Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Кокотов, Д. А. Короткин, В. Шрамченко, Неавтономные интегрируемые системы, связанные с пространствами Гурвица для родов 0 и 1, *ТМФ*, 2003, том 137, номер 1, 153–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf255>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 15:12:39

© 2003 г. А. Кокотов*, Д. Короткин*, В. Шрамченко*

НЕАВТОНОМНЫЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ, СВЯЗАННЫЕ С ПРОСТРАНСТВАМИ ГУРВИЦА ДЛЯ РОДОВ 0 И 1

Построено семейство неавтономных интегрируемых систем (деформаций главной киральной модели), связанных с пространствами Гурвица мероморфных функций на римановой сфере, цилиндре и торе. Приводятся дифференциальные уравнения, описывающие зависимость критических точек рациональных, эллиптических и тригонометрических функций от критических значений. Описывается связь с деформационным формализмом Бурцева–Михайлова–Захарова.

Ключевые слова: пространства Гурвица, деформации интегрируемых систем.

1. КРИТИЧЕСКИЕ ТОЧКИ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ НА РИМАНОВОЙ СФЕРЕ, ТОРЕ И ЦИЛИНДРЕ КАК ФУНКЦИИ КРИТИЧЕСКИХ ЗНАЧЕНИЙ

Настоящая статья является кратким изложением результатов работ [1].

1.1. Риманова сфера. Рассмотрим мероморфную функцию $R(\gamma)$ степени N на $\mathbb{CP}^1$, удовлетворяющую асимптотическому условию $R(\gamma) = \gamma + o(1)$ при $\gamma \rightarrow \infty$. Предположим, что все критические точки $\{\gamma_m\}$ этой функции (решения уравнения $R'(\gamma) = 0$) являются простыми и имеют несовпадающие образы – критические значения $\lambda_m = R(\gamma_m)$, $\lambda_m \neq \lambda_n$ при $m \neq n$. Число критических точек равно $2N - 2$. Уравнение $\lambda = R(\gamma)$ определяет N -листное накрытие $\mathcal{L}$ римановой сферы. Обозначим его точки ветвления через $P_1, \dots, P_{2N-2}$, и пусть их проекции на базу накрытия (λ -сферу) равны $\lambda_1, \dots, \lambda_{2N-2}$. Отображение $\gamma: \mathcal{L} \ni P \mapsto \gamma(P) \in \mathbb{CP}^1$ дает униформизацию компактной поверхности $\mathcal{L}$, и оказывается, что, как функция λ и $\lambda_1, \dots, \lambda_{2N-2}$, это отображение

*Department of Mathematics and Statistics, Concordia University, 7141 Sherbrooke West, Montreal H4B 1R6, Quebec, Canada.
E-mail: alexey@mathstat.concordia.ca; korotkin@mathstat.concordia.ca;
vasilisa@mathstat.concordia.ca

удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \lambda} = \sum_{n=1}^{2N-2} \frac{\alpha_n}{\gamma - \gamma_n} + 1, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \lambda_n} = -\frac{\alpha_n}{\gamma - \gamma_n}, \quad (2)$$

где α_m — функции от $\{\lambda_k\}$, а именно $\alpha_m = v_m^2/2$, причем v_m — коэффициент разложения функции $\gamma(P) = \gamma_m + v_m \sqrt{\lambda - \lambda_m} + O(\lambda - \lambda_m)$ в окрестности точки ветвления P_m по локальному параметру $\sqrt{\lambda - \lambda_m}$.

