Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. А. Эль, Бесконечнозонный предел уравнений Уизема, *ТМФ*, 2003, том 137, номер 2, 176–187

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf262>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 11:06:51

БЕСКОНЕЧНОЗОННЫЙ ПРЕДЕЛ УРАВНЕНИЙ УИЗЕМА

Найден бесконечнозонный предел уравнений КдФ–Уизема. Построение проведено на основе специального скейлинга спектральной кривой, введенного Венакидесом при изучении непрерывного предела тета-функций. Предельная система описывает эволюцию интегральной плотности состояний одномерного солитонного газа.

Ключевые слова: конечнозонный потенциал, число вращения, термодинамический предел.

1. ВВЕДЕНИЕ

Как хорошо известно [1], [2], модуляционные уравнения (уравнения Уизема) описывают плавные изменения спектральных римановых поверхностей, локальные структуры которых определяют x -, t -осцилляции конечнозонных потенциалов. Задачи волновой динамики, приводящие к модуляционным уравнениям, обычно связаны с изучением долговременной эволюции крупномасштабных начальных данных [3], [4] и включают в себя квазиклассические асимптотики обратной задачи рассеяния. Характерный масштаб модуляций $1/\epsilon$ в этом асимптотическом пределе с необходимостью пропорционален полному числу степеней свободы $g \gg 1$ (здесь мы не предполагаем наличия малого параметра в исходном уравнении, вместо этого мы рассматриваем крупномасштабные $\sim 1/\epsilon$ начальные данные). В этом случае асимптотически решение имеет вид промодулированного N -зонного потенциала, где $N \ll g$ [5], [6]. Таким образом, существо теории модуляции состоит в сведении сложной системы со многими степенями свободы к более простой системе с небольшим числом степеней свободы. Модуляционные уравнения, однако, могут быть рассмотрены сами по себе, вне всякой связи с квазиклассической задачей с начальными условиями. В таком контексте естественно может возникнуть вопрос о возможности существования бесконечнозонного предела (т.е. предела при стремлении рода спектральной поверхности к бесконечности) для модуляционных уравнений. Понятно, что для того чтобы обеспечить существование такого предела, следует указать некоторый специальный способ предельного перехода для спектральной кривой.

*School of Mathematical and Information Sciences, Coventry University, Coventry, UK; Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн РАН, Троицк, Московская обл., Россия. E-mail: csx233@coventry.ac.uk

В настоящей работе мы рассматриваем предел при $N \rightarrow \infty$ для N -фазного усредненного уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ). Уравнение КдФ берется в виде

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0. \quad (1)$$

Ключевым моментом предельного перехода для конечнозонных усредненных уравнений является скейлинг спектральной поверхности, введенный Венакидесом при изучении непрерывного предела тета-функций [7]. Такой скейлинг предполагает, что существенная часть спектра оператора Шредингера, связанного с уравнением (1), лежит в конечном интервале, например $(-1, 0)$, и род задачи $N \gg 1$. В разделе 5 показано, что в этих условиях при ширине запрещенных зон порядка $O(1/N)$ и экспоненциально узких разрешенных зонах $O(e^{-N})$ предел при $N \rightarrow \infty$ для уравнений КдФ–Уизема существует. Существование данного предела для уравнений Уизема непосредственно связано с существованием предела для величины, называемой числом вращения (или интегральной плотностью состояний), которая была введена для почти-периодических потенциалов Джонсоном и Мозером [8]. Поскольку введенный предел $N \rightarrow \infty$ сохраняет конечность плотности состояний, он может называться термодинамическим пределом. Предел такого рода был недавно рассмотрен в работе [9] в связи со стохастическим описанием конечнозонных потенциалов.

Основной результат настоящей работы представлен в разделе 6, где термодинамический предел уравнений КдФ–Уизема получен в виде нелинейного уравнения переноса (46) для плотности состояний. Связь между плотностью и скоростью в (46) дается интегральным уравнением (47). Мы полагаем, что полученный предел описывает рассмотренную в [9] макроскопическую динамику термодинамического предела стохастических солитонных решеток и может рассматриваться как кинетическое уравнение для солитонов. В пользу такой интерпретации свидетельствует также и то, что асимптотика малой плотности (46), (47) точно соответствуют кинетическому уравнению Захарова для разреженного солитонного газа [10].

