Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Баллестерос, О. Чивитарезе, Ф. Д. Герратц, М. Ребойро, Эффективные $su_q(2)$ -модели и полиномиальные алгебры для фермион-бозонных гамильтонианов, *ТМФ*, 2003, том 137, номер 2, 165–175

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf261>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 11:46:12

© 2003 г.

А. Баллестерос*, О. Чивитарезе†,
Ф. Дж. Герратц*, М. Ребойро†

ЭФФЕКТИВНЫЕ $su_q(2)$ -МОДЕЛИ И ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ АЛГЕБРЫ ДЛЯ ФЕРМИОН-БОЗОННЫХ ГАМИЛЬТониАнов

Показано, что схематические $su(2) \oplus h_3$ -гамильтонианы взаимодействия, где $su(2)$ играет роль алгебры псевдоспина фермионных операторов, а h_3 – алгебра Гейзенберга для бозонов, тесно связаны с некоторыми нелинейными моделями, определенными на одной только квантовой алгебре $su_q(2)$ квазифермионов. В частности, представлены $su_q(2)$ -аналоги модели Да Провиденция–Шютте и обобщенных моделей Липкина. Анализируется связь параметра q с физическими параметрами фермион-бозонной системы и обсуждаются, с применением полиномиальных алгебр, свойства интегрируемости гамильтонианов взаимодействия.

Ключевые слова: квантовые алгебры, эффективные гамильтонианы, динамическая симметрия, ядерная физика.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе мы обсудим эквивалентность систем взаимодействующих фермионов и бозонов системам q -деформированных эффективных фермионов. Конкретно мы рассмотрим схематические фермион-бозонные гамильтонианы взаимодействия двух различных типов,

$$H_{++} = \omega_f(T_0 + \Omega) + \omega_b B^\dagger B + G(T_+^k(B^\dagger)^p + T_-^k(B)^p), \quad (1.1)$$

$$H_{+-} = \omega_f(T_0 + \Omega) + \omega_b B^\dagger B + G(T_+^k(B)^p + T_-^k(B^\dagger)^p), \quad (1.2)$$

при этом ограничимся случаями $k, p = 1, 2$. Фермионы (двухуровневые) представлены коллективными операторами псевдоспина $\{T_0, T_\pm\}$, а разность энергий фермионных уровней определяется энергетическим масштабом ω_f . Фермионы взаимодействуют с внешним бозонным полем частоты ω_b , которое квантуется с помощью операторов рождения $B^\dagger$ и уничтожения B .

*Departamento de Física, Universidad de Burgos, Pza. Misael Bañuelos s.n., E-09001-Burgos, Spain. E-mail: angelb@ubu.es; fteorica@cpd.uva.es

†Departamento de Física, Universidad Nacional de La Plata, c.c. 67 1900, La Plata, Argentina. E-mail: civitare@venus.fisica.unlp.edu.ar; reboiro@fisica.unlp.edu.ar

Многие интересные квантовые модели относятся к этой категории гамильтонианов. В частности, H_{+-} с $k = p = 1$ — это хорошо известная в квантовой оптике модель Дикке [1], демонстрирующая многие характерные черты нелинейных квантовых явлений [2]. На протяжении многих лет используются модели, основанные на взаимодействии бифермионов и бозонов [3] (см. также [4] и имеющиеся там ссылки), они особенно пригодны для описания явлений конденсации и переходов из фермионных фаз в бозонные. Здесь мы изучим модель Да Провиденция–Шютте [5] (она соответствует случаю H_{++} с $k = p = 1$) и два различных обобщения модели Липкина–Мешкова–Глика ($k = 2$, $p = 1$ [6] и $k = 2$, $p = 0$ [6], [7]).

Оказывается, что все эти модели можно заменить эффективными $su_q(2)$ -квазифермионными гамильтонианами без бозонных операторов, если соответствующим образом подобрать параметр деформации q исходя из физических условий. При этом мы будем ссылаться на результаты численного анализа, который убедительно свидетельствует в пользу этого утверждения [8], и прокомментируем некоторые свойства интегрируемости этого класса взаимодействий.