Условие совместности для системы (1), (2) дает систему обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $\gamma_m(\{\lambda_n\})$ и $\alpha_m(\{\lambda_n\})$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma_m}{\partial \lambda_n} &= \frac{\alpha_n}{\gamma_n - \gamma_m}, \quad m \neq n, & \frac{\partial \gamma_m}{\partial \lambda_m} &= 1 + \sum_{n=1, n \neq m}^{2N-2} \frac{\alpha_n}{\gamma_m - \gamma_n}, \\ \frac{\partial \alpha_m}{\partial \lambda_n} &= \frac{2\alpha_n \alpha_m}{(\gamma_n - \gamma_m)^2}, \quad m \neq n, & \frac{\partial \alpha_m}{\partial \lambda_m} &= - \sum_{n=1, n \neq m}^{2N-2} \frac{2\alpha_n \alpha_m}{(\gamma_n - \gamma_m)^2}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $m, n = 1, \dots, 2N - 2$. Система (3) описывает зависимость положений критических точек рационального отображения $R(\gamma)$ от их образов.

Рациональные функции, удовлетворяющие асимптотическому условию $R(\gamma) = \gamma + o(1)$ при $\gamma \rightarrow \infty$, можно записать в виде

$$R(\gamma) = \gamma + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{a_k}{\gamma - b_k},$$

использованном Купершмидтом и Маниным в теории уравнений Бенни [2]. Уравнения (3) для критических точек $R(\gamma)$ можно вывести из работ Гиббонса и Царева [3]; уравнения (1) и (2), по-видимому, являются новыми.

1.2. Тор. Аналогичную систему можно записать для функций на торе. Согласно формуле Римана–Гурвица мероморфная функция $R(\gamma)$ степени N на торе $T = \mathbb{C}/\{1, \mu\}$ имеет $2N$ критических точек в предположении, что они являются простыми. Мы также предполагаем, что соответствующие критические значения являются различными и конечными, т.е. определяемое уравнением $\lambda = R(\gamma)$ накрытие поверхности $\mathcal{L}$ рода 1 имеет N листов и $2N$ простых точек ветвления $P_1, \dots, P_{2N}$ с различными проекциями $\lambda_1, \dots, \lambda_{2N}$ на λ -сферу. Отображение униформизации $\gamma: \mathcal{L} \ni P \mapsto \gamma(P) \in T = \mathbb{C}/\{1, \mu\}$ компактной римановой поверхности $\mathcal{L}$ дается отображением Абеля — интегралом голоморфного нормированного (на единичный a -период) абелева дифференциала $\mathbf{v}$:

$$\gamma(P) = \int_{\infty^{(0)}}^P \mathbf{v}, \quad (4)$$

где начальная точка интегрирования совпадает с точкой на бесконечности на некотором (“нулевом”) листе римановой поверхности $\mathcal{L}$.

Обозначим через $\rho(\gamma)$ логарифмическую производную нечетной тета-функции Якоби, $\rho(\gamma) \equiv d \ln \theta_1(\gamma) / d\gamma$. Производная $\rho'(\gamma)$ совпадает с $\mathcal{P}$ -функцией Вейерштрасса с точностью до масштабного преобразования аргумента и аддитивной константы.

Введем теперь эллиптический вариант уравнений (1) и (2) – систему дифференциальных уравнений, описывающих зависимость отображения униформизации $\gamma(P)$ (задаваемой уравнением (4)) на λ и проекции λ_m точек ветвления на λ -сферу:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \lambda} = \sum_{n=1}^{2N} \alpha_n [\rho(\gamma - \gamma_n) + \rho(\gamma_n)], \quad (5)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \lambda_m} = -\alpha_m [\rho(\gamma - \gamma_m) + \rho(\gamma_m)], \quad (6)$$

где, как и в рациональном случае, $\alpha_m = v_m^2/2$ и коэффициент v_m в разложении функции $\gamma(\lambda)$ в окрестности точки ветвления P_m по локальному параметру $\sqrt{\lambda - \lambda_m}$ имеет вид

$$v_m = \left. \frac{\mathbf{v}(P)}{d\sqrt{\lambda - \lambda_m}} \right|_{P=P_m}.$$

