Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. А. Иоанниду, Нетривиальное рассеяние солитонов в $(2+1)$ -мерном пространстве анти-де Ситтера, *ТМФ*, 2003, том 137, номер 1, 137–141

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf251>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 12:40:30

© 2003 г.

Т. Иоанниду*

НЕТРИВИАЛЬНОЕ РАССЕЯНИЕ СОЛИТОНОВ В $(2 + 1)$ -МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ АНТИ-ДЕ СИТТЕРА

Интегрируемые решения уравнений Богомольного–Янга–Миллса–Хиггса в $(2 + 1)$ -мерном пространстве анти-де Ситтера находятся с помощью аналитических методов. В частности, приводится явная конструкция для семейств солитонных решений, динамика которых исследуется в некоторых деталях.

Ключевые слова: солитоны, интегрируемость, пространство анти-де Ситтера.

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной работе (более подробное изложение см. в [1]) рассматривается интегрируемая система [2], связанная с конструкцией гиперболических монополей. Исследуемая модель получается при замене положительно определенного пространства $\mathbb{H}^3$ в уравнениях гиперболических монополей на его лоренцев аналог, т.е. на пространство анти-де Ситтера. Версия Богомольного уравнений Янга–Миллса–Хиггса для полей Янга–Миллса–Хиггса на трехмерном римановом многообразии $\mathcal{M}$ с калибровочной группой $SU(2)$ имеет вид

$$D_i \Phi = \frac{1}{2\sqrt{|g|}} g_{ij} \epsilon^{jkl} F_{kl}, \quad (1)$$

где A_k , $k = 0, 1, 2$, – калибровочный потенциал, принимающий значения в алгебре $su(2)$ с тензором поля $F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i + [A_i, A_j]$, $\Phi = \Phi(x^\mu)$ – (скалярное) поле Хиггса, также принимающее значения в алгебре $su(2)$, а $x^\mu = (x^0, x^1, x^2)$ – локальные координаты на многообразии $\mathcal{M}$. Ковариантная производная $D_i = \partial_i + A_i$ действует на поле Φ по правилу $D_i \Phi = \partial_i \Phi + [A_i, \Phi]$. Уравнение (1) интегрируемо в том смысле, что в случае постоянной кривизны существует пара Лакса. В частности, решения уравнения (1) отвечают евклидовым или гиперболическим монополям Богомольного–Прасада–Зоммерфельда в зависимости от того, каким пространством локально является многообразие $(\mathcal{M}, g)$: евклидовым $\mathbb{R}^3$ или гиперболическим $\mathbb{H}^3$.

По определению $(2 + 1)$ -мерное пространство анти-де Ситтера представляет собой универсальное накрытие гиперблоида $\mathcal{H}$, задаваемого уравнением

$$U^2 + V^2 - X^2 - Y^2 = 1,$$

*Institute of Mathematics, University of Kent at Canterbury, Canterbury CT2 7NF, UK. E-mail: T.Ioannidou@ukc.ac.uk

где метрика имеет вид

$$ds^2 = -dU^2 - dV^2 + dX^2 + dY^2.$$

Вводя параметризацию гиперboloида $\mathcal{H}$

$$\begin{aligned} U &= \sec \rho \cos \theta, \\ V &= \sec \rho \sin \theta, \\ X &= \operatorname{tg} \rho \cos \phi, \\ Y &= \operatorname{tg} \rho \sin \phi, \end{aligned}$$

получим, что при $\rho \in [0, \pi/2)$ соответствующая метрика примет вид

$$ds^2 = \sec^2 \rho (-d\theta^2 + d\rho^2 + \sin^2 \rho d\phi^2).$$

Пространство-время содержит замкнутые времениподобные кривые ввиду периодичности переменной θ . На самом деле пространство анти-де Ситтера (как многообразие) представляет собой произведение открытого пространственного диска на переменную θ и имеет постоянную кривизну, равную минус шести, где (ρ, ϕ) соответствуют полярным координатам, а переменная $\theta \in \mathbb{R}$ играет роль времени. Исчезающая пространственная бесконечность $\mathcal{I}$ представляет собой времениподобный цилиндр $\rho = \pi/2$, и эта поверхность никогда не достигается никакой времениподобной геодезической.