В этой связи напомним, что точная решаемость $su_q(2)$ -гамильтониана взаимодействия

$$H_q^{\text{int}} = q^{\tilde{T}_0/2} (\tilde{T}_+ + \tilde{T}_-) q^{\tilde{T}_0/2} \quad (1.3)$$

установлена в работе [9], а этот оператор используется в качестве строительного блока для рассматриваемых нами эффективных q -гамильтонианов. Именно, собственные значения гамильтониана (1.3) — это в точности q -числа $[2m]_q$ ($m = -j, \dots, +j$), а соответствующие собственные векторы выражаются через q -полиномы Кравчука [10]. С другой стороны, использование квантовых деформаций $su(2)$ в данном контексте совершенно естественно с чисто алгебраической точки зрения, поскольку хорошо известно, что фермион-бозонные модели связаны с полиномиальными обобщениями алгебры $su(2)$ (см., например, [11]). В частности, если мы рассмотрим операторы

$$K_0 = T_0, \quad K_+ = T_+^k (B^\dagger)^p, \quad K_- = T_-^k (B)^p$$

и возьмем их представление на некотором инвариантном подпространстве гамильтониана взаимодействия, то получим коммутационные соотношения типа

$$[K_+, K_-] = F(K_0),$$

где $F(K_0)$ — полином по K_0 степени $2k + p - 1$, и то же самое справедливо, если рассмотреть операторы $K_+ = T_+^k (B)^p$ и $K_- = T_-^k (B^\dagger)^p$.

В данной статье мы используем этот полиномиально-алгебраический подход для получения новых (насколько нам известно) интегралов движения для всех рассматриваемых моделей. Более того, поскольку коэффициенты полинома $F(K_0)$ выражаются через физические параметры модели (вырождение фермионных оболочек, квантовые числа инвариантного подпространства и т.д.), можно получить новые интерпретации переходов в определенные динамические режимы (например, предел сильного поля [2]) в терминах алгебраических преобразований типа процессов контракции [12]. Вообще мы

ожидаем, что сравнение алгебраических свойств таких полиномиальных алгебр и алгебраических свойств $su_q(2)$ объяснит эффективность квантовых алгебр в более фундаментальных терминах, что позволит моделировать эффективные фермион-бозонные взаимодействия.

2. МОДЕЛЬ ДА ПРОВИДЕНЧИА–ШЮТТЕ

Модель, предложенная Да Провиденчиа и Шютте (ДПШ), представляет собой решаемую модель, которая демонстрирует фазовый переход между нуклонным и пионным конденсатами и состоит из $N = 2\Omega$ фермионов, движущихся в двух отдельных оболочках, каждая из которых 2Ω -кратно вырождена. Гамильтониан ДПШ имеет вид [5]

$$H = \omega_f(T_0 + \Omega) + \omega_b B^\dagger B + G(T_+ B^\dagger + T_- B), \quad (2.1)$$

где G – константа связи, а $\{T_0, T_\pm\}$ – генераторы алгебры $su(2)$ коллективных фермионов:

$$[T_0, T_+] = T_+, \quad [T_0, T_-] = -T_-, \quad [T_+, T_-] = 2T_0. \quad (2.2)$$

Гамильтониан (2.1) коммутирует с оператором

$$P = B^\dagger B - (T_0 + \Omega). \quad (2.3)$$

Поэтому матричные элементы H можно вычислить в базисе $|m_\Omega, n\rangle$, занумерованном собственными значениями операторов числа фермионов и числа бозонов. В этом базисе собственные значения оператора P даются формулой

$$P|m_\Omega, n\rangle = (n - m_\Omega - \Omega)|m_\Omega, n\rangle. \quad (2.4)$$

Гамильтониан H диагонализует в каждом подпространстве, натянутом на состояния $|m_\Omega, L + m_\Omega + \Omega\rangle \equiv |m_\Omega; L, \Omega\rangle$ с фиксированным собственным значением L оператора P ,

$$P|m_\Omega; L, \Omega\rangle = L|m_\Omega; L, \Omega\rangle. \quad (2.5)$$

Нетривиальные матричные элементы H в этом подпространстве имеют вид [8]

$$\begin{aligned} \langle m_\Omega; L, \Omega | H | m_\Omega; L, \Omega \rangle &= \omega_b L + (\omega_f + \omega_b)(\Omega + m_\Omega), \\ \langle m_\Omega + 1; L, \Omega | H | m_\Omega; L, \Omega \rangle &= G \sqrt{(\Omega + m_\Omega + 1)(\Omega - m_\Omega)(L + \Omega + m_\Omega + 1)}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Размерность такого подпространства зависит от знака L . При $L \geq 0$ квантовое число m_Ω может принимать значения

$$m_\Omega = -\Omega, -\Omega + 1, \dots, \Omega \quad (2.7)$$

и размерность подпространства равна $2\Omega + 1$. Если $L < 0$, то m_Ω принимает значения

$$m_\Omega = -L - \Omega, -L - \Omega + 1, \dots, \Omega \quad (2.8)$$

и размерность инвариантного подпространства равна $2\Omega + L + 1$.

Будем говорить, что система находится в *нормальной фазе*, если коррелированное основное состояние является собственным состоянием оператора симметрии P с собственным значением $L = 0$. Термин *деформированная фаза* употребляется в случае, когда коррелированное основное состояние является собственным состоянием P с собственным значением $L \neq 0$: при $L > 0$ мы имеем так называемую *бозонную фазу*, случай $L < 0$ соответствует *фермионной фазе*.