2. УРАВНЕНИЯ УИЗЕМА: ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

В этом разделе мы дадим краткий перечень некоторых основных определений и обозначений конечнозонной теории, которые будут использоваться в данной работе. Система КдФ–Уизема рода N может быть представлена как одно производящее уравнение в форме Флашки–Фореста–Маклафлина [2]:

$$\begin{aligned} \partial_T dp_N &= \partial_X dq_N, \\ X &= \epsilon x, \quad T = \epsilon t, \quad \epsilon \ll 1, \end{aligned} \quad (2)$$

где dp_N, dq_N суть мероморфные дифференциалы на гиперэллиптической римановой поверхности рода N

$$\begin{aligned} \Gamma : \quad R^2(E) &= \prod_{j=1}^{2N+1} (E - E_j), \quad E \in \mathbb{C}, \\ E_1 &< E_2 < \dots < E_{2N} < E_{2N+1}, \quad E_j \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (3)$$

с разрезами вдоль разрешенных зон $[E_{2j-1}, E_{2j}]$. Канонический базис циклов устроен следующим образом: цикл α_j проходит вокруг j -го разреза на верхнем листе по часовой стрелке, а цикл β_j — цикл, канонически-сопряженный α_j , такой, что замкнутый контур β_j начинается в точке E_{2j} , проходит до $+\infty$ по верхнему листу и возвращается в точку E_{2j} по нижнему листу.

В таком случае мероморфные дифференциалы определены формулами

$$dp_N(E) = \frac{E^N + b_{N-1}E^{N-1} + \dots + b_0}{R(E)} dE, \quad \oint_{\beta_j} dp_N(E) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (4)$$

$$dq_N(E) = 12 \frac{E^{N+1} + c_N E^N + \dots + c_0}{R(E)} dE, \quad c_N = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2N+1} E_j, \quad (5)$$

$$\oint_{\beta_j} dq_N(E) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

О дифференциалах dp_N и dq_N часто говорят как о дифференциалах квазиимпульса и квазиэнергии. Известно [2], [11], что интегралы по dp_N и dq_N вдоль α -циклов дают компоненты вектора волновых чисел и вектора частот:

$$\oint_{\alpha_j} dp_N(E) = k_j, \quad \oint_{\alpha_j} dq_N(E) = \omega_j, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (6)$$

Известно [12], [13], [2], что конечнозонные потенциалы, ассоциированные с римановой поверхностью (3), являются многофазными решениями уравнения КдФ (1),

$$u_N(x, t; X, T) = u_N(y_1, \dots, y_N), \quad (7)$$

где вещественные фазы

$$y_j = k_j x + \omega_j t + f_j, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (8)$$

являются линейными функциями быстрых переменных x и t , в то время как зависимость от медленных переменных X и T входит в потенциал u_N через точки ветвления $E_j(X, T)$ римановой поверхности. Константы $f_j \pmod{2\pi}$ — фиксированные начальные фазы. Функция $u_N(\mathbf{y})$ является 2π -периодической по каждой фазе y_j ,

$$u_N(y_1, \dots, y_j + 2\pi, \dots, y_N) = u_N(y_1, \dots, y_j, \dots, y_N), \quad (9)$$

т.е. потенциал $u_N(x, t)$ при постоянных $E_1, \dots, E_{2N+1}$ является N -квазипериодическим по обоим переменным x и t (далее рассматриваются только несоизмеримые k_j и ω_j).

Таким образом, уравнения Уизема (2) описывают медленную эволюцию (модуляции) быстро осциллирующих конечнозонных потенциалов.

Алгебро-геометрическая структура конечнозонных потенциалов задается базисными голоморфными дифференциалами

$$\psi_j = \sum_{k=0}^{N-1} a_{jk} \frac{E^k}{R(E)} dE, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (10)$$

и функции $a_{jk}(E_1, \dots, E_{2N+1})$ определяются из условия нормировки по α -циклам

$$\oint_{\alpha_k} \psi_j = \delta_{jk}, \quad (11)$$

в то время как интегралы по β -циклам дают элементы матрицы Римана (матрицы периодов римановой поверхности)

$$B_{ij} = \oint_{\beta_j} \psi_i. \quad (12)$$

Волновые числа k_j и частоты ω_j выражаются через функции a_{ij} формулами [14], [2]

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= -4\pi i B^{-1} \mathbf{a}_{N-1}, \\ \omega &= (\omega_1, \dots, \omega_N) = -8\pi i B^{-1} \left(\mathbf{a}_{N-1} \sum_{j=1}^{2N+1} E_j + 2\mathbf{a}_{N-2} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