Из условий совместности системы (5), (6) следует система уравнений, описывающая зависимость критических точек $\{\gamma_m\}$ мероморфной функции $R(\gamma)$ от ее критических значений $\{\lambda_m\}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma_n}{\partial \lambda_m} &= -\alpha_m [\rho(\gamma_n - \gamma_m) + \rho(\gamma_m)], \quad m \neq n, \\ \frac{\partial \gamma_m}{\partial \lambda_m} &= \sum_{n=1, n \neq m}^{2N} \alpha_n [\rho(\gamma_m - \gamma_n) + \rho(\gamma_n)]. \end{aligned} \quad (7)$$

Уравнения для коэффициентов α_m также следуют из условий совместности системы (5), (6) и имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_n}{\partial \lambda_m} &= -2\alpha_n \alpha_m \rho'(\gamma_n - \gamma_m), \quad m \neq n, \\ \frac{\partial \alpha_m}{\partial \lambda_m} &= \sum_{n=1, n \neq m}^{2N} 2\alpha_n \alpha_m \rho'(\gamma_n - \gamma_m). \end{aligned} \quad (8)$$

Действительно, уравнения (8) представляют собой вариационные формулы Рауха [4] для голоморфного дифференциала $\mathbf{v}$.

1.3. Цилиндр. При подходящем вырождении эллиптического накрытия, когда один из разрезов превращается в двойную точку, период μ тора стремится к $+i\infty$ и тор $T =$

$\mathbb{C}/\{1, \mu\}$ вырождается в цилиндр. На накрытии остается $2N-2$ точек ветвления; функции γ и $\{\gamma_m\}$ зависят от этих точек согласно следующей системе, полученной из уравнений (6)–(8) взятием предела при $\mu \rightarrow i\infty$ (при $n \neq m$):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \gamma}{\partial \lambda_m} &= -\pi \alpha_m [\operatorname{ctg} \pi(\gamma - \gamma_m) + \operatorname{ctg} \pi \gamma_m], \\ \frac{\partial \gamma_n}{\partial \lambda_m} &= -\pi \alpha_m [\operatorname{ctg} \pi(\gamma_n - \gamma_m) + \operatorname{ctg} \pi \gamma_m], \\ \frac{\partial \gamma_m}{\partial \lambda_m} &= \pi \sum_{n=1, n \neq m}^{2N-2} \alpha_n [\operatorname{ctg} \pi(\gamma_m - \gamma_n) + \operatorname{ctg} \pi \gamma_n], \\ \frac{\partial \alpha_n}{\partial \lambda_m} &= 2\pi^2 \frac{\alpha_n \alpha_m}{\sin^2 \pi(\gamma_n - \gamma_m)}, \\ \frac{\partial \alpha_m}{\partial \lambda_m} &= -2\pi^2 \sum_{n=1, n \neq m}^{2N-2} \frac{\alpha_n \alpha_m}{\sin^2 \pi(\gamma_n - \gamma_m)}.\end{aligned}$$

2. НЕАВТОНОМНЫЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ И ПРОСТРАНСТВА ГУРВИЦА

2.1. Пространства рациональных накрытий. Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений для матричной функции $\Psi(\gamma)$ на римановой сфере, $\gamma \in \mathbb{CP}^1$:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_m} = \frac{\gamma_0 - \gamma_m}{\gamma - \gamma_m} G_{\lambda_m} G^{-1} \Psi, \quad (9)$$

где $\gamma_0 \equiv \gamma(P_0)$, причем точка $P_0 \in \mathcal{L}$ такова, что ее проекция λ_0 на λ -сферу не зависит от всех $\{\lambda_m\}$, а $G(\{\lambda_m\})$ – матрично-значная функция. Как и ранее, γ – отображение униформизации рационального накрытия $\mathcal{L}$ λ -сферы $\mathbb{CP}^1$, $\{\lambda_m\}$ – проекции точек ветвления на базу накрытия, а $\{\gamma_m\}$ – образы точек ветвления при отображении γ . Отображение униформизации и точки $\{\gamma_m\}$ зависят от $\{\lambda_m\}$ в соответствии с уравнениями (2), (3). Часть условий совместности этой системы, которая включает в себя функцию G , дает следующую систему неавтономных (поскольку все γ_m и γ_0 являются нетривиальными алгебраическими функциями $\{\lambda_m\}$) связанных дифференциальных уравнений в частных производных:

$$((\gamma_0 - \gamma_m)G_{\lambda_m}G^{-1})_{\lambda_n} = ((\gamma_0 - \gamma_n)G_{\lambda_n}G^{-1})_{\lambda_m}. \quad (10)$$