2.1. Алгебра ДППШ. Определим операторы

$$K_0 = T_0, \quad K_+ = T_+ B^\dagger, \quad K_- = T_- B. \quad (2.9)$$

Рассматривая при заданных Ω и $L \geq 0$ действие этих операторов в подпространстве $|m_\Omega; L, \Omega\rangle$, получаем алгебру ДППШ

$$\begin{aligned} [K_0, K_\pm] &= \pm K_\pm, \\ [K_+, K_-] &= -\Omega(\Omega + 1) + (1 + 2L + 2\Omega)K_0 + 3K_0^2. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Можно также проверить, что в случае $L < 0$ алгебра ДППШ определяется соотношениями (2.10), в которых L заменено на $-L$. Соответственно оператор Казимира алгебры ДППШ доставляет новый интеграл движения модели ДППШ, он находится стандартными методами [13] и имеет вид

$$C = K_+ K_- + K_0^3 + (L + \Omega - 1)K_0^2 - \{(L + \Omega) + \Omega(\Omega + 1)\}K_0.$$

В подпространстве, отвечающем $L \geq 0$, собственное значение C равно $\Omega(\Omega + 1)(\Omega + L)$.

Заметим, что алгебра ДППШ (2.10) является квадратичным обобщением алгебры Ли $su(2)$. Действительно, алгебру $su(2)$ можно получить как контракцию алгебры ДППШ в пределе $L \rightarrow \infty$ [12]. Именно, если определить “контрактированные генераторы” в виде

$$J_0 = K_0, \quad J_\pm = \frac{1}{\sqrt{L}} K_\pm \quad (2.11)$$

и вычислить их коммутационные соотношения, то получим алгебру

$$\begin{aligned} [J_0, J_\pm] &= \pm J_\pm, \\ [J_+, J_-] &= \frac{1}{L} \{-\Omega(\Omega + 1) + (1 + 2L + 2\Omega)J_0 + 3J_0^2\}, \end{aligned}$$

которая по-прежнему изоморфна алгебре ДППШ. Но в пределе $L \rightarrow \infty$ эти коммутационные соотношения принимают вид

$$[J_0, J_\pm] = \pm J_\pm, \quad [J_+, J_-] = 2J_0.$$

На физическом языке предел $L \rightarrow \infty$ — это хорошо известный предел “сильного поля” для модели Дике в квантовой оптике [2], где динамика взаимодействия определяется алгеброй $su(2)$. Переписывая оператор Казимира алгебры ДППШ через контрактированные генераторы, получим

$$C = LJ_+ J_- + J_0^3 + (L + \Omega - 1)J_0^2 - \{(L + \Omega) + \Omega(\Omega + 1)\}J_0,$$

и оператор Казимира $C_{su(2)}$ алгебры $su(2)$ получается предельным переходом:

$$C_{su(2)} = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{C}{L} = J_+ J_- + J_0(J_0 - 1).$$

Заметим, что контрактированные собственные значения в точности равны $\Omega(\Omega + 1)$, как и должно быть. Как мы увидим в дальнейшем, этот полиномиально-алгебраический подход применим ко всем рассматриваемым фермион-бозонным гамильтонианам.

2.2. Эффективные $su_q(2)$ -гамильтонианы для модели ДППШ. Квантовая алгебра $su_q(2)$ является деформацией алгебры $su(2)$ в смысле алгебры Хопфа [14], ее генераторы $\{\tilde{T}_\pm, \tilde{T}_0\}$ удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[\tilde{T}_0, \tilde{T}_\pm] = \pm \tilde{T}_\pm, \quad [\tilde{T}_+, \tilde{T}_-] = [2\tilde{T}_0]_q, \quad (2.12)$$

где q -число $[x]_q$ определяется как

$$[x]_q = \frac{q^x - q^{-x}}{q - q^{-1}} = \frac{\text{sh } zx}{\text{sh } z}. \quad (2.13)$$

Мы будем попеременно использовать q и z (где $q = e^z$) в качестве параметра деформации и предполагать q вещественным. В пределе $q \rightarrow 1$ ($z \rightarrow 0$) из (2.12) восстанавливается алгебра $su(2)$ (2.2).