Если задать координаты Пуанкаре (r, x, t) при $r > 0$ в виде

$$r = \frac{1}{U + X}, \quad x = \frac{Y}{U + X}, \quad t = \frac{-V}{U + X}, \quad (2)$$

то выражение для метрики упростится:

$$ds^2 = r^{-2} (-dt^2 + dr^2 + dx^2). \quad (3)$$

Заметим, что координаты Пуанкаре покрывают лишь малую область пространства анти-де Ситтера, а именно ту его часть, которая отвечает половине гиперboloида $\mathcal{H}$ при $U + X > 0$. Поверхность $r = 0$ представляет собой часть пространственной бесконечности $\mathcal{I}$.

Рассмотрим набор линейных уравнений

$$\begin{aligned} [rD_r - 2(\lambda - u)D_u - \Phi]\Psi &= 0, \\ \left[2D_v + \frac{\lambda - u}{r}D_r - \frac{\lambda - u}{r^2}\Phi \right]\Psi &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ и $r, u = x + t, v = x - t$ суть координаты Пуанкаре. Калибровочные поля (Φ, A_r, A_u, A_v) задаются (2×2) -матрицами с нулевым следом, зависящими только от переменных r, u, v , а $\Psi(\lambda, r, u, t)$ есть унимодулярная (2×2) -матричнозначная функция, удовлетворяющая условию вещественности $\Psi(\lambda)\Psi(\bar{\lambda})^\dagger = I$ (где крест обозначает транспонирование с одновременным комплексным сопряжением). Система уравнений (4) оказывается переопределенной, и для существования ее решения Ψ должны быть выполнены следующие условия интегрируемости:

$$\begin{aligned} D_u \Phi &= rF_{ur}, \\ D_v \Phi &= -rF_{vr}, \\ D_r \Phi &= -2rF_{uv}. \end{aligned} \quad (5)$$

Из пары Лакса (4) можно получить калибровочные поля и поле Хиггса в терминах функции Ψ . Заметим, что в пределе $\lambda \rightarrow \infty$ функция Ψ стремится к единичной матрице, что приводит к условиям

$$A_u = 0, \quad A_r = \frac{1}{r}\Phi. \quad (6)$$

С другой стороны, при $\lambda = 0$ остающиеся калибровочные поля, задаваемые выражениями (6), имеют вид

$$\begin{aligned} \Phi &= -\frac{r}{2} J_r J^{-1} - u J_u J^{-1}, \\ A_v &= \frac{u}{2r} J_r J^{-1} - J_v J^{-1}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $J(r, u, v) \doteq \Psi(\lambda = 0, r, u, v)$. Заметим, что в этом случае первое из уравнений системы (5) выполняется автоматически (ввиду специального выбора калибровки). Как было показано Уордом [2], голоморфные векторные расслоения V над многообразием Q задают с помощью стандартных преобразований Пенроуза мультисолитонные решения системы (5) в пространстве анти-де Ситтера. При этом так же, как и в случае плоского пространства-времени [3], получается пятипараметрическое семейство солитонных решений.

2. РАССЕЯНИЕ СОЛИТОНОВ

В рамках стандартного метода задачи Римана с нулями, применяемого при построении мультисолитонных решений, будем предполагать [3], что функция Ψ имеет простой вид относительно переменной λ :

$$\Psi = I + \sum_{k=1}^n \frac{M_k}{\lambda - \mu_k}, \quad (8)$$

где M_k суть (2×2) -матрицы, не зависящие от λ , а n — число солитонов. Компоненты матрицы M_k задаются с помощью рациональной функции $f_k(\omega_k) = a_k \omega_k + c_k$ от комплексного аргумента $\omega_k = v - r^2(\mu_k - u)^{-1}$. Здесь a_k , c_k и μ_k — комплексные константы, задающие размер, положение и скорость k -го солитона.