3. ЧИСЛА ВРАЩЕНИЯ И ПЛОТНОСТЬ СОСТОЯНИЙ

Рассмотрим уравнение Шредингера

$$(-\partial_{xx}^2 + q(x))\psi = E\psi, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (14)$$

с почти-периодическим потенциалом $q(x)$. Потенциал $q(x)$ обладает важной характеристикой — *числом вращения*, которая была определена Джонсоном и Мозером [8] как

$$\alpha(E) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \arg(\psi'(x, E) + i\psi(x, E)), \quad E \in \mathbb{R}. \quad (15)$$

Как показано в работе [8], эта величина совпадает с величиной $\pi\mathcal{N}$, где $\mathcal{N}(E)$ — *интегральная плотность состояний*, определяемая выражением

$$\mathcal{N}(E) = \lim_{|b-a| \rightarrow \infty} \frac{\nu(a, b; E)}{b-a}, \quad (16)$$

в котором $\nu(a, b; E)$ — число собственных значений $E_j \leq E$ задачи Дирихле на отрезке $a \leq x \leq b$: $\psi(a, E) = \psi(b, E) = 0$. Итак,

$$\mathcal{N}(E) = \frac{1}{\pi} \alpha(E). \quad (17)$$

В частном случае, когда $q(x) - N$ -зонный потенциал, $q(x) = u_N(x)$ такой, что $-1 \leq u_N \leq 0$, число вращения совпадает с вещественной частью квазиимпульса [8]:

$$\alpha_N(E) = \operatorname{Re} \int_{-1}^E dp_N(E'), \quad E \in (-1, 0). \quad (18)$$

Тогда с помощью (6) имеем

$$\alpha_N(E) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{M(E)} k_j, & \text{если } E \in \operatorname{gap}_M, \\ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{M(E)} k_j + \int_{E_{2M-1}}^E dp_N(E'), & \text{если } E \in \operatorname{band}_M, \end{cases} \quad (19)$$

где gap_M , band_M — соответственно M -е запрещенная и разрешенная зоны, а $M(E)$ — номер ближайшей к точке E слева разрешенной зоны; $M(E) \leq N$, $M(0) = N$, $M(-1) = 0$.

Заметим, что формула (19) согласуется с общим утверждением работы [8] о том, что значения функции $2\alpha(E)$ при $E \in \{\operatorname{gap}\}$ принадлежат частотному модулю почти-периодического потенциала. Мы можем также видеть, что функция $\alpha'(E)$ неотрицательна и ее носителем является спектр конечнозонного потенциала.

Поскольку конечнозонный потенциал (7), (8) является почти-периодической функцией по переменной t , так же как по переменной x , мы можем формально ввести временной аналог числа вращения

$$\beta_N(E) = \operatorname{Re} \int_{-1}^E dq_N(E'), \quad (20)$$

где $dq_N(E)$ — дифференциал квазиэнергии (5).

Введем также *полную интегральную плотность состояний* κ , которая является числом:

$$\kappa = \mathcal{N}_N(0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N k_j. \quad (21)$$

Можно видеть, что полная интегральная плотность состояний для конечнозонных потенциалов имеет естественный смысл: это среднее число волн на единицу длины.

Аналогично введем

$$\Omega = \frac{1}{\pi} \beta_N(0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \omega_j. \quad (22)$$

4. НЕПРЕРЫВНЫЙ ПРЕДЕЛ СПЕКТРА И ЕГО ТЕРМОДИНАМИЧЕСКАЯ ПРИРОДА

Пусть нетривиальная (конечнозонная) часть спектра лежит в интервале $(-1, 0)$ на вещественной оси E : $\alpha_N(-1) = 0$, $\alpha_N(0) = \pi\kappa$. При $N \gg 1$ рассмотрим специальное распределение (скейлинг) длин запрещенных и разрешенных зон:

$$|\operatorname{gap}(E)| \sim \frac{1}{N}, \quad |\operatorname{band}(E)| \sim e^{-N}, \quad N \gg 1, \quad E \in (-1, 0), \quad (23)$$

где $|\text{gap}(E)|$ и $|\text{band}(E)|$ – ширины соответственно запрещенных и разрешенных зон. Следуя [7], введем решетку, состоящую из точек

$$1 \approx \eta_1 > \eta_2 > \dots > \eta_N \approx 0, \quad (24)$$

где

$$-\eta_j^2 = \frac{1}{2}(E_{2j-1} + E_{2j})$$

суть центры разрешенных зон.

Определим две положительные функции на отрезке $[0, 1]$.

