Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. М. Сергеев, Функциональные уравнения и квантовое разделение переменных для трехмерных спиновых моделей, *ТМФ*, 2004, том 138, номер 2, 269–282

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf26>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 12:39:15

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И КВАНТОВОЕ РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ ТРЕХМЕРНЫХ СПИНОВЫХ МОДЕЛЕЙ

Предложенная недавно инвариантная формулировка вспомогательной линейной задачи для трехмерных интегрируемых моделей предусматривает использование нескольких новых идей в решении спектральной задачи трехмерных спиновых моделей, например, модели Замолодчикова–Бажанова–Бакстера в ее вершинной формулировке. Эта работа анонсирует результаты, следующие из инвариантной формулировки. Определяется класс трехмерных спиновых моделей, фактически являющийся удачно параметризованной неоднородной моделью Замолодчикова–Бажанова–Бакстера, приводится выражение для функции, производящей полный набор матриц, коммутирующих с трансфер-матрицей этой модели (интегралов движения), и функциональные уравнения, определяющие собственные значения интегралов движения и трансфер-матриц. Точно описывается группоид изоспектральных преобразований изначальной системы интегралов движения, и в завершение дается точная параметризация проектора на разделенные состояния в смысле квантового разделения переменных (функционального анзаца Бете).

Ключевые слова: трехмерные интегрируемые модели, модель Замолодчикова–Бажанова–Бакстера, киральная модель Поттса, уравнение Бакстера, квантовое разделение переменных.

1. ВВЕДЕНИЕ

Локальная инвариантная формулировка вспомогательной линейной задачи для квантовых эволюционных моделей в дискретном $(2 + 1)$ -мерном пространстве-времени, предложенная в работах [1], оказалась мощным методом решения соответствующих спектральных задач. Алгеброй наблюдаемых в $(2 + 1)$ -мерных квантовых эволюционных моделях является локальная алгебра Вейля, которая имеет конечномерные унитарные представления, если параметр Вейля q есть простой корень из единицы:

$$q = e^{2\pi i/N}. \quad (1)$$

*Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия; Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo, 3-8-1 Komaba, Meguro, Tokyo 153-8914, Japan; Max Planck Institute für Mathematik, Vivatsgasse, 7, D-53111, Bonn, Germany. E-mail: sergeev@thsun1.jinr.ru; sergeev@ms.u-tokyo.ac.jp; sergeev@mpim-bonn.mpg.de

В этой ситуации основной сплетатель, решающий локальное условие нулевой кривизны, эквивалентен $\mathbf{R}$ -матрице модели Замолотчикова–Бажанова–Бакстера (ЗББ) в ее вершинной формулировке (детали см. в работах [2], [3]). Глобальные операторы, действующие во всем гильбертовом пространстве, такие как оператор эволюции или трансфер-матрица типа слой-слой, являются решениями некоторой динамики алгебры наблюдаемых и могут быть построены с помощью локальных $\mathbf{R}$ -матриц. Локальная вспомогательная задача для глобальных объектов обеспечивает, во-первых, точную интегрируемость модели ЗББ (в частности, уравнение тетраэдров для $\mathbf{R}$ -матриц является тривиальным следствием представления нулевой кривизны) и, во-вторых, дает метод вывода набора функциональных уравнений для собственных значений трансфер-матриц модели ЗББ.

Степени N элементов Вейля в корне из единицы являются центрами, которые суть $\mathbb{C}$ -числовые параметры для рассматриваемых конечномерных представлений. Эти степени совпадают с модулярно-дуальной парой Вейля [4] и, следовательно, имеют динамику, аналогичную динамике исходных генераторов Вейля. Модель ЗББ соответствует тривиальному постоянному решению классической динамики. Однако для конечной трехмерной решетки можно найти полное решение классических уравнений движения. В общем случае полное решение дает параметризацию N -х степеней в терминах тета-функций на якобиане классической спектральной кривой, зависящей от размера, формы и граничных условий трехмерной решетки. Соответствующие трехмерные спинные модели относятся к новому классу интегрируемых моделей и подлежат отдельному обсуждению.

Простые модели, например модель ЗББ, соответствуют рациональному пределу классической спектральной кривой, причем классические уравнения движения помимо тривиальных допускают и нетривиальные решения. Спинный сектор при этом содержит модифицированные трансфер-матрицы и их упорядоченные произведения, помогающие построить полный группоид изоспектральных деформаций исходной модели ЗББ. Чудесным образом этот группоид содержит предельные вырожденные элементы, соответствующие проекторам на разделенные состояния в смысле квантового разделения переменных [5]. Это явление было недавно отмечено в квантовой релятивистской цепочке Тоды в корне из единицы [6].

Данную работу следует рассматривать в качестве короткого анонса всех этих результатов. Для компактности мы решили опустить все доказательства, хотя при этом используемые методы будут не всегда понятны читателю. Основные фрагменты нашего метода можно найти в работах [1], [6]. Здесь же мы сначала напомним вершинную формулировку модели ЗББ [2], [3], а затем шаг за шагом определим все необходимые дополнительные объекты и параметризации, лишь декларируя их свойства. Поскольку мы опускаем доказательства, то слово “гипотеза” будет использоваться в заголовках всех утверждений. Однако следует отметить, что все гипотезы являются доказанными; их строгое доказательство будет приведено в последующих публикациях.

2. ФОРМУЛИРОВКА ТРЕХМЕРНОЙ СПИНОВОЙ МОДЕЛИ

2.1. Кубическая решетка. Рассмотрим кубическую решетку, вершины которой образованы векторами

$$\mathbf{n} = n_1 \mathbf{e}_1 + n_2 \mathbf{e}_2 + n_3 \mathbf{e}_3 \quad (2)$$

с целыми n_1, n_2, n_3 и некоторыми некопланарными $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Статистическая сумма по определению есть

$$Z = \sum_{\{\sigma\}} \prod_{\mathbf{n}} \langle \sigma_{1,\mathbf{n}}, \sigma_{2,\mathbf{n}}, \sigma_{3,\mathbf{n}} | \mathbf{R}_{\mathbf{n}} | \sigma_{1,\mathbf{n}+\mathbf{e}_1}, \sigma_{2,\mathbf{n}+\mathbf{e}_2}, \sigma_{3,\mathbf{n}+\mathbf{e}_3} \rangle, \quad (3)$$

где каждая спиновая переменная $\sigma_{j,\mathbf{n}}$ принадлежит конечному множеству (а именно $\sigma_{j,\mathbf{n}} \in \mathbb{Z}_N$), и локальные больцмановские веса записаны в виде матричных элементов $\langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 | \mathbf{R}_{\mathbf{n}} | \sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3 \rangle$ некоторой $(N^3 \times N^3)$ -матрицы $\mathbf{R}_{\mathbf{n}}$, матричные элементы которой зависят в общем от вершины $\mathbf{n}$.