Если q не является корнем из единицы, то неприводимые представления алгебры $su_q(2)$ получаются как прямые обобщения соответствующих неприводимых представлений алгебры $su(2)$ [15]:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_0 |j, m\rangle &= m |j, m\rangle, \\ \tilde{T}_+ |j, m\rangle &= \sqrt{[j+m+1]_q [j-m]_q} |j, m+1\rangle, \\ \tilde{T}_- |j, m\rangle &= \sqrt{[j-m+1]_q [j+m]_q} |j, m-1\rangle. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Следуя [8], [9], определим эффективный гамильтониан в виде

$$H_q = \omega_b L + (\omega_b + \omega_f)(\tilde{T}_0 + \Omega) + \chi(q) q^{\tilde{T}_0/2} (\tilde{T}_+ + \tilde{T}_-) q^{\tilde{T}_0/2}, \quad (2.15)$$

где $\chi(q)$ — скалярная функция, которую нужно определить, и H_q действует в неприводимом представлении алгебры $su_q(2)$ той же размерности, что и подпространство, натянутое на векторы $|m_\Omega; L, \Omega\rangle$ (следовательно, с $j = j(\Omega, L)$). Ненулевые матричные элементы гамильтониана (2.15) имеют вид

$$\begin{aligned} \langle j, m | H_q | j, m \rangle &= \omega_b L + (\omega_f + \omega_b)(m + \Omega), \\ \langle j, m+1 | H_q | j, m \rangle &= \chi(q) q^{m+1/2} \sqrt{[j+m+1]_q [j-m]_q}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Чтобы подогнать размерность представления к инвариантному подпространству модели ДППШ, для эффективной модели с $L \geq 0$ нужно взять $j = \Omega$ и $m = m_\Omega$, тогда как при $L < 0$ нужно взять $j = \Omega + L/2$ и $m = m_\Omega + L/2$.

Главный вывод работы [8] (относительно модели Дике см. также [9]) состоит в том, что гамильтониан (2.1) по существу эквивалентен гамильтониану (2.15). Другими словами, бозонные степени свободы, включенные в (2.1), могут быть поглощены q -деформацией в (2.15), если определить q подходящим образом как функцию Ω и L . Таким образом, H_q можно рассматривать как эффективный гамильтониан, физические свойства которого аналогичны физическим свойствам H . Как показали подробные численные исследования в работе [8], как энергию основного состояния, так и полный спектр модели ДППШ можно правильно воспроизвести при использовании эффективного q -гамильтониана (2.15).

2.3. q -Алгебра ДППШ. Следуя тому же самому алгебраическому подходу, который привел к предыдущей алгебре ДППШ, мы должны теперь рассмотреть $su_q(2)$ -операторы

$$K_0 = \tilde{T}_0, \quad K_+ = q^{\tilde{T}_0/2} \tilde{T}_+ q^{\tilde{T}_0/2}, \quad K_- = q^{\tilde{T}_0/2} \tilde{T}_- q^{\tilde{T}_0/2},$$

так что эффективный гамильтониан (2.15) является линейной функцией K_0 и $K_{\pm}$. q -Коммутационные соотношения алгебры $su_q(2)$ имеют вид

$$[K_0, K_{\pm}] = \pm K_{\pm}, \quad qK_+K_- - q^{-1}K_-K_+ = q^{2K_0}[2K_0]_q, \quad (2.17)$$

и эти выражения выполняются для любого неприводимого представления j алгебры $su_q(2)$. Элемент Казимира этой алгебры имеет вид

$$C_q = [K_0]_q[K_0 - 1]_q + q^{-2K_0+1}K_+K_-, \quad (2.18)$$

и его собственное значение есть в точности $[j]_q[j+1]_q$. Очевидно, C_q является интегралом движения для H_q (2.15). При сужении на определенное неприводимое представление j можно переписать последний q -коммутатор в виде коммутационного соотношения (которое в дальнейшем мы называем q -алгеброй ДППШ)

$$[K_+, K_-] = \frac{q^{2j+2} + q^{-2j}}{1 - q^2} q^{2K_0} - \frac{1 + q^2}{1 - q^2} q^{4K_0}, \quad (2.19)$$

алгебраические свойства которого должны быть тесно связаны со свойствами алгебры ДППШ (2.10), так как эти модели физически эквивалентны. Фактически аналитическая подгонка $q = q(\Omega, L)$ должна быть найдена из сравнения свойств алгебры ДППШ и q -алгебры ДППШ. Мы сейчас работаем над этой проблемой [16].

3. ОБОБЩЕННЫЕ МОДЕЛИ ЛИПКИНА

В качестве второго примера гамильтонианов, включающих фермионные и бозонные степени свободы, рассмотрим обобщенный гамильтониан Липкина–Мешкова–Глика (ЛМГ) (модель ЛЕ) [6]

$$H_{+-} = \omega_f(T_0 + \Omega) + \omega_b B^\dagger B + G(T_+^2 B + T_-^2 B^\dagger), \quad (3.1)$$

который совпадает с (1.2) при $k = 2$ и $p = 1$ и коммутирует с оператором [17]

$$P_{(+)} = B^\dagger B + \frac{1}{2}(T_0 + \Omega). \quad (3.2)$$

Поэтому матричные элементы гамильтониана H_{+-} модели ЛЕ можно вычислить в базисе, занумерованном собственными значениями $P_{(+)}$,

$$P_{(+)}|m_\Omega, n\rangle = L|m_\Omega, n\rangle = \left(n + \frac{1}{2}(\Omega + m_\Omega)\right)|m_\Omega, n\rangle, \quad (3.3)$$

