\delta u^j(x)} dx. \quad (2.2) \end{aligned}$$

В работе [6] было доказано, что если скобки Пуассона (2.1) и (2.2) согласованы, то метрики $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ этих скобок тоже согласованы. Более того, там было доказано также, что если пара метрик $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ является неособой и метрики $g_1^{ij}(u)$, $g_2^{ij}(u)$ и аффиноры $(w_1^\alpha)_j^i(u)$, $(w_2^\gamma)_j^i(u)$ одновременно диагонализуются в некоторой области локальных координат, то скобки Пуассона (2.1) и (2.2) согласованы тогда и только тогда, когда согласованы их метрики $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$. Здесь мы доказываем очень важную (в некотором смысле обратную) теорему, которая абсолютно необходима для нашего метода интегрирования уравнений для общих неособых пар произвольных согласованных нелокальных скобок Пуассона гидродинамического типа (пара скобок Пуассона (2.1) и (2.2) называется *неособой*, если пара метрик $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ является неособой).

ТЕОРЕМА 2.1. *Если пара метрик $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ является неособой, то скобки Пуассона $\{I, J\}_1$ и $\{I, J\}_2$ согласованы тогда и только тогда, когда метрики $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ согласованы и эти метрики и аффиноры $(w_1^\alpha)_j^i(u)$, $(w_2^\gamma)_j^i(u)$ одновременно диагонализуются в некоторой области локальных координат.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Здесь достаточно показать, что если пара метрик $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ является неособой и скобки Пуассона (2.1) и (2.2) согласованы, то метрики $g_1^{ij}(u)$, $g_2^{ij}(u)$ и аффиноры $(w_1^\alpha)_j^i(u)$, $(w_2^\gamma)_j^i(u)$ одновременно диагонализуются в некоторой области

локальных координат, поскольку все остальные утверждения теоремы были доказаны в работе [6]. Прежде всего, там было доказано, что в рассматриваемом случае метрики $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ обязательно согласованы. Напомним, что если пара метрик является неособой, то эти метрики согласованы тогда и только тогда, когда существуют локальные координаты такие, что метрики диагональны и имеют следующий специальный вид в этих координатах: $g_2^{ij}(u) = g^i(u)\delta^{ij}$ и $g_1^{ij}(u) = f^i(u^i)g^i(u)\delta^{ij}$, где $f^i(u^i)$, $1 \leq i \leq N$, – функции одной переменной [6]. Функции $f^i(u^i)$ – собственные значения пары метрик $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$, так что по предположению теоремы они различны даже в том случае, когда являются константами. Из согласованности скобок Пуассона $\{I, J\}_1$ и $\{I, J\}_2$ (необходимо рассмотреть соотношение (1.11) для пучка $\{I, J\}_1 + \lambda\{I, J\}_2$) следует, что

$$g_1^{is}(w_2^\gamma)_s^j = g_1^{js}(w_2^\gamma)_s^i, \quad (2.3)$$

$$g_2^{is}(w_1^\alpha)_s^j = g_2^{js}(w_1^\alpha)_s^i. \quad (2.4)$$

Кроме того, из соотношения (1.11) для скобок Пуассона $\{I, J\}_1$ и $\{I, J\}_2$ имеем

$$g_1^{is}(w_1^\alpha)_s^j = g_1^{js}(w_1^\alpha)_s^i, \quad (2.5)$$

$$g_2^{is}(w_2^\gamma)_s^j = g_2^{js}(w_2^\gamma)_s^i. \quad (2.6)$$

Из (2.3) и (2.6) в наших специальных локальных координатах получаем (здесь нет суммирования по повторяющимся индексам i и j)

$$g^i(w_2^\gamma)_i^j = g^j(w_2^\gamma)_j^i, \quad (2.7)$$

$$f^i(u^i)g^i(w_2^\gamma)_i^j = f^j(u^j)g^j(w_2^\gamma)_j^i. \quad (2.8)$$

Таким образом,

$$(w_2^\gamma)_j^i = \frac{g^i}{g^j}(w_2^\gamma)_i^j = \frac{f^i(u^i)g^i}{f^j(u^j)g^j}(w_2^\gamma)_i^j, \quad (2.9)$$