Если в определении (3) подразумеваются периодические граничные условия, то для решетки размером $N_1 \times N_2 \times N_3$ следует положить $n_1 \in \mathbb{Z}_{N_1}, n_2 \in \mathbb{Z}_{N_2}, n_3 \in \mathbb{Z}_{N_3}$.

Как частный случай можно рассмотреть однородную решетку, когда матричные элементы всех больцмановских весов не зависят от вершины $\mathbf{n}$: $\mathbf{R}_{\mathbf{n}} = \mathbf{R}$.

На кубической решетке можно определить матрицу монодромии и трансфер-матрицу. Выберем первое направление как “время”, т.е. рассмотрим один слой $\mathbf{n} = n_1 \mathbf{e}_1 + n_2 \mathbf{e}_2 + n_3 \mathbf{e}_3$ с фиксированным n_1 , так что $\sigma_{1,\mathbf{n}} = \sigma_{1:n_2,n_3}$ и $\sigma_{1,\mathbf{n}+\mathbf{e}_1} = \sigma'_{1:n_2,n_3}$. Тогда по определению матрица монодромии слой-слой есть

$$\begin{aligned} \langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 | \hat{\mathbf{Q}}_{n_1} | \sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3 \rangle = \\ = \sum_{\sigma_2, \sigma_3} \prod_{n_2, n_3} \langle \sigma_{1:n_2,n_3}, \sigma_{2:n_2,n_3}, \sigma_{3:n_2,n_3} | \mathbf{R}_{\mathbf{n}} | \sigma'_{1:n_2,n_3}, \sigma_{2:n_2+1,n_3}, \sigma_{3:n_2,n_3+1} \rangle, \end{aligned} \quad (4)$$

где матричные элементы $\hat{\mathbf{Q}}_{n_1}$ берутся между наборами

$$\begin{aligned} \sigma_1 = \{\sigma_{1:n_2,n_3}\}, \quad \sigma_2 = \{\sigma_{2:0,n_3}\}, \quad \sigma_3 = \{\sigma_{3:n_2,0}\}, \\ n_2 = 0, \dots, N_1 - 1, \quad n_3 = 0, \dots, N_3 - 1, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \sigma'_1 = \{\sigma'_{1:n_2,n_3}\}, \quad \sigma'_2 = \{\sigma_{2:N_2,n_3}\}, \quad \sigma'_3 = \{\sigma_{3:n_2,N_3}\}, \\ n_2 = 0, \dots, N_2 - 1, \quad n_3 = 0, \dots, N_3 - 1, \end{aligned} \quad (6)$$

а суммирование производится по всем “внутренним” $\sigma_{2:n_2,n_3}, \sigma_{3:n_2,n_3}$, $0 < n_2 < N_2$, $0 < n_3 < N_3$. Трансфер-матрица слой-слой есть след матрицы монодромии:

$$\langle \sigma_1 | \mathbf{Q}_{n_1} | \sigma'_1 \rangle = \sum_{\sigma_2, \sigma_3} \langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 | \hat{\mathbf{Q}}_{n_1} | \sigma'_1, \sigma_2, \sigma_3 \rangle, \quad (7)$$

где сумма берется по всем $\sigma_2 = \{\sigma_{2:0,n_3} = \sigma_{2:N_2,n_3}\}$ и $\sigma_3 = \{\sigma_{3:n_2,0} = \sigma_{3:n_2,N_3}\}$. Благодаря этой периодичности мы будем всегда подразумевать ниже

$$n_2 \in \mathbb{Z}_{N_2}, \quad n_3 \in \mathbb{Z}_{N_3}. \quad (8)$$

Статистическая сумма есть

$$Z = \text{Tr } \mathbf{Z}_1, \quad (9)$$

где $\mathbf{Z}_1$ – статистическая сумма кубической решетки, открытой в “первом” направлении:

$$\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{Q}_1 \cdot \dots \cdot \mathbf{Q}_{N_1-1}. \quad (10)$$

Интегрируемость простой трехмерной спиновой модели основана на существовании коммутативного набора трансфер-матриц

$$[\mathbf{Q}, \mathbf{Q}'] = 0, \quad (11)$$

где $\mathbf{Q}$ образована весами $\mathbf{R}_{n_2, n_3}$, а $\mathbf{Q}'$ – аналогичными, но другими весами $\mathbf{R}'_{n_2, n_3}$. Коммутативность обеспечивается уравнением тетраэдров для матриц $\mathbf{R}$. Сформулированная модель является интегрируемой, если все $\mathbf{Q}_{n_1}$ в (10) принадлежат одному и тому же коммутативному семейству.

Более сложные трехмерные спиновые интегрируемые модели предусматривают наличие так называемого “модифицированного уравнения тетраэдров”, приводящего локально к модифицированным перестановочным соотношениям для трансфер-матриц, а глобально – к существованию коммутативного семейства матриц $\mathbf{Z}_1$ (10).

Основным примером трехмерной интегрируемой модели является модель ЗББ, определение матрицы весов $\mathbf{R}$ которой дается ниже.

2.2. Кривая Ферма и функция W . Пусть p – точка на кривой Ферма $\mathcal{F}$

$$p \stackrel{\text{опр.}}{=} (x, y) \in \mathcal{F} \Leftrightarrow x^N + y^N = 1. \quad (12)$$

Функцию $W_p(n)$, $p \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbb{Z}_N$, определим посредством уравнения

$$\frac{W_p(n)}{W_p(n-1)} = \frac{y}{1 - xq^n}, \quad W_p(0) = 1; \quad (13)$$

корень из единицы q определен формулой (1).

Функция $W_p(n)$, будучи “ q -гамма-функцией”, “ q -экспонентой” и “ q -дилогарифмом” в корне из единицы, имеет множество замечательных свойств (см., например, приложение к работе [3] для введения в “ q -корень из единицы-гипер-геометрию”).

2.3. $\mathbf{R}$ -матрица. Определим $(N^3 \times N^3)$ -матрицу $\mathbf{R}$ как матричнозначную функцию четырех точек p_1, p_2, p_3, p_4 с кривой Ферма следующим образом [3]:

$$\begin{aligned} \langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 | \mathbf{R} | \sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3 \rangle &\stackrel{\text{опр.}}{=} R_{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3}^{\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3} = \\ &= \delta_{\sigma_2 + \sigma_3, \sigma'_2 + \sigma'_3} q^{(\sigma'_1 - \sigma_1)\sigma'_3} \frac{W_{p_1}(\sigma_2 - \sigma_1) W_{p_2}(\sigma'_2 - \sigma'_1)}{W_{p_3}(\sigma'_2 - \sigma_1) W_{p_4}(\sigma_2 - \sigma'_1)}, \end{aligned} \quad (14)$$