Когда $R(\gamma)$ является рациональной функцией степени $N = 2$, отображение униформизации $\gamma(\lambda)$, обладающее требуемым асимптотическим поведением на бесконечности, имеет вид

$$\gamma(x, y, \lambda) = \frac{2}{x-y} \left\{ \lambda - \frac{x+y}{2} + \sqrt{(\lambda-x)(\lambda-y)} \right\},$$

и после отождествления $\lambda_1 = x$, $\lambda_2 = y$ система (10) совпадает с комплексифицированным вариантом уравнения Эрнста из общей теории относительности

$$((x-y)G_xG^{-1})_y + ((x-y)G_yG^{-1})_x = 0. \quad (11)$$

Поэтому естественно назвать интегрируемые системы (10) обобщенными системами Эрнста, связанными с рациональными пространствами Гурвица.

2.2. Пространства эллиптических накрытий. Здесь мы построим эллиптические аналоги интегрируемых систем (10). Пусть K – матричная размерность нашей системы. Классическая эллиптическая r -матрица размера $K^2 \times K^2$ представляет собой следующий линейный оператор в тензорном произведении двух копий $\mathbb{C}^K$ (см. [5]):

$${}^{12}_r(\gamma) = \sum_{\substack{A,B=0 \\ (A,B) \neq (0,0)}}^{K=1} w_{AB}(\gamma) \sigma_{AB}^1 \sigma^{2AB}, \quad (12)$$

где w_{AB} – комбинации тета-функций Якоби

$$w_{AB}(z) = \frac{\theta_{[AB]}(z) \theta'_{[00]}(0)}{\theta_{[AB]}(0) \theta'_{[00]}(z)},$$

а $\theta_{[AB]}$ обозначает тета-функцию с характеристиками $[A/K - 1/2, 1/2 - B/K]$. Все w_{AB} имеют простые полюсы с единичным вычетом при $z = 0$ и свойствами $w_{AB}(z + 1) = \epsilon^A w_{AB}(z)$, $w_{AB}(z + \mu) = \epsilon^B w_{AB}(z)$, где $\epsilon = e^{2\pi i/K}$. Матрицы σ_{AB} при $(A, B) \neq (0, 0)$ являются аналогами матриц Паули высшего ранга; они образуют базис $sl(K, \mathbb{C})$ и определяются с помощью соотношений $\sigma_{AB} = H^A G^B$ с диагональной матрицей $G = \text{diag}\{1, \epsilon, \epsilon^2, \dots, \epsilon^{K-1}\}$ и циклической матрицей H : $H_m^n = \delta_{m+1}^n$, $H_K^1 = 1$ (нижний индекс является индексом строки). Матрицы G и H удовлетворяют соотношениям $\epsilon GH = HG$, $G^K = H^K = I$. Наряду с σ_{AB} введем дуальный базис $\sigma^{AB} = (\epsilon^{-AB}/K) \sigma_{-A, -B}$ такой, что $\text{tr}(\sigma_{AB} \sigma^{CD}) = \delta_A^C \delta_B^D$.