т.е.

$$\left(1 - \frac{f^i(u^i)}{f^j(u^j)}\right)(w_2^\gamma)_i^j = 0. \quad (2.10)$$

Следовательно, поскольку все функции $f^i(u^i)$ различны, получаем

$$(w_2^\gamma)_i^j = 0 \quad (2.11)$$

при $i \neq j$. Аналогично из (2.4) и (2.5) имеем

$$(w_1^\alpha)_i^j = 0 \quad (2.12)$$

при $i \neq j$. Таким образом, теорема 2.1 доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Если пара метрик $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ является неособой, то скобки Пуассона $\{I, J\}_1$ и $\{I, J\}_2$ согласованы тогда и только тогда, когда существуют локальные координаты такие, что в этих координатах

$$g_2^{ij}(u) = g^i(u)\delta^{ij}, \quad g_1^{ij}(u) = f^i(u^i)g^i(u)\delta^{ij}, \quad (2.13)$$

$$(w_2^\gamma)_j^i(u) = (w_2^\gamma)^i(u)\delta_j^i, \quad (w_1^\alpha)_j^i(u) = (w_1^\alpha)^i(u)\delta_j^i. \quad (2.14)$$

3. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ НЕОСОБЫХ ПАР СОГЛАСОВАННЫХ НЕЛОКАЛЬНЫХ СКОБОК ПУАССОНА ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА

Рассмотрим произвольную неособую пару согласованных нелокальных скобок Пуассона гидродинамического типа (2.1) и (2.2), т.е. будем предполагать, что эти скобки Пуассона согласованы и пара метрик $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ является неособой.

ТЕОРЕМА 3.1. *Неособые пары согласованных нелокальных скобок Пуассона гидродинамического типа описываются следующими совместными интегрируемыми нелинейными системами:*

$$\frac{\partial H_{2,j}^\gamma}{\partial u^i} = \beta_{ij} H_{2,i}^\gamma, \quad i \neq j, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \beta_{ij}}{\partial u^k} = \beta_{ik} \beta_{kj}, \quad i \neq j, \quad i \neq k, \quad j \neq k, \quad (3.2)$$

$$\epsilon_2^i \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial u^i} + \epsilon_2^j \frac{\partial \beta_{ji}}{\partial u^j} + \sum_{s \neq i, s \neq j} \epsilon_2^s \beta_{si} \beta_{sj} + \sum_{\gamma=1}^{L_2} \epsilon_{2,\gamma} H_{2,i}^\gamma H_{2,j}^\gamma = 0, \quad i \neq j, \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} & \epsilon_2^i f^i(u^i) \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial u^i} + \frac{1}{2} \epsilon_2^i (f^i)' \beta_{ij} + \epsilon_2^j f^j(u^j) \frac{\partial \beta_{ji}}{\partial u^j} + \frac{1}{2} \epsilon_2^j (f^j)' \beta_{ji} + \\ & + \sum_{s \neq i, s \neq j} \epsilon_2^s f^s(u^s) \beta_{si} \beta_{sj} + \sum_{\alpha=1}^{L_1} \epsilon_{1,\alpha} H_{1,i}^\alpha H_{1,j}^\alpha = 0, \quad i \neq j, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial H_{1,j}^\alpha}{\partial u^i} = \beta_{ij} H_{1,i}^\alpha, \quad i \neq j, \quad (3.5)$$