где координаты x четырех точек кривой Ферма связаны соотношением

$$x_1 x_2 = q x_3 x_4. \quad (15)$$

$\mathbf{R}$ -матрицу (14) мы рассматриваем как универсальный строительный блок для трехмерных спиновых интегрируемых моделей. В выражениях для матрицы монодромии и трансфер-матрицы (4), (7), равно как и в выражении для статистической суммы (3), зависимость от вершины $\mathbf{n}$ просто означает, что

$$\mathbf{R}_{\mathbf{n}} = \mathbf{R}(p_{1,\mathbf{n}}, p_{2,\mathbf{n}}, p_{3,\mathbf{n}}, p_{4,\mathbf{n}}). \quad (16)$$

Известно, что для однородного случая, когда $p_{k,\mathbf{n}} = p_k$, две трансфер-матрицы $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{Q}'$, определенные посредством

$$\begin{aligned} p_1, p_2, p_3, p_4 &\mapsto \mathbf{R} \text{ по формуле (14)} \mapsto \mathbf{Q} \text{ по формулам (4), (7),} \\ p'_1, p'_2, p'_3, p'_4 &\mapsto \mathbf{R}' \mapsto \mathbf{Q}', \end{aligned} \quad (17)$$

коммутируют, если $x_3/x_1 = x'_3/x'_1$ [3].

2.4. Неоднородная модель ЗББ. Определим символ $e(X, Y)$, $X, Y \in \mathbb{C}$, как

$$e(X, Y)^N = X - Y. \quad (18)$$

ГИПОТЕЗА 1. *Неоднородная модель ЗББ соответствует следующей параметризации $\mathbf{R}_{\mathbf{n}}$ в (3) в смысле (16):*

$$\begin{aligned} x_{1,\mathbf{n}} &= q^{-1} \frac{e(X_{n_1}, Z'_{n_3})e(Y_{n_2}, Z_{n_3})}{e(X_{n_1}, Z_{n_3})e(Y_{n_2}, Z'_{n_3})}, & y_{1,\mathbf{n}} &= \frac{e(X_{n_1}, Y_{n_2})e(Z_{n_3}, Z'_{n_3})}{e(X_{n_1}, Z_{n_3})e(Y_{n_2}, Z'_{n_3})}, \\ x_{2,\mathbf{n}} &= \frac{e(X'_{n_1}, Z'_{n_3})e(Y'_{n_2}, Z_{n_3})}{e(X'_{n_1}, Z_{n_3})e(Y'_{n_2}, Z'_{n_3})}, & y_{2,\mathbf{n}} &= q \frac{e(X'_{n_1}, Y'_{n_2})e(Z_{n_3}, Z'_{n_3})}{e(X'_{n_1}, Z_{n_3})e(Y'_{n_2}, Z'_{n_3})}, \\ x_{3,\mathbf{n}} &= q^{-1} \frac{e(X_{n_1}, Z'_{n_3})e(Y'_{n_2}, Z_{n_3})}{e(X_{n_1}, Z_{n_3})e(Y'_{n_2}, Z'_{n_3})}, & y_{3,\mathbf{n}} &= q \frac{e(X_{n_1}, Y'_{n_2})e(Z_{n_3}, Z'_{n_3})}{e(X_{n_1}, Z_{n_3})e(Y'_{n_2}, Z'_{n_3})}, \\ x_{4,\mathbf{n}} &= q^{-1} \frac{e(X'_{n_1}, Z'_{n_3})e(Y_{n_2}, Z_{n_3})}{e(X'_{n_1}, Z_{n_3})e(Y_{n_2}, Z'_{n_3})}, & y_{4,\mathbf{n}} &= \frac{e(X'_{n_1}, Y_{n_2})e(Z_{n_3}, Z'_{n_3})}{e(X'_{n_1}, Z_{n_3})e(Y_{n_2}, Z'_{n_3})}. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь пара комплексных параметров X_{n_1}, X'_{n_1} соответствует n_1 -му слою в “первом” направлении, Y_{n_2}, Y'_{n_2} — n_2 -му слою во “втором” направлении и т.д. Таким образом, эти пары могут быть рассмотрены как *свободные* спектральные параметры модели; они связаны с двугранными углами Замолотчикова, но не совпадают с ними.

2.5. Задача для собственных значений и собственных векторов.

ГИПОТЕЗА 2. *Любые две трансфер-матрицы $\mathbf{Q}_{n_1}$ и $\mathbf{Q}_{m_1}$, определенные формулами (4), (7) с параметризацией (19), коммутируют, если они имеют один и тот же набор $Y_{n_2}, Y'_{n_2}, Z_{n_3}, Z'_{n_3}$ (т.е. одни и те же $e(Y_{n_2}^\#, Z_{n_3}^\#)$) и произвольные X_{n_1}, X'_{n_1} и X_{m_1}, X'_{m_1} .*

Это означает, что они имеют один и тот же набор собственных векторов $|\Psi_t\rangle$:

$$\mathbf{Q}_{n_1}|\Psi_t\rangle = |\Psi_t\rangle Q_{n_1,t}, \quad (20)$$

где символ t означает некоторую нумерацию собственных векторов (т.е. фактически мультииндекс), а $Q_{n_1,t}$ – собственное значение матрицы $\mathbf{Q}_{n_1}$ на этом собственном векторе; $|\Psi_t\rangle$ зависит от набора $Y_{n_2}, Y'_{n_2}, Z_{n_3}, Z'_{n_3}$ и не зависит от X_{n_1}, X'_{n_1} . Наряду с правыми собственными векторами мы можем использовать и левые, определяя спектральное разложение для $\mathbf{Q}_{n_1}$:

$$\mathbf{Q}_{n_1} = \sum_t |\Psi_t\rangle Q_{n_1,t} \langle \Psi_t|. \quad (21)$$

Основную задачу – найти все собственные значения и собственные векторы $\mathbf{Q}_{n_1}$ – полностью и точно решить практически невозможно.

В данной работе мы представим решения более простых задач. Во-первых, мы определим структуру мультииндекса t , а именно получим полный набор независимых матриц, коммутирующих с $\mathbf{Q}_{n_1}$ (т.е. интегралы движения).

Далее выпишем набор уравнений для спектра интегралов движения и уравнений, связывающих спектр $\mathbf{Q}_{n_1}$ и спектр интегралов движения (такие уравнения называются обычно функциональными уравнениями для спектра).

В завершение в явном виде построим проектор на “разделенные состояния” $|\Phi_\alpha\rangle$ такие, что

$$\langle \Psi_t | \Phi_\alpha \rangle = \prod_{n_1} Q_{n_1,t}(\alpha) \quad (22)$$

для некоторых специальных значений X_{n_1} и специального значения N_1 . Здесь α является мультииндексом, определяемым частными значениями N -х корней e -символов в определении $Q_{n_1,t}$. Уравнение (22) называется обычно квантовым разделением переменных.