и мы рассмотрим инвариантное подпространство с фиксированным L , $|m_\Omega, L - (\Omega + m_\Omega)/2\rangle \equiv |m_\Omega; L, \Omega\rangle$. В этом подпространстве нетривиальные матричные элементы H имеют вид

$$\begin{aligned}\langle m_\Omega; L, \Omega | H_{+-} | m_\Omega; L, \Omega \rangle &= \omega_b L + \left(\omega_f - \frac{1}{2} \omega_b \right) (\Omega + m_\Omega), \\ \langle m_\Omega + 2; L, \Omega | H_{+-} | m_\Omega; L, \Omega \rangle &= \\ &= G \sqrt{\left(L - \frac{1}{2} (\Omega + m_\Omega) \right) (\Omega + m_\Omega + 2) (\Omega + m_\Omega + 1) (\Omega - m_\Omega) (\Omega - m_\Omega - 1)},\end{aligned}$$

при этом следует различать следующие классы инвариантных подпространств:

$$\begin{aligned}L \geq \Omega, \quad L \text{ целое}, \quad m_\Omega + \Omega &= 0, 2, \dots, 2\Omega, \\ L > \Omega, \quad L \text{ полуцелое}, \quad m_\Omega + \Omega &= 1, 3, \dots, 2\Omega - 1, \\ L < \Omega, \quad L \text{ целое}, \quad m_\Omega + \Omega &= 0, 2, \dots, 2L, \\ L < \Omega, \quad L \text{ полуцелое}, \quad m_\Omega + \Omega &= 0, 2, \dots, 2L - 1.\end{aligned}$$

Еще один гамильтониан типа Липкина также можно определить как гамильтониан (1.1) с $k = 2$ и $p = 1$,

$$H_{++} = \omega_f (T_0 + \Omega) + \omega_b B^\dagger B + G (T_+^2 B^\dagger + T_-^2 B), \quad (3.4)$$

он отличается от гамильтониана (3.1) корреляциями в основном состоянии [6]. Поскольку H_{++} коммутирует с оператором

$$P_{(-)} = B^\dagger B - \frac{1}{2} (T_0 + \Omega),$$

его матричные элементы можно вычислить в базисе, занумерованном собственными значениями $P_{(-)}$, именно

$$P_{(-)} |m_\Omega, n\rangle = \left(n - \frac{1}{2} (\Omega + m_\Omega) \right) |m_\Omega, n\rangle.$$

В этом случае матричные элементы вычисляются в подпространстве, натянутом на состояния $|m_\Omega, L + (\Omega + m_\Omega)/2\rangle \equiv |m_\Omega; L, \Omega\rangle$. Нетривиальные матричные элементы гамильтониана H_{++} (3.4) теперь даются формулами

$$\begin{aligned}\langle m_\Omega; L, \Omega | H_{++} | m_\Omega; L, \Omega \rangle &= \omega_b L + \left(\omega_f + \frac{1}{2} \omega_b \right) (\Omega + m_\Omega), \\ \langle m_\Omega + 2; L, \Omega | H_{++} | m_\Omega; L, \Omega \rangle &= \\ &= G \sqrt{\left(L + \frac{1}{2} (\Omega + m_\Omega) + 1 \right) (\Omega + m_\Omega + 2) (\Omega + m_\Omega + 1) (\Omega - m_\Omega) (\Omega - m_\Omega - 1)},\end{aligned}$$

а размерность подпространства зависит от L и Ω , поскольку мы должны учитывать следующие возможности для множества значений квантового числа m_Ω :

$$\begin{aligned}L \geq 0, \quad L \text{ целое}, \quad m_\Omega + \Omega &= 0, 2, \dots, 2\Omega, \\ L > 0, \quad L \text{ полуцелое}, \quad m_\Omega + \Omega &= 1, 3, \dots, 2\Omega - 1, \\ L < 0, \quad L \text{ целое}, \quad m_\Omega + \Omega &= -2L, -2L + 2, \dots, 2\Omega, \\ L < 0, \quad L \text{ полуцелое}, \quad m_\Omega + \Omega &= -2L, -2L + 2, \dots, 2\Omega - 1.\end{aligned}$$

3.1. Алгебры ЛЕ и их операторы Казимира. Полиномиально-алгебраический подход можно также применить к моделям ЛЕ (3.1) и (3.4). Начнем наш анализ с напоминания свойств кубической алгебры, связанной с оригинальным гамильтонианом ЛМГ [7], поскольку последний оказывается пределом сильного поля для расширенной модели ЛЕ.