где $f^i(u^i)$, $i = 1, \dots, N$, – произвольные заданные ненулевые функции одной переменной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В соответствии с теоремой 2.1 и следствием из нее существуют локальные координаты такие, что в них $g_2^{ij}(u) = g^i(u) \delta^{ij}$, $g_1^{ij}(u) = f^i(u^i) g^i(u) \delta^{ij}$, $(w_2^\gamma)_j^i(u) = (w_2^\gamma)^i(u) \delta_j^i$, $(w_1^\alpha)_j^i(u) = (w_1^\alpha)^i(u) \delta_j^i$. Более того, в соответствии с той же самой теоремой 2.1 любая пара скобок Пуассона вида (2.1), (2.2), (2.13), (2.14) является согласованной. Таким образом, достаточно рассмотреть условия, что скобки $\{I, J\}_1$ и $\{I, J\}_2$ этого специального вида являются скобками Пуассона. Если метрика $g^{ij}(u)$ и все аффиноры $(w^\alpha)_j^i(u)$ скобки (1.4) диагональны, то условия (1.8)–(1.14) принимают особенно простой вид. Рассмотрим их для скобки $\{I, J\}_2$ в наших специальных локальных координатах.

Введем стандартные классические обозначения

$$g^i(u) = \frac{\epsilon_2^i}{(H_i(u))^2}, \quad ds^2 = \sum_{i=1}^N \epsilon_2^i (H_i(u))^2 (du^i)^2, \quad (3.6)$$

$$\beta_{ik}(u) = \frac{1}{H_i(u)} \frac{\partial H_k}{\partial u^i}, \quad i \neq k, \quad (3.7)$$

где $H_i(u)$ – коэффициенты Ламе, $\beta_{ik}(u)$ – коэффициенты вращения, $\epsilon_2^i = \pm 1$, $i = 1, \dots, N$. Хотя в нашем случае все функции, вообще говоря, комплексные, мы будем пользоваться формулами, удобными также и в чисто вещественном случае.

В рассматриваемом “диагональном” случае условия того, что скобка $\{I, J\}_2$ является скобкой Пуассона, эквивалентны уравнениям Гаусса–Кодацци для поверхностей с плоской нормальной связностью и голономной сетью линий кривизны в евклидовом или псевдоевклидовом пространстве (см. [9]). Следуя работам [9], [10], введем функции $H_{2,i}^\gamma(u)$, $1 \leq i \leq N$, $1 \leq \gamma \leq L_2$, такие, что

$$(w_2^\gamma)^i(u) = \frac{H_{2,i}^\gamma(u)}{H_i(u)}. \quad (3.8)$$

Тогда условия (1.8)–(1.14) для скобки $\{I, J\}_2$ принимают вид (см. [9])

$$\frac{\partial H_{2,j}^\gamma}{\partial u^i} = \beta_{ij} H_{2,i}^\gamma, \quad i \neq j, \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial \beta_{ij}}{\partial u^k} = \beta_{ik} \beta_{kj}, \quad i \neq j, \quad i \neq k, \quad j \neq k, \quad (3.10)$$

$$\epsilon_2^i \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial u^i} + \epsilon_2^j \frac{\partial \beta_{ji}}{\partial u^j} + \sum_{s \neq i, s \neq j} \epsilon_2^s \beta_{si} \beta_{sj} + \sum_{\gamma=1}^{L_2} \epsilon_{2,\gamma} H_{2,i}^\gamma H_{2,j}^\gamma = 0, \quad i \neq j. \quad (3.11)$$