3. ПОЛНАЯ ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ

3.1. Q-матрица. Мы будем исследовать одну отдельную $\mathbf{Q}$ -матрицу из набора $\mathbf{Q}_{n_1}$ -матриц, в связи с чем опустим на некоторое время индекс n_1 . Матрицы $\hat{\mathbf{Q}}$ и $\mathbf{Q}$ определены формулами (4), (7), где $\mathbf{R}_n = \mathbf{R}_{n_2, n_3}$ параметризована (19) с $X_{n_1} = X$, $X'_{n_1} = X'$.

Наряду с обычной трансфер-матрицей $\mathbf{Q}$ нам нужен набор вырожденных трансфер-матриц $\mathbf{Q}(\alpha, \beta)$, определяемых следующим образом:

$$\langle \sigma_1 | \mathbf{Q}(\alpha, \beta) | \sigma'_1 \rangle = \sum_{\substack{\sigma_2: \sum_{n_3} \sigma_2: n_3 = -\beta \\ \sigma_3: \sum_{n_2} \sigma_3: n_2 = \alpha}} \langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 | \hat{\mathbf{Q}} | \sigma'_1, \sigma_2, \sigma_3 \rangle, \quad (23)$$

так что

$$\mathbf{Q} = \sum_{\alpha, \beta} \mathbf{Q}(\alpha, \beta) \quad (24)$$

(см. (4), (7)).

ГИПОТЕЗА 3. Матрицы $\mathbf{Q}(\alpha, \beta)$ также образуют коммутативный набор по отношению к X, X' и α, β .

3.2. Локальная алгебра Вейля. Структура матрицы $\mathbf{Q}$, определяемой своими матричными элементами между векторами

$$\langle \sigma_1 | = \bigotimes_{n_2, n_3} \langle \sigma_{1:n_2, n_3} | \quad \text{и} \quad | \sigma'_1 \rangle = \bigotimes_{n_2, n_3} | \sigma'_{1:n_2, n_3} \rangle, \quad (25)$$

принадлежащими соответственно векторным пространствам $\mathcal{V}^*$ и $\mathcal{V}$, причем каждая σ -переменная $\mathbb{Z}_N$ -инвариантна, подразумевает возможность определения алгебры наблюдаемых как прямого произведения простых алгебр Вейля в корне из единицы.

А именно, пусть простая алгебра Вейля образована $(N \times N)$ -матрицами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{z}$, определенными в базисе $|\sigma\rangle = |\sigma \bmod N\rangle$, $\langle \sigma | \sigma' \rangle = \delta_{\sigma, \sigma'}$,

$$\mathbf{x}|\sigma\rangle = |\sigma\rangle q^\sigma, \quad \mathbf{z}|\sigma\rangle = |\sigma+1\rangle, \quad \mathbf{x}\mathbf{z} = q\mathbf{z}\mathbf{x}. \quad (26)$$

Соответствующие компоненты прямого произведения $\Delta = N_2 N_3$ копий простой алгебры Вейля мы определим как

$$\mathbf{x}_{1:n_2, n_3} = 1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes \underbrace{\mathbf{x}}_{\substack{(n_2, n_3)\text{-е} \\ \text{место}}} \otimes \cdots, \quad \mathbf{z}_{1:n_2, n_3} = 1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes \underbrace{\mathbf{z}}_{\substack{(n_2, n_3)\text{-е} \\ \text{место}}} \otimes \cdots, \quad (27)$$

так что структура индексов в (25) в точности совпадает со структурой наблюдаемых в (27).

3.3. Матрица ℓ и определитель. Определим теперь операторнозначную $(\Delta \times \Delta)$ -матрицу ℓ (матрицу коэффициентов вспомогательной линейной задачи) следующим образом:

$$\begin{aligned} \ell_{n_2+1, n_3 | n_2, n_3} &= a_{n_2}, & \ell_{n_2, n_3+1 | n_2, n_3} &= b_{n_3} \mathbf{v}_{1:n_2, n_3}, \\ \ell_{n_2, n_3 | n_2, n_3} &= -\mathbf{w}_{1:n_2, n_3}, & \ell_{n_2+1, n_3+1 | n_2, n_3} &= -a_{n_2} b_{n_3} \mathbf{u}_{1:n_2, n_3}, \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{1:n_2, n_3} &= \frac{e(Y_{n_2}, Z'_{n_3})}{e(Y'_{n_2}, Z_{n_3})} \mathbf{x}_{1:n_2, n_3} \mathbf{z}_{1:n_2, n_3}, \\ \mathbf{w}_{1:n_2, n_3} &= \frac{e(Y_{n_2}, Z_{n_3})}{e(Y'_{n_2}, Z_{n_3})} \mathbf{z}_{1:n_2, n_3}, \quad \mathbf{u}_{1:n_2, n_3} = \frac{e(Y'_{n_2}, Z'_{n_3})}{e(Y'_{n_2}, Z_{n_3})} \mathbf{x}_{1:n_2, n_3}. \end{aligned} \quad (29)$$

Здесь, как обычно, $n_2 \in \mathbb{Z}_{N_2}$, $n_3 \in \mathbb{Z}_{N_3}$; a_{n_2} и b_{n_3} — дополнительные комплексные параметры. Поскольку элементы различных столбцов матрицы ℓ коммутируют, формальный определитель ℓ хорошо определен. Параметры a_{n_2} и b_{n_3} входят в определитель только в комбинациях

$$A = \prod_{n_2} a_{n_2}, \quad B = \prod_{n_3} b_{n_3}. \quad (30)$$

Определитель является полиномом Лорана по A, B . Далее нам понадобятся две нормировки определителя:

$$\mathbf{J}(A, B) = \det \|\ell\| \prod_{n_2, n_3} (-a_{n_2} b_{n_3} \mathbf{u}_{1:n_2, n_3})^{-1}, \quad (31)$$

$$\tilde{\mathbf{J}}(A, B) = \det \|\ell\| \prod_{n_2, n_3} (-\mathbf{w}_{1:n_2, n_3})^{-1}. \quad (32)$$

Матрицы $\mathbf{J}$ и $\tilde{\mathbf{J}}$ в специальных точках играют важную роль:

$$a_{n_2} = \frac{e(X, Y_{n_2})}{e(X, Y'_{n_2})}, \quad b_{n_3} = \frac{e(X, Z_{n_3})}{e(X, Z'_{n_3})} \Rightarrow \mathbf{J}(A, B) \stackrel{\text{опр.}}{=} \mathbf{J}(X), \quad (33)$$

$$a_{n_2} = \frac{e(X', Y_{n_2})}{e(X', Y'_{n_2})}, \quad b_{n_3} = \frac{e(X', Z_{n_3})}{e(X', Z'_{n_3})} \Rightarrow \tilde{\mathbf{J}}(A, B) \stackrel{\text{опр.}}{=} \tilde{\mathbf{J}}(X'), \quad (34)$$

3.4. Интегралы движения. Определитель $\mathbf{J}$ (31) является полиномом по A^{-1} и B^{-1} :

$$\mathbf{J}(A, B) = \sum_{m_2=0}^{N_2} \sum_{m_3=0}^{N_3} A^{-m_3} B^{-m_2} \mathbf{J}_{m_2, m_3}, \quad \mathbf{J}_{0,0} = 1. \quad (35)$$

ГИПОТЕЗА 4. Если $\mathbf{Q}$ – трансфер-матрица, построенная с помощью тех же $e(Y_{n_2}^\#, Z_{n_3}^\#)$, что и $\mathbf{J}$, то

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{J} \quad (36)$$

для любых X, X' , входящих в определение $\mathbf{Q}$, и любых A, B , входящих в определение $\mathbf{J}$.