Теперь рассмотрим “эллиптический” аналог “рациональной” системы (9):

$$\frac{d\Psi}{d\lambda_m} = \text{tr}({}^{12}_r(\gamma - \gamma_m) J_m^2) \Psi, \quad (13)$$

где $J_m = \sum_{(A,B) \neq (0,0)} J_m^{AB} \sigma_{AB}$ для скаляров J_m^{AB} . Как и ранее, $\Psi = \Psi(\gamma, \{\lambda_m\})$ – матрично-значная функция, γ – отображение униформизации $\gamma: \mathcal{L} \rightarrow T = \mathbb{C}/\{1, \mu\}$, $\{\gamma_m\}$ – образы точек ветвления накрытия $\mathcal{L}$, а $\{\lambda_m\}$ – их проекции на λ -сферу. Зависимость γ и $\{\gamma_m\}$ от $\{\lambda_m\}$ описывается уравнениями (6)–(8). Условие совместности этой системы дает систему дифференциальных уравнений для J_m ($m \neq n$):

$$\begin{aligned} (J_m)_{\lambda_n} = & -\alpha_n J_m \rho'(\gamma_m - \gamma_n) - \alpha_m \text{tr}({}^{12}_r'(\gamma_m - \gamma_n) J_n^2) - \\ & - [J_m, \text{tr}({}^{12}_r(\gamma_m - \gamma_n) J_n^2)], \end{aligned} \quad (14)$$

где r' обозначает производную r -матрицы по ее аргументу, а функция ρ определена в п. 1.2. Эта интегрируемая система является аналогом обобщенных систем Эрнста (10) для рода 1.

2.3. Пространства “тригонометрических” накрытий. Здесь мы снова рассмотрим вырождение эллиптического накрытия в тригонометрическое, т.е. рассмотрим вырождение некоторого разреза в двойную точку, когда период μ тора стремится к $+i\infty$. Функции γ_m и γ зависят от проекций остающихся точек ветвления $\lambda_1, \dots, \lambda_{2N-2}$, как и в п. 1.3. Пусть матричная размерность нашей системы $K = 2$. Тригонометрический вариант “системы Лакса” (13) имеет вид

$$\frac{d\Psi}{d\lambda_m} = \text{tr} \left(r_0^{12} (\gamma - \gamma_m)^2 J_m \right) \Psi, \quad (15)$$

где

$$r_0^{12}(\gamma) = \frac{1}{2} \frac{\pi}{\sin \pi \gamma} \sigma_1^2 \sigma_1 + \frac{1}{2} \frac{\pi}{\sin \pi \gamma} \sigma_2^2 \sigma_2 + \frac{1}{2} \pi \operatorname{ctg} \pi \gamma \sigma_3^2 \sigma_3$$

представляет собой тригонометрическую r -матрицу, которая в случае, когда она имеет размер 2×2 , дает предел эллиптической r -матрицы при μ , стремящемся к $+i\infty$, а $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ – стандартные матрицы Паули.

Тригонометрический вариант системы (14) при $J_m = J_m^1 \sigma_1 + J_m^2 \sigma_2 + J_m^3 \sigma_3$ обеспечивает условие совместности системы (15):

$$\begin{aligned} (J_m^1)_{\lambda_n} &= \frac{\alpha_n \pi^2}{\sin^2 \pi(\gamma_m - \gamma_n)} J_m^1 + \frac{\alpha_m \pi^2 \cos \pi(\gamma_m - \gamma_n)}{\sin^2 \pi(\gamma_m - \gamma_n)} J_n^1 + \\ &\quad + \frac{2\pi i}{\sin \pi(\gamma_m - \gamma_n)} (J_m^2 J_n^3 \cos \pi(\gamma_m - \gamma_n) - J_m^3 J_n^2), \\ (J_m^2)_{\lambda_n} &= \frac{\alpha_n \pi^2}{\sin^2 \pi(\gamma_m - \gamma_n)} J_m^2 + \frac{\alpha_m \pi^2 \cos \pi(\gamma_m - \gamma_n)}{\sin^2 \pi(\gamma_m - \gamma_n)} J_n^2 + \\ &\quad + \frac{2\pi i}{\sin \pi(\gamma_m - \gamma_n)} (J_m^3 J_n^1 - J_m^1 J_n^3 \cos \pi(\gamma_m - \gamma_n)), \\ (J_m^3)_{\lambda_n} &= \frac{\alpha_n \pi^2}{\sin^2 \pi(\gamma_m - \gamma_n)} J_m^3 + \frac{\alpha_m \pi^2}{\sin^2 \pi(\gamma_m - \gamma_n)} J_n^3 + \\ &\quad + \frac{2\pi i}{\sin \pi(\gamma_m - \gamma_n)} (J_m^1 J_n^2 - J_m^2 J_n^1). \end{aligned}$$