Для метрики $g_1^{ij}(u) = f^i(u^i)g^i(u)\delta^{ij}$ коэффициенты Ламе $\tilde{H}_i(u)$ и коэффициенты вращения $\tilde{\beta}_{ik}(u)$ имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{H}_i(u) &= \frac{H_i(u)}{\sqrt{\epsilon_1^i f^i(u^i)}}, \quad f^i(u^i)g^i(u) = \frac{\epsilon_1^i \epsilon_2^i}{(\tilde{H}_i(u))^2}, \\ ds^2 &= \sum_{i=1}^N \epsilon_1^i \epsilon_2^i (\tilde{H}_i(u))^2 (du^i)^2, \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_{ik}(u) &= \frac{1}{\tilde{H}_i(u)} \frac{\partial \tilde{H}_k}{\partial u^i} = \frac{\sqrt{\epsilon_1^i f^i(u^i)}}{\sqrt{\epsilon_1^k f^k(u^k)}} \left(\frac{1}{H_i(u)} \frac{\partial H_k}{\partial u^i} \right) = \\ &= \frac{\sqrt{\epsilon_1^i f^i(u^i)}}{\sqrt{\epsilon_1^k f^k(u^k)}} \beta_{ik}(u), \quad i \neq k, \end{aligned} \quad (3.13)$$

где $\epsilon_1^i = \pm 1$.

Кроме того, введем функции $\tilde{H}_{1,i}^\alpha(u)$ и $H_{1,i}^\alpha(u)$, $1 \leq i \leq N$, $1 \leq \alpha \leq L_1$, такие, что

$$(w_1^\alpha)^i(u) = \frac{\tilde{H}_{1,i}^\alpha(u)}{\tilde{H}_i(u)} = \sqrt{\epsilon_1^i f^i(u^i)} \frac{\tilde{H}_{1,i}^\alpha(u)}{H_i(u)} = \frac{H_{1,i}^\alpha(u)}{H_i(u)}. \quad (3.14)$$

Условия (1.8)–(1.14) для скобки $\{I, J\}_1$ эквивалентны уравнениям (3.9)–(3.11) для метрики $g_1^{ij}(u) = f^i(u^i)g^i(u)\delta^{ij}$ и аффиноров $(w_1^\alpha)^i(u)\delta_j^i$. В этом случае уравнения (3.10) для коэффициентов вращения $\tilde{\beta}_{ik}(u)$ эквивалентны уравнениям (3.10) для коэффициентов вращения $\beta_{ik}(u)$, а уравнения (3.9) и (3.11) превращаются в уравнения (3.5) и (3.4), соответственно.

Легко показать, что уравнения (3.3), (3.4) для неособых пар метрик (т.е. все функции $f^i(u^i)$ должны быть различными также и в том случае, если они являются константами) эквивалентны следующим эволюционным уравнениям (в частности, гораздо удобнее использовать именно эти уравнения для проверки совместности системы (3.1)–(3.5)):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial u^i} = & \frac{1}{2} \frac{(f^i(u^i))'}{(f^j(u^j) - f^i(u^i))} \beta_{ij} + \frac{\epsilon_2^i \epsilon_2^j}{2} \frac{(f^j(u^j))'}{(f^j(u^j) - f^i(u^i))} \beta_{ji} - \\ & - \sum_{s \neq i, s \neq j} \epsilon_2^i \epsilon_2^s \frac{(f^j(u^j) - f^s(u^s))}{(f^j(u^j) - f^i(u^i))} \beta_{si} \beta_{sj} + \sum_{\alpha=1}^{L_1} \frac{\epsilon_2^i \epsilon_{1,\alpha}}{(f^j(u^j) - f^i(u^i))} H_{1,i}^\alpha H_{1,j}^\alpha - \\ & - \sum_{\gamma=1}^{L_2} \frac{\epsilon_2^i \epsilon_{2,\gamma} f^j(u^j)}{(f^j(u^j) - f^i(u^i))} H_{2,i}^\gamma H_{2,j}^\gamma, \quad i \neq j. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Таким образом, для любых функций $f^i(u^i)$ система уравнений (3.1)–(3.5), (3.7) эквивалентна совместной системе эволюционных уравнений. Более того, общее решение нелинейной системы (3.1)–(3.5), (3.7) зависит от $N(N + L_1 + L_2)$ произвольных функций одной переменной (функции $\beta_{ij}(u)$, $H_j(u)$, $H_{1,j}^\alpha(u)$, $H_{2,j}^\gamma(u)$ могут быть заданы произвольным образом на j -й координатной линии).