ГИПОТЕЗА 5. Коэффициенты $\mathbf{J}_{m_2, m_3}$ образуют алгебру

$$\mathbf{J}_{m_2, m_3} \mathbf{J}_{m'_2, m'_3} = q^{m'_2 m_3 - m'_3 m_2} \mathbf{J}_{m'_2, m'_3} \mathbf{J}_{m_2, m_3}. \quad (37)$$

Заметим, что $\tilde{\mathbf{J}}$ эквивалентна $\mathbf{J}$, поскольку $\tilde{\mathbf{J}} \sim \mathbf{J} \mathbf{J}_{N_2, N_3}^{-1}$.

Системе $\mathbf{J}_{m_2, m_3}$ принадлежат $N_2 + N_3$ замечательно простых матриц

$$\mathbf{U}_{n_2} = \prod_{n_3} \mathbf{x}_{1:n_2, n_3}, \quad \mathbf{W}_{n_3} = \prod_{n_2} \mathbf{z}_{1:n_2, n_3}. \quad (38)$$

Поскольку $\mathbf{U}_{n_2} \mathbf{W}_{n_3} = q \mathbf{W}_{n_3} \mathbf{U}_{n_2}$, этот набор матриц содержит один “центр инерции”. Пусть

$$\mathbf{J}_{m_2, m_3} = \mathbf{W}_0^{m_3} \mathbf{U}_0^{-m_2} \mathbf{t}_{m_2, m_3}. \quad (39)$$

ГИПОТЕЗА 6. Набор матриц $\mathbf{t}_{m_2, m_3}$ коммутативен, и каждая $\mathbf{t}_{m_2, m_3}$ коммутирует с $\mathbf{U}_0$ и $\mathbf{W}_0$.

ГИПОТЕЗА 7. Матрицы $\mathbf{t}_{m_2, m_3}$ для периметра многоугольника Ньютона $0 \leq m_2 \leq N_2, 0 \leq m_3 \leq N_3$ являются полиномами по $\mathbf{U}_0^{-1} \mathbf{U}_{n_2}$ и $\mathbf{W}_0^{-1} \mathbf{W}_{n_3}$.

ГИПОТЕЗА 8. Алгебраически независимыми являются $g = (N_2 - 1)(N_3 - 1)$ нетривиальных матриц $\mathbf{t}_{m_2, m_3}$ внутри многоугольника Ньютона.

ГИПОТЕЗА 9. Полный набор коммутативных матриц составляют g матриц внутри многоугольника Ньютона, $N_2 - 1$ матриц $\mathbf{U}_0^{-1} \mathbf{U}_{n_2}$, $N_3 - 1$ матриц $\mathbf{W}_0^{-1} \mathbf{W}_{n_3}$ и любая невырожденная комбинация матриц $\mathbf{U}_0, \mathbf{W}_0$.

ГИПОТЕЗА 10. *Дополнительно имеет место коммутативность*

$$\mathbf{t}_{m_2, m_3} \mathbf{Q}(\alpha, \beta) = \mathbf{Q}(\alpha, \beta) \mathbf{t}_{m_2, m_3}; \quad (40)$$

более того, матрицы $\mathbf{t}_{m_2, m_3}$ и $\mathbf{Q}(\alpha, \beta)$ могут быть одновременно диагонализированы.

“Центр инерции” просто управляет фазами A, B :

$$\mathbf{U}_0 \mathbf{J}(A, B) = \mathbf{J}(q^{-1}A, B) \mathbf{U}_0, \quad \mathbf{W}_0 \mathbf{J}(A, B) = \mathbf{J}(A, q^{-1}B) \mathbf{W}_0, \quad (41)$$

и аналогично

$$\mathbf{U}_0 \mathbf{Q}(\alpha, \beta) = \mathbf{Q}(\alpha - 1, \beta) \mathbf{U}_0, \quad \mathbf{W}_0 \mathbf{Q}(\alpha, \beta) = \mathbf{Q}(\alpha, \beta - 1) \mathbf{W}_0. \quad (42)$$

ГИПОТЕЗА 11. *Матрицы $\mathbf{Q}(\alpha, \beta)$ и $\mathbf{t}_{m_2, m_3}$ удовлетворяют следующей системе:*

$$\mathbf{J}(X) \mathbf{Q}(0, 0) = \mathbf{Q}(0, 0) \tilde{\mathbf{J}}(X') = 0, \quad (43)$$

где $\mathbf{J}(X)$ и $\tilde{\mathbf{J}}(X')$ определены формулами (33), (34).

ГИПОТЕЗА 12. *В базисе общих собственных векторов матриц $\mathbf{Q}(\alpha, \beta)$ и $\mathbf{t}_{m_2, m_3}$ уравнение (43) представляет собой $2N$ скалярных уравнений в матричном блоке $\mathbf{U}_0, \mathbf{W}_0$, и эта система функциональных уравнений принципиально позволяет найти спектры $\mathbf{t}$ и $\mathbf{Q}$.*

Каждое из уравнений (43) является в точности $(t-Q)$ -уравнением Бакстера для $N_2 = 2$ или $N_3 = 2$ и произвольного целого N . Для $N_2 > 2$ и $N_3 > 2$ уравнения (43) эквивалентны всей цепочке уравнений вложенного анзаца Бете.

4. ИЗОСПЕКТРАЛЬНОСТЬ И РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ

4.1. Модифицированные Q -операторы.

ГИПОТЕЗА 13. *Система двух алгебраических уравнений для переменных $P, P' \in \mathbb{C}$*

$$\prod_{n_2=0}^{N_2-1} \frac{P' - Y'_{n_2}}{P - Y'_{n_2}} = \prod_{n_2=0}^{N_2-1} \frac{P' - Y_{n_2}}{P - Y_{n_2}}, \quad \prod_{n_3=0}^{N_3-1} \frac{P' - Z'_{n_3}}{P - Z'_{n_3}} = \prod_{n_3=0}^{N_3-1} \frac{P' - Z_{n_3}}{P - Z_{n_3}} \quad (44)$$

имеет $g = (N_2 - 1)(N_3 - 1)$ неэквивалентных решений.

Занумеруем эти решения как $P_k, P'_k, k = 0, \dots, g - 1$.