Матрица M_k имеет вид

$$M_k = \sum_{l=1}^n (\Gamma^{-1})^{kl} \bar{m}_a^l m_b^k,$$

где Γ^{-1} есть матрица, обратная матрице

$$\Gamma^{kl} = \sum_{a=1}^2 (\bar{\mu}_k - \mu_l)^{-1} \bar{m}_a^k m_a^l,$$

а m_a^k — голоморфные функции переменных ω_k вида $m_a^k = (m_1^k, m_2^k) = (1, f_k)$. При этом поля Янга–Миллса–Хиггса Φ , A_r , A_v , A_u могут быть получены непосредственно из представлений (6) и (7), и они при этом автоматически удовлетворяют системе уравнений (5). Соответствующие солитоны оказываются пространственно локализованными,

поскольку $\Phi \rightarrow 0$ в пространственной бесконечности (т.е. при $r = 0$). В этом случае рассеяние солитонов тривиально, т.е. они проходят один сквозь другой, испытывая нулевые фазовые сдвиги и не изменяя ни своей скорости, ни своей формы.

Метод задачи Римана с нулями предполагает, что параметры μ_k не равны друг другу, а также что $\bar{\mu}_k \neq \mu_l$ при всех k, l . Тем не менее в примерах, обобщающих эти построения, либо допускаются полюсы старшего порядка по переменным μ_k , либо возможны ситуации, когда $\bar{\mu}_k = \mu_l$. При применении этой процедуры к плоскому пространству-времени соответствующие солитоны рассеиваются нетривиально. В частности, при лобовых соударениях N неразличимых солитонов угол рассеяния возникающих солитонов по отношению к сталкивающимся равен π/N [4], [5].

Рассмотрим сначала пример, в котором функция Ψ имеет полюс второго порядка по переменной λ и не имеет других полюсов. Тогда функция Ψ может быть записана в виде

$$\Psi = I + \sum_{k=1}^2 \frac{R_k}{(\lambda - \mu)^k},$$

где R_k суть (2×2) -матрицы, не зависящие от λ . При этом, как и в случае плоского пространства-времени [4], функция Ψ задает решение системы (4) тогда и только тогда, когда она может быть факторизована в виде

$$\Psi(\lambda) = \left(1 - \frac{\bar{\mu} - \mu}{(\lambda - \mu)} \frac{q^\dagger \otimes q}{|q|^2}\right) \left(1 - \frac{\bar{\mu} - \mu}{(\lambda - \mu)} \frac{p^\dagger \otimes p}{|p|^2}\right) \quad (9)$$

для некоторых двух векторов q и p . Один из способов найти вид этих векторов состоит в том, чтобы рассмотреть формулу (8) при $n = 2$ и положить $\mu_1 = \mu + \epsilon$, $\mu_2 = \mu - \epsilon$, $f_1(\omega_1) = f(\omega_1) + \epsilon h(\omega_1)$ и $f_2(\omega_2) = f(\omega_2) - \epsilon h(\omega_2)$, предполагая, что функции f и h суть рациональные функции от одной переменной. В пределе $\epsilon \rightarrow 0$ векторы q и p имеют вид

$$\begin{aligned} q &= (1 + |f|^2)(1, f) + (\bar{\mu} - \mu) \left(\frac{r^2 f'}{(\mu - u)^2} + h \right) (\bar{f}, -1), \\ p &= (1, f). \end{aligned} \quad (10)$$

В этом случае следует наложить условие $f_2(\omega_2) - f_1(\omega_1) \rightarrow 0$ при $\epsilon \rightarrow 0$, чтобы обеспечить гладкость получающегося решения Ψ при всех r, u, v . В простейшем случае, когда $\mu = i$, $f(\omega) = \omega$ и $h(\omega) = 0$, величина $-\text{tr } \Phi^2$ имеет простой вид

$$-\text{tr } \Phi^2 = 32r^2 \frac{[(r^2 + x^2 - t^2 + 1)^2 + 4t^2][(r^2 + x^2 - t^2 - 1)^2 + 4x^2]}{\{[(r^2 + x^2 - t^2)^2 + 1 + 2t^2 + 2x^2]^2 + 4r^4\}^2},$$

который допускает обращение направления времени. Зависящее от времени решение представляет собой при этом движущуюся солитонную конфигурацию, перемещающуюся в направлении пространственной бесконечности ($r = 0$) при отрицательных t , достигающую ее при $t = 0$, а затем отражающуюся назад при положительных t . В течение этого процесса солитонная конфигурация деформируется.