Отметим, что если среди функций $f^i(u^i)$ есть совпадающие (в этом случае они обязаны быть совпадающими константами), то система уравнений (3.1)–(3.5), (3.7) также описывает пару согласованных нелокальных скобок Пуассона гидродинамического типа, но, очевидно, эта пара не является неособой.

4. ПАРА ЛАКСА ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ НЕОСОБОЙ ПАРЫ СОГЛАСОВАННЫХ НЕЛОКАЛЬНЫХ СКОБОК ПУАССОНА ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА

Пару Лакса со спектральным параметром для системы (3.1)–(3.5), (3.7) можно получить из линейной задачи для системы (3.1)–(3.3), описывающей все N -мерные поверхности (в $(N + L_2)$ -мерном евклидовом или псевдоевклидовом пространстве) с плоской нормальной связностью и голономной сетью линий кривизны. Уравнения (3.1)–(3.3) являются условиями совместности для следующей линейной системы:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial u^k} = \frac{\sqrt{\epsilon_2^i}}{\sqrt{\epsilon_2^k}} \beta_{ik} \varphi_k, \quad i \neq k, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial u^i} = - \sum_{k \neq i} \frac{\sqrt{\epsilon_2^k}}{\sqrt{\epsilon_2^i}} \beta_{ki} \varphi_k + \sum_{\gamma=1}^{L_2} \frac{\sqrt{\varepsilon_{2,\gamma}}}{\sqrt{\epsilon_2^i}} H_{2,i}^\gamma \psi^\gamma, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial \psi^\gamma}{\partial u^i} = - \frac{\sqrt{\varepsilon_{2,\gamma}}}{\sqrt{\epsilon_2^i}} H_{2,i}^\gamma \varphi_i. \quad (4.3)$$

Условие, что скобка $\{I, J\} = \{I, J\}_1 + \lambda \{I, J\}_2$ является скобкой Пуассона для любого λ , эквивалентно системе уравнений (3.1)–(3.3) для метрики $(\lambda + f^i(u^i))g^i(u)\delta^{ij}$ и аффиноров $(w_1^\alpha)^i(u)\delta_j^\alpha$, $1 \leq \alpha \leq L_1$, и $\sqrt{\lambda}(w_2^\gamma)^i(u)\delta_j^\gamma$, $1 \leq \gamma \leq L_2$.

В этом случае линейная задача (4.1)–(4.3) превращается в пару Лакса со спектральным параметром λ для произвольной неособой пары согласованных нелокальных скобок Пуассона гидродинамического типа:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial u^k} = \frac{\sqrt{\epsilon_2^i(\lambda + f^i)}}{\sqrt{\epsilon_2^k(\lambda + f^k)}} \beta_{ik} \varphi_k, \quad i \neq k, \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_i}{\partial u^i} = & - \sum_{k \neq i} \frac{\sqrt{\epsilon_2^k(\lambda + f^k)}}{\sqrt{\epsilon_2^i(\lambda + f^i)}} \beta_{ki} \varphi_k + \\ & + \sum_{\gamma=1}^{L_2} \frac{\sqrt{\varepsilon_{2,\gamma}\lambda}}{\sqrt{\epsilon_2^i(\lambda + f^i)}} H_{2,i}^\gamma \psi^\gamma + \sum_{\alpha=1}^{L_1} \frac{\sqrt{\varepsilon_{1,\alpha}}}{\sqrt{\epsilon_2^i(\lambda + f^i)}} H_{1,i}^\alpha \chi^\alpha, \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial \psi^\gamma}{\partial u^i} = - \frac{\sqrt{\varepsilon_{2,\gamma}\lambda}}{\sqrt{\epsilon_2^i(\lambda + f^i)}} H_{2,i}^\gamma \varphi_i, \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial \chi^\alpha}{\partial u^i} = - \frac{\sqrt{\varepsilon_{1,\alpha}}}{\sqrt{\epsilon_2^i(\lambda + f^i)}} H_{1,i}^\alpha \varphi_i. \quad (4.7)$$

Условие совместности системы (4.4)–(4.7) эквивалентно системе (3.1)–(3.5), (3.7). Наличие пары Лакса (4.4)–(4.7) со спектральным параметром доказывает интегрируемость системы (3.1)–(3.5), (3.7), описывающей произвольные неособые пары согласованных нелокальных скобок Пуассона гидродинамического типа.