Для некоторого N_1 определим матрицу $\mathbf{Z}_1$ посредством (10) со следующей локальной параметризацией $\mathbf{R}_n$:

$$\begin{aligned}
 x_{1,n} &= q^{-1} \frac{e(X_{n_1}, Z'_{n_3})e(Y_{n_2}, Z_{n_3})}{e(X_{n_1}, Z_{n_3})e(Y_{n_2}, Z'_{n_3})} \frac{\tau_{1,n}\tau_{2,n+e_3}}{\tau_{1,n+e_3}\tau_{2,n}}, \\
 y_{1,n} &= \frac{e(X_{n_1}, Y_{n_2})e(Z_{n_3}, Z'_{n_3})}{e(X_{n_1}, Z_{n_3})e(Y_{n_2}, Z'_{n_3})} \frac{\lambda_n \tau_{3,n}}{\tau_{1,n+e_3}\tau_{2,n}}, \\
 x_{2,n} &= \frac{e(X'_{n_1}, Z'_{n_3})e(Y'_{n_2}, Z_{n_3})}{e(X'_{n_1}, Z_{n_3})e(Y'_{n_2}, Z'_{n_3})} \frac{\tau_{1,n+e_2}\tau_{2,n+e_1+e_3}}{\tau_{1,n+e_2+e_3}\tau_{2,n+e_1}}, \\
 y_{2,n} &= q \frac{e(X'_{n_1}, Y'_{n_2})e(Z_{n_3}, Z'_{n_3})}{e(X'_{n_1}, Z_{n_3})e(Y'_{n_2}, Z'_{n_3})} \frac{\lambda_n \tau_{3,n+e_1+e_2}}{\tau_{1,n+e_2+e_3}\tau_{2,n+e_1}}, \\
 x_{3,n} &= q^{-1} \frac{e(X_{n_1}, Z'_{n_3})e(Y'_{n_2}, Z_{n_3})}{e(X_{n_1}, Z_{n_3})e(Y'_{n_2}, Z'_{n_3})} \frac{\tau_{1,n+e_2}\tau_{2,n+e_3}}{\tau_{1,n+e_2+e_3}\tau_{2,n}}, \\
 y_{3,n} &= q \frac{e(X_{n_1}, Y'_{n_2})e(Z_{n_3}, Z'_{n_3})}{e(X_{n_1}, Z_{n_3})e(Y'_{n_2}, Z'_{n_3})} \frac{\lambda_n \tau_{3,n+e_2}}{\tau_{1,n+e_2+e_3}\tau_{2,n}}, \\
 x_{4,n} &= q^{-1} \frac{e(X'_{n_1}, Z'_{n_3})e(Y_{n_2}, Z_{n_3})}{e(X'_{n_1}, Z_{n_3})e(Y_{n_2}, Z'_{n_3})} \frac{\tau_{1,n}\tau_{2,n+e_1+e_3}}{\tau_{1,n+e_3}\tau_{2,n+e_1}}, \\
 y_{4,n} &= \frac{e(X'_{n_1}, Y_{n_2})e(Z_{n_3}, Z'_{n_3})}{e(X'_{n_1}, Z_{n_3})e(Y_{n_2}, Z'_{n_3})} \frac{\lambda_n \tau_{3,n+e_1}}{\tau_{1,n+e_3}\tau_{2,n+e_1}},
 \end{aligned} \tag{45}$$

где

$$\begin{aligned}
 \tau_{1,n}^N &= H^{(g)} \left(\left\{ \frac{I_k(\mathbf{n})}{\sigma_k(X_{n_1})} \right\}_{k=0}^{g-1} \right), & \tau_{2,n}^N &= H^{(g)} \left(\left\{ \frac{I_k(\mathbf{n})}{\sigma_k(Y_{n_2})} \right\}_{k=0}^{g-1} \right), \\
 \tau_{3,n}^N &= H^{(g)} \left(\left\{ \frac{I_k(\mathbf{n})}{\sigma_k(Z_{n_3})} \right\}_{k=0}^{g-1} \right), & \lambda_n &= H^{(g)} \left(\left\{ \frac{I_k(\mathbf{n})\sigma_k(Z'_{n_3})}{\sigma_k(X_{n_1})\sigma_k(Y_{n_2})} \right\}_{k=0}^{g-1} \right)
 \end{aligned} \tag{46}$$

при

$$H^{(g)}(\{f_k\}_{k=0}^{g-1}) = \frac{\det |P_j^i - f_j P_j'^i|_{i,j=0}^{g-1}}{\prod_{i>j} (P_i - P_j)}, \quad \sigma_k(X) = \frac{P'_k - X}{P_k - X}, \tag{47}$$

$$I_k(\mathbf{n}) = f_k \left(\prod_{j_1=0}^{n_1-1} \frac{\sigma_k(X'_{j_1})}{\sigma_k(X_{j_1})} \right) \left(\prod_{j_2=0}^{n_2-1} \frac{\sigma_k(Y'_{j_2})}{\sigma_k(Y_{j_2})} \right) \left(\prod_{j_3=0}^{n_3-1} \frac{\sigma_k(Z'_{j_3})}{\sigma_k(Z_{j_3})} \right), \tag{48}$$

где g коэффициентов f_k — произвольные комплексные числа. Очевидно, что эта вновь определенная матрица $\mathbf{Z}_1$ совпадает с прежним определением, если все $f_k = 0$, однако теперь коммутативность $\mathbf{Q}_{n_1}$ отсутствует. Вместо нее существует перестановочное соотношение, эквивалентное следующему утверждению.

ГИПОТЕЗА 14. *Вновь определенная матрица $\mathbf{Z}_1$ является симметрической матричнозначной функцией по отношению к любой перестановке пар (X_{n_1}, X'_{n_1}) , $n_1 = 0, \dots, N_1 - 1$.*

Заметим, что во вновь определенной матрице $\mathbf{Z}_1$ любая такая перестановка изменяет $\tau_{j,n}$ и таким образом существенно меняет набор $\mathbf{R}_n$ и, следовательно, набор $\mathbf{Q}_{n_1}$.

Соответствующие определители задаются теми же формулами (28), (31) при

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{1:n_2, n_3}(n_1) &= \frac{e(Y_{n_2}, Z'_{n_3})}{e(Y'_{n_2}, Z_{n_3})} \frac{\tau_{2, \mathbf{n}} \tau_{3, \mathbf{n} + \mathbf{e}_2}}{\tau_{2, \mathbf{n} + \mathbf{e}_3} \tau_{3, \mathbf{n}}} \mathbf{x}_{1:n_2, n_3} \mathbf{z}_{1:n_2, n_3}, \\ \mathbf{w}_{1:n_2, n_3}(n_1) &= \frac{e(Y_{n_2}, Z_{n_3})}{e(Y'_{n_2}, Z_{n_3})} \frac{\tau_{3, \mathbf{n} + \mathbf{e}_2}}{\tau_{3, \mathbf{n}}} \mathbf{z}_{1:n_2, n_3}, \\ \mathbf{u}_{1:n_2, n_3}(n_1) &= \frac{e(Y'_{n_2}, Z'_{n_3})}{e(Y'_{n_2}, Z_{n_3})} \frac{\tau_{2, \mathbf{n}}}{\tau_{2, \mathbf{n} + \mathbf{e}_3}} \mathbf{x}_{1:n_2, n_3}. \end{aligned} \quad (49)$$

Теперь определитель зависит от n_1 через зависимость от $\tau_{j, \mathbf{n}}$, и мы обозначим эту зависимость как $\mathbf{J}_{n_1}(A, B)$.