3.1.1. *Алгебра ЛМГ.* Напомним вид $su(2)$ -гамильтониана ЛМГ [7]:

$$H = \omega_f T_0 + \chi(T_+^2 + T_-^2).$$

Определяя операторы

$$K_0 = T_0, \quad K_+ = T_+^2, \quad K_- = T_-^2$$

(см. также [18]), получаем кубическую алгебру

$$\begin{aligned} [K_0, K_{\pm}] &= \pm 2K_{\pm}, \\ [K_+, K_-] &= 4\{2\Omega(\Omega + 1) - 1\}K_0 - 8K_0^3, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где произведено отождествление $j \equiv \Omega \geq 0$. Заметим, что эта алгебра изоморфна алгебре Хиггса [19] при любом значении Ω . Найденный оператор Казимира для этой алгебры имеет вид

$$C = K_+ K_- - K_0^4 + 4K_0^3 + \{2\Omega(\Omega + 1) - 5\}K_0^2 - 2\{2\Omega(\Omega + 1) - 1\}K_0, \quad (3.6)$$

а его собственные значения равны $\Omega(\Omega^2 - 1)(\Omega + 2)$.

3.1.2. *Алгебра LE_{+-} .* Рассмотрим входящие в (3.1) операторы

$$K_0 = T_0, \quad K_+ = T_+^2 B, \quad K_- = T_-^2 B^\dagger. \quad (3.7)$$

Если вычислить их действие на инвариантном подпространстве типа $L \geq \Omega$, то получим обобщение алгебры Ли $su(2)$ четвертой степени

$$\begin{aligned} [K_0, K_{\pm}] &= \pm 2K_{\pm}, \\ [K_+, K_-] &= \alpha_0 + \alpha_1 K_0 + \alpha_2 K_0^2 + \alpha_3 K_0^3 + \alpha_4 K_0^4, \end{aligned} \quad (3.8)$$

структурные константы которой $\alpha_i(\Omega, L)$ имеют вид

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \Omega(\Omega^2 - 1)(\Omega + 2), \\ \alpha_1 &= 2(1 - 2\Omega(\Omega + 1))(\Omega - 2L - 1), \\ \alpha_2 &= 7 - 6\Omega(\Omega + 1), \\ \alpha_3 &= 4(\Omega - 2L - 1), \quad \alpha_4 = 5. \end{aligned}$$

Оператор Казимира алгебры (3.7), доставляющий новый интеграл движения для H_{+-} , также можно вычислить:

$$C = K_+ K_- + \beta_0 + \beta_1 K_0 + \beta_2 K_0^2 + \beta_3 K_0^3 + \beta_4 K_0^4 + \beta_5 K_0^5, \quad (3.9)$$

где

$$\begin{aligned}\beta_0 &= -\Omega(\Omega^2 - 1)(\Omega + 2), \\ \beta_1 &= 2(L + 1) + \frac{1}{2}\Omega(-12 + \Omega(\Omega^2 + 6\Omega - 5) - 8(\Omega + 1)L), \\ \beta_2 &= -6 - 5L + \frac{1}{2}\Omega(13 + 2\Omega(3 - \Omega) + 4(\Omega + 1)L), \\ \beta_3 &= \frac{13}{2} - \Omega(\Omega + 3) + 4L, \\ \beta_4 &= \frac{1}{2}\Omega - 3 - L, \quad \beta_5 = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Найденное собственное значение C равно $-\Omega(\Omega^2 - 1)(\Omega + 2)(\Omega - 2L)/2$. Можно проверить также, что алгебру ЛМГ (3.5) и оператор Казимира (3.6) можно получить как контракцию соответственно алгебры (3.8) и оператора Казимира (3.9), выполнив преобразование (2.11) и перейдя затем к пределу “сильного поля” $L \rightarrow \infty$. Для остальных инвариантных подпространств можно получить аналогичные алгебры четвертой степени [16].

3.1.3. *Алгебра LE_{++} .* Для второго класса моделей ЛЕ (3.4) определим генераторы следующим образом:

$$K_0 = T_0, \quad K_+ = T_+^2 B^\dagger, \quad K_- = T_-^2 B.$$

Ассоциированная алгебра четвертой степени при $L \geq 0$ имеет вид

$$\begin{aligned}[K_0, K_\pm] &= \pm 2K_\pm, \\ [K_+, K_-] &= \alpha_0 + \alpha_1 K_0 + \alpha_2 K_0^2 + \alpha_3 K_0^3 + \alpha_4 K_0^4,\end{aligned}\tag{3.10}$$

где

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= -\Omega(\Omega^2 - 1)(\Omega + 2), \\ \alpha_1 &= -2(1 - 2\Omega(\Omega + 1))(\Omega + 2L + 1), \\ \alpha_2 &= -7 + 6\Omega(\Omega + 1), \\ \alpha_3 &= -4(\Omega + 2L + 1), \quad \alpha_4 = -5.\end{aligned}$$