Если $H_{1,i}^\alpha(u) = 0$, $1 \leq i \leq N$, $1 \leq \alpha \leq L_1$, и $H_{2,i}^\gamma(u) = 0$, $1 \leq i \leq N$, $1 \leq \gamma \leq L_2$, то система (3.1)–(3.5), (3.7) описывает согласованные локальные скобки Пуассона гидродинамического типа (согласованные скобки Дубровина–Новикова или, другими словами, плоские пучки метрик). Эта система была получена и проинтегрирована автором методом обратной задачи рассеяния в работах [11] с использованием метода дифференциальных редукций Захарова [12]. Пара Лакса для этой системы была указана Ферапонтовым в работе [13].

Если $H_{1,i}^\alpha(u) = \sqrt{\varepsilon_{1,1}K_1}H_i(u)$, $1 \leq i \leq N$, $L_1 = 1$, $\alpha = 1$, и $H_{2,i}^\gamma(u) = \sqrt{\varepsilon_{2,1}K_2} \times H_i(u)$, $1 \leq i \leq N$, $L_2 = 1$, $\gamma = 1$, то система (3.1)–(3.5), (3.7) описывает произвольные согласованные нелокальные скобки Пуассона гидродинамического типа, порождаемые метриками постоянной кривизны (согласованные скобки Мохова–Ферапонтова, или

пучки согласованных метрик постоянной кривизны). Эта система получена и проинтегрирована автором в работах [14], где, в частности, построена пара Лакса со спектральным параметром для такой системы.

5. ИНТЕГРИРУЕМЫЕ РЕДУКЦИИ УРАВНЕНИЙ ЛАМЕ

Если $H_{2,i}^\gamma(u) = 0$, $1 \leq i \leq N$, $1 \leq \gamma \leq L_2$, то уравнения (3.2), (3.3) являются классическими уравнениями Ламе, описывающими все ортогональные криволинейные системы координат в N -мерных евклидовых или псевдоевклидовых пространствах. Интегрируемые системы (3.1)–(3.5), (3.7) описывают в этом случае все неособые пары согласованных скобок Пуассона гидродинамического типа, одна из которых является локальной:

$$\frac{\partial \beta_{ij}}{\partial u^k} = \beta_{ik} \beta_{kj}, \quad i \neq j, \quad i \neq k, \quad j \neq k, \quad (5.1)$$

$$\epsilon_2^i \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial u^i} + \epsilon_2^j \frac{\partial \beta_{ji}}{\partial u^j} + \sum_{s \neq i, s \neq j} \epsilon_2^s \beta_{si} \beta_{sj} = 0, \quad i \neq j, \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} & \epsilon_2^i f^i(u^i) \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial u^i} + \frac{1}{2} \epsilon_2^i (f^i)' \beta_{ij} + \epsilon_2^j f^j(u^j) \frac{\partial \beta_{ji}}{\partial u^j} + \frac{1}{2} \epsilon_2^j (f^j)' \beta_{ji} + \\ & + \sum_{s \neq i, s \neq j} \epsilon_2^s f^s(u^s) \beta_{si} \beta_{sj} + \sum_{\alpha=1}^{L_1} \varepsilon_{1,\alpha} H_{1,i}^\alpha H_{1,j}^\alpha = 0, \quad i \neq j, \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial H_{1,j}^\alpha}{\partial u^i} = \beta_{ij} H_{1,i}^\alpha, \quad i \neq j. \quad (5.4)$$