ГИПОТЕЗА 15. Для данного порядка (X_{n_1}, X'_{n_1}) есть перестановочное соотношение

$$\mathbf{J}_{n_1}(A, B) \mathbf{Q}_{n_1} = \mathbf{Q}_{n_1} \mathbf{J}_{n_1+1}(A, B). \quad (50)$$

4.2. Изоспектральность. Пусть теперь

$$N_1 = g = (N_2 - 1)(N_3 - 1). \quad (51)$$

Изменим слегка нормировку коэффициентов f_k :

$$f_k = f'_k \sigma_k(X_k), \quad (52)$$

и рассмотрим предел, когда

$$X_k \mapsto P'_k, \quad (53)$$

f'_k — произвольные комплексные числа. Тогда в наборе аргументов $\tau_{2, \mathbf{n}}$ и $\tau_{3, \mathbf{n}}$ количество ненулевых амплитуд $I_k(\mathbf{n})$ равно n_1 . В частности,

$$\mathbf{J}_0(A, B) \equiv \mathbf{J}(A, B), \quad (54)$$

где $\mathbf{J}$ есть изначальный τ -независимый определитель (31). Применяя соотношение (50) g раз, мы получаем

$$\mathbf{J}(A, B) \mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_1 \mathbf{J}_g(A, B), \quad (55)$$

откуда можно сделать следующий вывод.

ГИПОТЕЗА 16. $\mathbb{C}^g$ -параметрическое семейство операторов $\mathbf{J}_g(A, B)$ изоспектрально $\mathbf{J}(A, B)$, и вновь определенный $\mathbf{Z}_1$ является оператором подобия, невырожденным для $\tilde{f}' \in \mathbb{C}^g$ общего положения.

Пусть $|\Psi_t\rangle$ — набор собственных векторов изначальных $\mathbf{t}_{m_2, m_3}$, составляющих $\mathbf{J}$, а $|\Psi_t^{(g)}\rangle$ — набор собственных векторов конечной системы $\mathbf{t}_{m_2, m_3}^{(g)}$, составляющих $\mathbf{J}_g$. Тогда имеет место

ГИПОТЕЗА 17. Оператор $\mathbf{Z}_1$ имеет следующие разложение:

$$\mathbf{Z}_1 = \sum_t |\Psi_t\rangle Q_{0,t} Q_{1,t} \dots Q_{g-1,t} \langle \Psi_t^{(g)}|. \quad (56)$$

4.3. Разделение. После (52) и (53) рассмотрим предел

$$f'_k \mapsto 1. \quad (57)$$

В этом пределе можно явно построить все модифицированные $\mathbf{Q}_{n_1}$ -операторы, однако сейчас нас интересуют модифицированные операторы

$$\mathbf{Q}_{n_1}(\alpha) = \sum_{\beta} \mathbf{Q}_{n_1}(\alpha, \beta). \quad (58)$$

Благодаря суммированию по β $\mathbf{W}_0 \mathbf{Q}_{n_1}(\alpha) = \mathbf{Q}_{n_1}(\alpha) \mathbf{W}_0$. Пусть в этом пределе

$$\mathbf{Z}_1(\vec{\alpha}) = \mathbf{Q}_0(\alpha_0) \mathbf{Q}_1(\alpha_1) \dots \mathbf{Q}_{g-1}(\alpha_{g-1}) \quad (59)$$

при $X_k \mapsto P'_k$, $f'_k \mapsto 1$. Квантовое разделение переменных основано на следующей гипотезе.

ГИПОТЕЗА 18. В пределе (57) конечные собственные векторы коллинеаризуются, базис собственных векторов вырождается, и матрица $\mathbf{Z}_1(\alpha)$ имеет разложение

$$\mathbf{Z}_1(\vec{\alpha}) = \sum_t |\Psi_t\rangle Q_{0,t}(\alpha_0) \dots Q_{g-1,t}(\alpha_{g-1}) \langle \chi_{t'}|, \quad (60)$$

где t' есть поднабор t , соответствующий $N_2 + N_3 - 1$ коммутативных операторов $\mathbf{U}_0^{-1} \mathbf{U}_{n_2}$ и $\mathbf{W}_{n_3}$.

Заметим, что $\langle \chi|$ зависит от X'_{n_1} и, таким образом, имеет значительную свободу в определении. В разложении (60) можно выполнить суммирование по $t \setminus t'$:

$$|\Phi_{\vec{\alpha}, t'}\rangle = \sum_{t \setminus t'} |\Psi_t\rangle Q_{0,t}(\alpha_0) \dots Q_{g-1,t}(\alpha_{g-1}). \quad (61)$$

Базис векторов $|\Phi_{\vec{\alpha}, t'}\rangle$ называется разделенным базисом. Теперь мы попробуем описать его происхождение.

Вернемся назад к матрице $\ell_{s|v}$ (28), (29). Пусть $\mathbf{A}_{v|s}$ – матрица алгебраических дополнений, определяемая посредством формулы

$$\sum_{v \in \mathbb{Z}_{N_2} \times \mathbb{Z}_{N_3}} \ell_{s|v} \mathbf{A}_{v|s'} = \delta_{s|s'} \mathbf{J}(A, B), \quad (62)$$

где $\mathbf{J}$ дается формулой (31).

“Обычный” способ вывода квантового разделения переменных [5] – это построение весьма сложной процедуры, которую схематически можно описать как

$$\text{“квантовый результат” по } B(\mathbf{J}(A, B), \mathbf{A}_{s|v}(A, B)) = \tilde{\mathbf{b}}_v(A) \mathbf{b}_s(A), \quad (63)$$

где $\mathbf{b}_s(A)$ – полином g -й степени по A . Определенные в (61) $\Phi_{\vec{\alpha}, t'}$ есть собственные векторы $\mathbf{b}_s(A)$ для $s = (0, 0)$. К счастью, в нашем подходе можно избавиться от рассмотрения “квантового результата”, выбирая следующий прямой путь.

Пусть $\mathcal{V}_s(A, B)$ – подпространство полного векторного пространства $\mathcal{V}$, определяемое как

$$|\Phi\rangle \in \mathcal{V}_s(A, B) \Leftrightarrow \mathbf{J}(A, B)|\Phi\rangle = 0, \quad \mathbf{A}_{v|s}|\Phi\rangle = 0 \quad (64)$$

для любого v .