Коэффициенты этой системы могут быть явно вычислены в случае простейшего эллиптического накрытия, которое имеет два листа и четыре точки ветвления. После вырождения накрытие становится рациональным с двумя точками ветвления и одной отмеченной точкой (левой из вырожденного разреза). Рассматривая предел, в котором эта точка стремится к бесконечности, получаем систему для J_1 :

$$\begin{aligned} (J_1^1)_{\lambda_2} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} J_1^1 - 2\pi i J_1^3 J_2^2, \\ (J_1^2)_{\lambda_2} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} J_1^2 + 2\pi i J_1^3 J_2^1, \\ (J_1^3)_{\lambda_2} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} (J_1^3 - J_2^3) + 2\pi i (J_1^1 J_2^2 - J_1^2 J_2^1), \end{aligned} \quad (16)$$

и аналогичную систему для J_2 :

$$\begin{aligned}(J_2^1)_{\lambda_1} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} J_2^1 + 2\pi i J_2^3 J_1^2, \\(J_2^2)_{\lambda_1} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} J_2^2 - 2\pi i J_2^3 J_1^1, \\(J_2^3)_{\lambda_1} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} (J_1^3 - J_2^3) + 2\pi i (J_1^1 J_2^2 - J_1^2 J_2^1).\end{aligned}\tag{17}$$

3. СВЯЗЬ С ФОРМАЛИЗМОМ БУРЦЕВА–МИХАЙЛОВА–ЗАХАРОВА

Возможность построения целого класса “деформированных” интегрируемых систем (или интегрируемых систем с “переменным спектральным параметром”, отличных от уравнения Эрнста) была впервые обнаружена в работе Бурцева, Захарова и Михайлова [6]. Они предложили рассматривать пару Лакса вида

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = U \Psi, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = V \Psi,\tag{18}$$

где x и y – независимые переменные, а матрицы U и V зависят от (x, y) и “переменного спектрального параметра” γ :

$$\begin{aligned}U(x, y, \gamma) &= u_0(x, y) + \sum_{n=1}^{N_1} \frac{u_n(x, y)}{\gamma(x, y) - \gamma_n(x, y)}, \\V(x, y, \gamma) &= v_0(x, y) + \sum_{n=1}^{N_2} \frac{v_n(x, y)}{\gamma(x, y) - \tilde{\gamma}_n(x, y)}.\end{aligned}\tag{19}$$

После подходящего дробно-линейного преобразования на γ -плоскости должна удовлетворяться следующая система уравнений для $\gamma(x, y)$ как часть условий совместности линейной системы (18):

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x} + \sum_{m=1}^{N_1} \frac{c_m}{\gamma - \gamma_m} = 0, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial y} + \sum_{m=1}^{N_2} \frac{b_m}{\gamma - \tilde{\gamma}_m} = 0,\tag{20}$$