Эти системы всегда определяют интегрируемые редукции уравнений Ламе (5.1), (5.2). Для таких редукций соответствующие пары Лакса со спектральным параметром имеют вид

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial u^k} = \frac{\sqrt{\epsilon_2^i(\lambda + f^i)}}{\sqrt{\epsilon_2^k(\lambda + f^k)}} \beta_{ik} \varphi_k, \quad i \neq k, \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial u^i} = - \sum_{k \neq i} \frac{\sqrt{\epsilon_2^k(\lambda + f^k)}}{\sqrt{\epsilon_2^i(\lambda + f^i)}} \beta_{ki} \varphi_k + \sum_{\alpha=1}^{L_1} \frac{\sqrt{\varepsilon_{1,\alpha}}}{\sqrt{\epsilon_2^i(\lambda + f^i)}} H_{1,i}^\alpha \chi^\alpha, \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial \chi^\alpha}{\partial u^i} = - \frac{\sqrt{\varepsilon_{1,\alpha}}}{\sqrt{\epsilon_2^i(\lambda + f^i)}} H_{1,i}^\alpha \varphi_i. \quad (5.7)$$

Важно отметить, что для любого решения этих интегрируемых редукций уравнений Ламе в работе [1] построены в явном виде интегрируемые бигамильтоновы иерархии, порождаемые соответствующими согласованными скобками Пуассона гидродинамического типа. При этом общее решение нелинейной системы (5.1)–(5.4), (3.7) зависит от

$N(N + L_1)$ произвольных функций одной переменной (функции $\beta_{ij}(u)$, $H_j(u)$, $H_{1,j}^\alpha(u)$ могут быть заданы произвольным образом на j -й координатной линии).

Аналогично мы можем построить пару Лакса со спектральным параметром для различных специальных частных случаев уравнений, описывающих согласованные нелокальные скобки Пуассона гидродинамического типа. Многие специальные виды функций $H_{2,i}^\gamma(u)$, $H_{1,i}^\alpha(u)$ соответствуют различным специальным классам подмногообразий и определяют естественные интегрируемые редукции, имеющие разнообразный геометрический смысл и представляющие самостоятельный интерес. Пары Лакса со спектральным параметром для этих случаев легко получаются из пары Лакса (4.4)–(4.7). Например, мы легко получаем интегрируемые редукции уравнений, описывающих все ортогональные криволинейные системы координат в пространствах постоянной кривизны K (в этом случае $H_{2,i}^\gamma(u) = \sqrt{\varepsilon_{2,1}K}H_i(u)$, $L_2 = 1$, $\gamma = 1$):

$$\frac{\partial H_j}{\partial u^i} = \beta_{ij}H_i, \quad i \neq j, \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial \beta_{ij}}{\partial u^k} = \beta_{ik}\beta_{kj}, \quad i \neq j, \quad i \neq k, \quad j \neq k, \quad (5.9)$$

$$\epsilon_2^i \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial u^i} + \epsilon_2^j \frac{\partial \beta_{ji}}{\partial u^j} + \sum_{s \neq i, s \neq j} \epsilon_2^s \beta_{si}\beta_{sj} + KH_iH_j = 0, \quad i \neq j, \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} & \epsilon_2^i f^i(u^i) \frac{\partial \beta_{ij}}{\partial u^i} + \frac{1}{2} \epsilon_2^i (f^i)' \beta_{ij} + \epsilon_2^j f^j(u^j) \frac{\partial \beta_{ji}}{\partial u^j} + \frac{1}{2} \epsilon_2^j (f^j)' \beta_{ji} + \\ & + \sum_{s \neq i, s \neq j} \epsilon_2^s f^s(u^s) \beta_{si}\beta_{sj} + \sum_{\alpha=1}^{L_1} \varepsilon_{1,\alpha} H_{1,i}^\alpha H_{1,j}^\alpha = 0, \quad i \neq j, \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\frac{\partial H_{1,j}^\alpha}{\partial u^i} = \beta_{ij}H_{1,i}^\alpha, \quad i \neq j. \quad (5.12)$$