В качестве второго примера рассмотрим обширное семейство решений, отвечающих случаю $\bar{\mu}_k = \mu_l$. Один из методов рассмотрения данной ситуации состоит в том, чтобы

взять решение (8) при $n = 2$, положить $\mu_1 = \mu + \epsilon$ и $\mu_2 = \bar{\mu} - \epsilon$ и затем сделать предельный переход $\epsilon \rightarrow 0$. Для того чтобы обеспечить гладкость получаемого решения Ψ , необходимо выбрать $f_1(\omega_1) = f(\omega_1)$ и $f_2(\omega_2) = -1/f(\omega_2) - \epsilon h(\omega_2)$, где f и h суть рациональные функции одной переменной. Вычисляя теперь предел, можно получить решение Ψ в виде

$$\Psi = I + \frac{n^1 \otimes m^1}{\lambda - \mu} + \frac{n^2 \otimes m^2}{\lambda - \bar{\mu}}, \quad (11)$$

где n^k и m^k , $k = 1, 2$, — комплекснозначные двухвекторные функции вида

$$m^1 = (1, f), \quad m^2 = (-\bar{f}, 1),$$

$$\begin{pmatrix} n^1 \\ n^2 \end{pmatrix} = \frac{2(\mu - \bar{\mu})}{4(1 + |f|^2)^2 - (\mu - \bar{\mu})^2 |w|^2} \begin{pmatrix} 2(1 + |f|^2) & -(\mu - \bar{\mu})\bar{w} \\ (\mu - \bar{\mu})w & -2(1 + |f|^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m^{1\dagger} \\ m^{2\dagger} \end{pmatrix}$$

с параметром

$$w \equiv \frac{2r^2}{(\mu - u)^2} f' + \bar{h} f^2.$$

Таким образом, получено решение, зависящее от одного свободного параметра μ и от двух произвольных рациональных функций $f = f(\omega)$ и $h = h(\bar{\omega})$. При выборе $\mu = i$, $f = \omega$ и $h = \bar{\omega}$ получается конфигурация, состоящая из двух солитонов с нетривиальным поведением при рассеянии. Величина $-\text{tr } \Phi^2$ снова имеет пиковые особенности в двух точках при отрицательных t , которые остаются различными и при $t = 0$, а затем при (положительных) временах t возникают два сдвинутых (по сравнению с исходными в момент времени $t = -3$) солитона. Форма этих солитонов также изменяется в процессе эволюции во времени.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, мы рассмотрели построение зависящих от времени решений, связанных с конструкцией гиперболических монополей. В частности, были построены семейства решения для версии Богомольного уравнений Янга–Миллса–Хиггса в $(2 + 1)$ -мерном пространстве анти-де Ситтера и исследованы некоторые вопросы динамики построенных решений.

Было бы интересно понять роль полюсов старших порядков в алгебро-геометрическом подходе типа теории твисторов, а также исследовать построение соответствующих решений и их динамику в пространстве де Ситтера. Наконец, было бы интересно расширить данное построение на случай калибровочных теорий в старших размерностях и исследовать процесс рассеяния соответствующих классических решений, равно как рассмотреть и изучить их некоммутативные обобщения (см., например, [6]).

Список литературы

- [1] *T. Ioannidou*. Nonlinearity. 2002. V. 15. P. 1489.
- [2] *R. S. Ward*. Asian J. Math. 1999. V. 3. P. 325.
- [3] *R. S. Ward*. J. Math. Phys. 1988. V. 29. P. 386.
- [4] *R. S. Ward*. Phys. Lett. A. 1995. V. 208. P. 203.
- [5] *T. Ioannidou*. J. Math. Phys. 1996. V. 37. P. 3422.
- [6] *O. Lechtenfeld, A. D. Popov*. Phys. Lett. B. 2001. V. 523. P. 178; hep-th/0108118.