Оператор Казимира теперь имеет вид

$$C = K_+ K_- + \beta_0 + \beta_1 K_0 + \beta_2 K_0^2 + \beta_3 K_0^3 + \beta_4 K_0^4 + \beta_5 K_0^5,\tag{3.11}$$

где

$$\begin{aligned}\beta_0 &= \Omega(\Omega^2 - 1)(\Omega + 2), \\ \beta_1 &= 2L - \frac{1}{2}\Omega(-4 + \Omega(\Omega^2 + 6\Omega + 3) + 8(\Omega + 1)L), \\ \beta_2 &= 1 - 5L + \frac{1}{2}\Omega(-9 + 2\Omega(\Omega - 1) + 4(\Omega + 1)L), \\ \beta_3 &= -\frac{5}{2} + \Omega(\Omega + 3) + 4L, \\ \beta_4 &= -\frac{1}{2}\Omega + 2 - L, \quad \beta_5 = -\frac{1}{2},\end{aligned}$$

а собственные значения C равны $\Omega(\Omega^2 - 1)(\Omega + 2)(2 + \Omega + 2L)/2$. И снова контракция этой алгебры в пределе “сильного поля” дает ту же самую алгебру ЛМГ (3.5), которая лежит в основе асимптотической динамики обеих моделей ЛЕ при $L \rightarrow \infty$.

3.2. Эффективные $su_q(2)$ -гамильтонианы для моделей ЛЕ. Как и в случае модели ДПШ, эффективный q -гамильтониан для модели (3.1) был введен в работе [8],

$$H_q = \omega_b L + \left(\omega_f - \frac{1}{2} \omega_b \right) (\tilde{T}_0 + \Omega) + \chi(q) q^{\tilde{T}_0} (\tilde{T}_+^2 + \tilde{T}_-^2) q^{\tilde{T}_0}, \quad (3.12)$$

его нетривиальные матричные элементы имеют вид

$$\begin{aligned} \langle j, m | H_q | j, m \rangle &= \omega_b L + \left(\omega_f - \frac{1}{2} \omega_b \right) (\Omega + m), \\ \langle j, m + 2 | H_q | j, m \rangle &= \\ &= \chi(q) q^{2(m+1)} \sqrt{[j + m + 2]_q [j + m + 1]_q [j - m]_q [j - m - 1]_q}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

В качестве первого шага при подгонке размерностей инвариантных подпространств гамильтонианов (3.1) и (3.12) нужно найти правильное соотношение $j = j(\Omega, L)$ и, соответственно, $m = m(m_\Omega, \Omega, L)$ [8]. В качестве эффективного гамильтониана следует рассмотреть сужение матричных элементов (3.13) на инвариантное подпространство, натянутое на векторы $|j, m\rangle$ с $m = -j, -j + 2, \dots, j - 2, j$. Таким образом, мы получаем матричные элементы эффективного гамильтониана

$$\langle j, m + 2 | H_q | j, m \rangle = \chi(q) h(L, \Omega, m_\Omega).$$

Для значений $L \geq \Omega$ (L целое) находим, что $j = \Omega$ и $m = m_\Omega$, а функция $h(L, \Omega, m_\Omega)$ имеет вид

$$h(L, \Omega, m_\Omega) = q^{2(m_\Omega+1)} \sqrt{[\Omega + m_\Omega + 2]_q [\Omega + m_\Omega + 1]_q [\Omega - m_\Omega]_q [\Omega - m_\Omega - 1]_q} \quad (3.14)$$

(в работе [8] найден и явный вид функции $\chi(q)$).

Затем мы следуем той же процедуре, что и в случае q -модели ДПШ и ищем значения параметра q (и соответственно $\chi(q)$), которые могут абсорбировать бозонные степени свободы гамильтониана (3.1) и обеспечить аналогичный спектр для чисто фермионного q -деформированного гамильтониана (3.12). Второй тип модели ЛЕ (3.4) также можно аппроксимировать q -гамильтонианом того же типа (3.12). В обоих случаях численные расчеты приводят к прекрасному согласию между моделями ЛЕ и эффективными q -гамильтонианами [8]. Отсюда мы делаем вывод, что некоторые взаимодействия между фермионами и бозонами можно правильно описать, используя q -фермионы в качестве квазичастиц (т.е. эффективных фермионных степеней свободы) с точно решаемым взаимодействием, определяемым гамильтонианом H_q^{int} (см. (1.3)).