Пара Лакса со спектральным параметром для этих интегрируемых редукций имеет вид

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial u^k} = \frac{\sqrt{\epsilon_2^i(\lambda + f^i)}}{\sqrt{\epsilon_2^k(\lambda + f^k)}} \beta_{ik} \varphi_k, \quad i \neq k, \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_i}{\partial u^i} = & - \sum_{k \neq i} \frac{\sqrt{\epsilon_2^k(\lambda + f^k)}}{\sqrt{\epsilon_2^i(\lambda + f^i)}} \beta_{ki} \varphi_k + \\ & + \frac{\sqrt{\lambda K}}{\sqrt{\epsilon_2^i(\lambda + f^i)}} H_i \psi + \sum_{\alpha=1}^{L_1} \frac{\sqrt{\varepsilon_{1,\alpha}}}{\sqrt{\epsilon_2^i(\lambda + f^i)}} H_{1,i}^\alpha \chi^\alpha, \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial u^i} = - \frac{\sqrt{\lambda K}}{\sqrt{\epsilon_2^i(\lambda + f^i)}} H_i \varphi_i, \quad (5.15)$$

$$\frac{\partial \chi^\alpha}{\partial u^i} = - \frac{\sqrt{\varepsilon_{1,\alpha}}}{\sqrt{\epsilon_2^i(\lambda + f^i)}} H_{1,i}^\alpha \varphi_i. \quad (5.16)$$

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда Александра фон Гумбольдта (Германия), а также РФФИ (грант № 02-01-00803) и фонда INTAS (грант № 99-1782).

Список литературы

- [1] *О. И. Мохов.* ТМФ. 2002. Т. 132. № 1. С. 60–73; math.DG/0201242.
- [2] *Б. А. Дубровин, С. П. Новиков.* ДАН СССР. 1983. Т. 270. № 4. С. 781–785.
- [3] *О. И. Мохов, Е. В. Ферапонтов.* УМН. 1990. Т. 45. № 3. С. 191–192.
- [4] *Е. В. Ферапонтов.* Функц. анализ и его прилож. 1991. Т. 25. № 3. С. 37–49.
- [5] *F. Magri.* J. Math. Phys. 1978. V. 19. № 5. P. 1156–1162.
- [6] *О. И. Мохов.* Функц. анализ и его прилож. 2001. Т. 35. № 2. С. 24–36; math.DG/0005051.
- [7] *О. И. Мохов.* УМН. 2000. Т. 55. № 4. С. 217–218.
- [8] *B. Dubrovin.* Geometry of 2d topological field theories. In: Integrable Systems and Quantum Groups. Lect. Notes Math. V. 1620. Eds. M. Francaviglia et al., 1996. P. 120–348; hep-th/9407018.
- [9] *E. V. Ferapontov.* Diff. Geometry Appl. 2001. V. 14. P. 15–37; math.DG/9805012.
- [10] *L. P. Eisenhart.* Transformations of surfaces. New York: Chelsea Publishing Company, 1962.
- [11] *О. И. Мохов.* ТМФ. 2002. Т. 130. № 2. С. 233–250; math.DG/0005081; УМН. 2001. Т. 56. № 2. С. 221–222.
- [12] *V. E. Zakharov.* Duke Math. J. 1998. V. 94. № 1. P. 103–139.
- [13] *E. V. Ferapontov.* J. Phys. A. 2001. V. 34. № 11. P. 2377–2388; math.DG/0005221.
- [14] *О. И. Мохов.* Функц. анализ и его прилож. 2002. Т. 36. № 3. С. 36–47; math.DG/0201280; УМН. 2002. Т. 57. № 3. С. 155–156.

Поступила в редакцию 4.I.2003 г.