ГИПОТЕЗА 19. Если

$$A = A_k \stackrel{\text{опр.}}{=} q^{\alpha_k} \prod_{n_2} \frac{e(P'_k, Y_{n_2})}{e(P'_k, Y'_{n_2})}, \quad B = B_k \stackrel{\text{опр.}}{=} q^{\beta_k} \prod_{n_3} \frac{e(P'_k, Z_{n_3})}{e(P'_k, Z'_{n_3})} \quad (65)$$

для любого $k = 0, \dots, g-1$, то $\dim \mathcal{V}_s(A, B) = N^{\Delta-2}$ ($\Delta = N_2 N_3$).

Пусть далее

$$\mathcal{V}_s(k, \alpha_k) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_N} \mathcal{V}_s(A_k, q^n B_k), \quad \mathcal{V}_s(\vec{\alpha}) = \bigcap_{k=0}^{g-1} \mathcal{V}_s(k, \alpha_k). \quad (66)$$

Очевидно, что по построению $\dim \mathcal{V}_s(\vec{\alpha}) = N^{\Delta-g}$ и $\mathbf{b}_s(A_k) \cdot \mathcal{V}_s(\vec{\alpha}) = 0$.

Наш подход к квантовому разделению переменных технически основан на следующем утверждении.

ГИПОТЕЗА 20. Первый же модифицированный оператор $\mathbf{Q}_0(\alpha_0, \beta_0)$ в цепочке операторов (59) удовлетворяет в пределе (53) уравнению

$$\mathbf{J}(A_0, B_0) \cdot \mathbf{Q}_0(\alpha_0, \beta_0) = \mathbf{A}_{v|s}(A_0, B_0) \cdot \mathbf{Q}_0(\alpha_0, \beta_0) = 0 \quad (67)$$

для любого v и $s = (n_2, n_3)$, если $\tau_{1,0}\mathbf{e}_1 + n_2\mathbf{e}_2 + n_3\mathbf{e}_3 = 0$.

Таким образом, $\mathbf{Q}_0(\alpha_0)$ – проектор на $\mathcal{V}_s(0, \alpha_0)$, и в силу гипотезы 14 формула (59) дает проектор на $\mathcal{V}_s(\vec{\alpha})$. Предел (57) соответствует выбору $s = (0, 0)$.

Благодарности. Я хотел бы сердечно поблагодарить профессора Ю. Сатсуму и профессора Т. Токихиро за их гостеприимство во время моего пребывания в Высшей Школе Математических Наук Университета Токио, где была выполнена основная часть данной работы.

Я также хотел бы поблагодарить П. Кулиша, М. Семенова-Тян-Шанского и моих соавторов Г. фон Гелена и С. Пакуляка за многочисленные стимулирующие дискуссии.

Я благодарен А. Белавину, Д. Лебедеву, В. Матвееву, С. Харчеву, С. Хорошкину, А. Герасимову, А. Волкову, Р. Кашаеву, Г. Пронько, Ю. Строганову, Г. Боосу за их интерес к этому сюжету и ценные замечания.

Специальная благодарность профессорам Г. Хардеру, Г. Фалтингсу, Ю. Манину и Д. Пагиру за возможность приобщиться к замечательной интеллектуальной атмосфере Института Математики общества им. Макса Планка.

Работа финансировалась частично грантами INTAS OPEN 00-00055, RFBR 01-01-00201, CGP CRDF RM1-2334-MO-02, Grant-in-Aid for scientific research of Japan Society for the Promotion of Science

Список литературы

- [1] *S. Sergeev*. J. Phys. A. 1999. V. 32. P. 5693–5714; Phys. Lett. A. 2000. V. 265. P. 364–368; J. Nonlinear Math. Phys. 2000. V. 7. P. 57–72; *С. М. Сергеев*. ТМФ. 2000. Т. 124. С. 391–409; Зап. научн. семин. ПОМИ. 2000. Т. 269. С. 292–307; Вполне интегрируемые дискретные системы в трех измерениях. Автореферат дисс. докт. физ.-матем. наук. С.-Петербург: ПОМИ, 2001.
- [2] *А. Б. Замолодчиков*. ЖЭТФ. 1980. Т. 79. С. 641–664; *A. B. Zamolodchikov*. Commun. Math. Phys. 1981. V. 79. P. 489–505; *R. J. Baxter*. Commun. Math. Phys. 1983. V. 88. P. 185–205; Phys. Rev. Lett. 1984. V. 53. P. 1795–1798; Physica D. 1986. V. 18. P. 321–347; *V. V. Bazhanov, R. J. Baxter*. J. Stat. Phys. 1992. V. 69. P. 453–485.
- [3] *S. M. Sergeev, V. V. Mangazeev, Yu. G. Stroganov*. J. Stat. Phys. 1996. V. 82. P. 31–50.
- [4] *L. D. Faddeev*. Lett. Math. Phys. 1995. V. 34. P. 249–254; Modular double of quantum group. In: Conférence Moshé Flato. Quantization, Deformation, and Symmetries. Dijon, France, September 5–8, 1999. V. 1. Eds. G. Dito et al. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000. P. 149–156; math.qn/9912078; *V. V. Bazhanov, N. Yu. Reshetikhin*. J. Phys. A. 1995. V. 28. P. 2217–2226; *V. Bazhanov, A. Bobenko, N. Reshetikhin*. Commun. Math. Phys. 1996. V. 175. P. 377–400; *R. Kashaev, N. Reshetikhin*. Invariants of links with flat connections in their complements. II. Holonomy R -matrices related to quantized universal enveloping algebras at roots of 1. math.AT/0202212.
- [5] *E. K. Sklyanin*. Functional Bethe ansatz. In: Integrable and Superintegrable Systems. Ed. B. A. Kupershmidt. Teanect, NJ: World Scientific, 1990. P. 8–33; Quantum Inverse Scattering Method. Selected Topics. In: Quantum Group and Quantum Integrable Systems (Nankai Lectures in Mathematical Physics). Ed. Mo-Lin Ge. Singapore: World Scientific, 1992. P. 63–97; Progr. Theor. Phys. (suppl). 1995. V. 118. P. 35–60; *F. A. Smirnov*. Separation of variables for quantum integrable models related to $U_q(\widehat{sl}_N)$. math-ph/0109013.
- [6] *S. Pakuliak, S. Sergeev*. Relativistic Toda chain at root of unity. nlin.SI/0101024; II. Modified Q -operator. nlin.SI/0107062; III. Relativistic Toda chain hierarchy. nlin.SI/0107063; Quantum relativistic Toda chain at root of unity: isospectrality, modified Q -operator and functional Bethe ansatz. nlin.SI/0205037.

Поступила в редакцию 18.XII.2002 г.