где b_n и c_n – некоторые функции от (x, y) . Из условия совместности системы (20) следует система для $\gamma_n(x, y)$ и $\tilde{\gamma}_n(x, y)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \gamma_n}{\partial y} + \sum_{m=1}^{N_2} \frac{b_m}{\gamma_n - \tilde{\gamma}_m} &= 0, & \frac{\partial \tilde{\gamma}_n}{\partial x} + \sum_{m=1}^{N_1} \frac{c_m}{\tilde{\gamma}_n - \gamma_m} &= 0, \\ \frac{\partial c_n}{\partial y} - 2c_n \sum_{m=1}^{N_2} \frac{b_m}{(\gamma_n - \tilde{\gamma}_m)^2} &= 0, & \frac{\partial b_n}{\partial x} - 2b_n \sum_{m=1}^{N_1} \frac{c_m}{(\tilde{\gamma}_n - \gamma_m)^2} &= 0.\end{aligned}\tag{21}$$

Легко установить соотношение между решениями системы (20), (21) с одной стороны и системы (2), (3) с другой.

Именно, предположим, что функция $\gamma(\lambda, \{\lambda_m\})$, $m = 1, \dots, 2N - 2$, удовлетворяет уравнениям (2) относительно переменных λ_m . Предположим также, что $2N - 2 = N_1 + N_2$, и разобьем множество переменных $\{\lambda_1, \dots, \lambda_{N_1+N_2}\}$ на два подмножества: $\{\lambda_1, \dots, \lambda_{N_1}\}$ и $\{\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_{N_2}\}$, где $\tilde{\lambda}_n \equiv \lambda_{N_1+n}$, $n = 1, \dots, N_2$. Таким же образом разобьем множество значений функции γ в этих точках ($\gamma_m \equiv \gamma(\lambda_m)$):

$$\{\gamma_1, \dots, \gamma_{2N-2}\} = \{\gamma_1, \dots, \gamma_{N_1}\} \cup \{\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_{N_2}\},$$

где $\tilde{\gamma}_n \equiv \gamma_{N_1+n}$, $n = 1, \dots, N_2$.

Теперь предположим, что переменные без тильды $\lambda_1, \dots, \lambda_{N_1}$ являются произвольными функциями от переменной x , а переменные с тильдой $\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_{N_2}$ являются произвольными функциями от переменной y . Тогда, например, для производной γ по x согласно правилу дифференцирования сложной функции получим из (2)

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x} = \sum_{m=1}^{N_1} \frac{\partial \gamma}{\partial \lambda_m} \frac{\partial \lambda_m}{\partial x} = - \sum_{m=1}^{N_1} \frac{\partial \lambda_m}{\partial x} \frac{\alpha_m}{\gamma - \gamma_m}. \quad (22)$$

Поэтому

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x} + \sum_{m=1}^{N_1} \frac{c_m}{\gamma - \gamma_m} = 0, \quad (23)$$

где $c_m \equiv \alpha_m \partial \lambda_m / \partial x$. Это совпадает с первым из уравнений (20). Второе из уравнений (20) получается аналогично после отождествления $b_m \equiv \alpha_{N_1+m} \partial \lambda_{N_1+m} / \partial y$. Уравнения (21) для γ_n , b_n и c_n как функций (x, y) возникают как условия совместности уравнений для $\partial \gamma / \partial x$ и $\partial \gamma / \partial y$.

Благодарности. Авторы благодарят А. Михайлова за полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] A. Kokotov, D. Korotkin. A new hierarchy of integrable systems associated to Hurwitz spaces. Philos. T. Roy. Soc. London A (to appear); math-ph/0112051; V. Shramchenko. J. Phys. A. 2003. V. 36. P. 1–21.
- [2] Б. А. Купершмидт, Ю. И. Манин. Функции анализ и его прилож. 1977. Т. 11. № 3. С. 31.
- [3] J. Gibbons, S. P. Tsarev. Phys. Lett. A. 1996. V. 211. P. 19; 1999. V. 258. P. 263.
- [4] H. E. Rauch. Commun. Pure Appl. Math. 1959. V. 12. P. 543.
- [5] K. Takasaki. Lett. Math. Phys. 1998. V. 44. № 2. P. 143.
- [6] С. П. Бурцев, В. Е. Захаров, А. В. Михайлов. ТМФ. 1987. Т. 70. № 3. С. 323.