С математической точки зрения было бы очень интересно найти соответствующее аналитическое выражение для параметра деформации q через индексы Ω и L пространства представления. В этом отношении должны быть существенны введенные выше алгебры ЛЕ четвертой степени, поскольку $su_q(2)$ -модели (3.12) приводят к естественному определению операторов K в виде

$$K_0 = \tilde{T}_0, \quad K_+ = q^{\tilde{T}_0} \tilde{T}_+^2 q^{\tilde{T}_0}, \quad K_- = q^{\tilde{T}_0} \tilde{T}_-^2 q^{\tilde{T}_0}.$$

Их коммутатор $[K_+, K_-]$ (являющийся обобщением (2.19)) должен нести, по существу, ту же алгебраическую информацию, что и коммутационные соотношения (3.8) и (3.10). Другая интересная особенность выявляется при анализе эффективного q -гамильтониана для H_{++} (см. (3.4)), так как $su(2)$ -симметрия модели может динамически восстанавливаться при некоторых отрицательных значениях L [8]. Полному исследованию алгебр ЛЕ вместе с вышеупомянутыми алгебраическими свойствами этих фермион-бозонных взаимодействий будет посвящена отдельная работа [16].

Благодарности. Работа выполнена при частичной поддержке МСУТ, Испания (проект № BFM2000-1055) и CONICET, Аргентина. Один из авторов (М. Р.) благодарит за финансовую поддержку Fundacion Antorchas и Университет Бургоса (Программа приглашенных профессоров).

Список литературы

- [1] *R. H. Dicke.* Phys. Rev. 1954. V. 93. P. 99; *G. Drobny, I. Jex.* Phys. Rev. A. 1992. V. 46. P. 500.
- [2] *S. M. Chumakov, M. Kozierowski.* Quantum Semiclass. Opt. 1996. V. 8. P. 775.
- [3] *R. Eder, O. Rogojanu, G. A. Sawatzky.* Phys. Rev. B. 1998. V. 58. P. 7599; *W. Hanke, R. Eder, E. Arrigoni.* Physikalische Blätter. 1998. V. 54. P. 436; *B. Buck, C. V. Sukumar.* Phys. Lett. A. 1981. V. 81. P. 132; *J. Phys. A.* 1984. V. 17. P. 877; *M. Tavis, F. W. Cummings.* Phys. Rev. 1968. V. 170. P. 360; *K. Hepp, E. H. Lieb.* Ann. Phys. 1973. V. 76. P. 360.
- [4] *A. Klein, E. R. Marshalek.* Rev. Mod. Phys. 1991. V. 63. P. 375.
- [5] *D. Schütte, J. Da Providencia.* Nucl. Phys. A. 1977. V. 282. P. 518.
- [6] *S. Jesgarz, S. H. Lerma, P. O. Hess, O. Civitarese, M. Reboiro.* In: Proc. 25th Symp. of Nuclear Physics, Taxco, México, 2002. Rev. Mexicana Fis. (in press).
- [7] *H. J. Lipkin, N. Meshkov, A. J. Glick.* Nucl. Phys. 1965. V. 62. P. 188.
- [8] *A. Ballesteros, O. Civitarese, F. J. Herranz, M. Reboiro.* Phys. Rev. C. 2002. V. 66. P. 064317.
- [9] *A. Ballesteros, S. M. Chumakov.* J. Phys. A. 1999. V. 32. P. 6261.
- [10] *N. M. Atakishiyev, P. Winternitz.* J. Phys. A. 2000. V. 33. P. 5303; *N. M. Atakishiyev, A. U. Klymyk.* J. Phys. A. 2002. V. 35. P. 5267.
- [11] *V. P. Karassiov, A. B. Klimov.* Phys. Lett. A. 1994. V. 189. P. 43; *V. P. Karassiov.* J. Sov. Laser Res. 1992. V. 13. P. 188; *Phys. Lett. A.* 1998. V. 238. P. 19.
- [12] *E. Inönü, E. P. Wigner.* Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1953. V. 39. P. 510.
- [13] *M. Roček.* Phys. Lett. B. 1991. V. 255. P. 554.
- [14] *П. П. Кулиш, Н. Ю. Решетихин.* Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1981. Т. 101. С. 101.
- [15] *V. Chari, A. Pressley.* Quantum Groups. Cambridge, Mass.: Cambridge Univ. Press, 1994; *C. Gómez, G. Sierra, M. Ruiz-Altaba.* Quantum Groups in Two-Dimensional Physics. Cambridge, Mass.: Cambridge Univ. Press, 1996.
- [16] *A. Ballesteros, O. Civitarese, F. J. Herranz, M. Reboiro.* in preparation.
- [17] *O. Civitarese, M. Reboiro.* Phys. Rev. C. 1998. V. 58. P. 2787.
- [18] *N. Debergh, F. L. Stancu.* J. Phys. A. 2001. V. 34. P. 3265.
- [19] *P. W. Higgs.* J. Phys. A. 1979. V. 12. P. 309; *A. S. Zhedanov.* Mod. Phys. Lett. A. 1992. V. 7. P. 507.