1. Нормированная плотность разрешенных зон $\varphi(\eta)$:

$$\varphi(\eta) d\eta \approx \frac{\text{число точек решетки в } (\eta, \eta + d\eta)}{N},$$

т.е.

$$\varphi(\eta_j) = \frac{1}{N(\eta_j - \eta_{j+1})} + O\left(\frac{1}{N}\right), \quad \int_0^1 \varphi(\eta) d\eta = 1, \quad \eta^2 = -E \in (0, 1). \quad (25)$$

2. Нормированная логарифмическая ширина разрешенных зон $\gamma(\eta)$:

$$\gamma(\eta_j) = -\frac{1}{N} \ln \delta_j + O\left(\frac{1}{N}\right), \quad \delta_j = E_{2j} - E_{2j-1}. \quad (26)$$

Функции $\varphi(\eta)$ и $\gamma(\eta)$ асимптотически определяют *локальную* структуру римановой поверхности Γ (3) при $N \gg 1$. Другими словами, вместо $2N+1$ дискретных параметров мы имеем две непрерывные функции от η на интервале $(-1, 0)$, которые не зависят от x, t на масштабе $\Delta x \sim \Delta t \sim 1$. На крупном масштабе, $\Delta x \sim \Delta t \sim 1/\epsilon$, $\epsilon \ll 1$, положим в духе теории модуляции

$$\varphi = \varphi(\eta; X, T), \quad \gamma = \gamma(\eta; X, T), \quad (27)$$

где $X = \epsilon x$, $T = \epsilon t$. Эти функции подчиняются теперь эволюционным уравнениям, которые, естественно, должны быть выведены как непрерывный предел уравнений Уизема (2), рассматриваемых для того же самого экспоненциального спектрального скейлинга (23).

В следующем разделе будет показано, что скейлинг (23) приводит к следующему асимптотическому поведению волновых чисел и частот (эти асимптотики могут также быть выведены непосредственно из (6)):

$$k_j \sim \omega_j \sim \left| \frac{1}{\ln \delta_j} \right| = O\left(\frac{1}{N}\right), \quad N \gg 1, \quad (28)$$

$$\int_{E_{2j-1}}^E dp_N(E') \sim \int_{E_{2j-1}}^E dq_N(E') < O\left(\frac{1}{N}\right), \quad E \in (E_{2j-1}, E_{2j}), \quad (29)$$

которое обеспечивает конечность числа вращений $\alpha_N(E)$ (и интегральной плотности состояний $\mathcal{N}_N(E)$) при $N \rightarrow \infty$:

$$\alpha(E) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \alpha_N(E) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{M(E)} k_j < \infty, \quad M \leq N. \quad (30)$$

Вследствие этого свойства мы называем скейлинг (23) и соответствующий предел при $N \rightarrow \infty$ *термодинамическими*. Такой тип пределов в конечнозонной теории был введен в работе [9]. Далее мы будем обозначать предел некоторого функционала $f[u_N]$ при $N \rightarrow \infty$ при термодинамическом спектральном скейлинге как $T\text{-}\lim f[u_N]$. Следует отметить, что термодинамический спектральный скейлинг (23) возникает при рассмотрении квазиклассических асимптотик спектра для периодических потенциалов [15], [4], [7]. Однако в только что процитированных работах $N \sim 1/\epsilon$, что является стандартным соотношением в асимптотиках такого типа (см. также [3]). В противоположность этому при термодинамическом предельном переходе большой параметр N , определяющий скейлинг, входит только в структуру разрешенных и запрещенных зон и не связан с параметром $1/\epsilon$, который определяет масштаб модуляций конечнозонного потенциала $u_N(x, t)$.

5. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ ПРЕДЕЛ ДЛЯ ЧИСЕЛ ВРАЩЕНИЯ: ОСНОВНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Наша цель теперь состоит в том, чтобы вывести термодинамический предел для уравнения модуляции (2). Для этого необходимо вычислить термодинамические пределы для мероморфных дифференциалов dp_N и dq_N . Прежде всего оценим их мнимые части при термодинамическом скейлинге (23):

$$\left| \operatorname{Im} \int_{-1}^E dp_N(E') \right| = \begin{cases} 0, & E \in \text{band}_j \quad \forall j, \\ \left| \int_{E_{2j}}^E dp_N(E') \right| < O\left(\frac{1}{N}\right), & E \in \text{gap}_j. \end{cases} \quad (31)$$

Поэтому для $E \in (-1, 0)$ имеем

$$T\text{-}\lim p_N(E) = \alpha(E) = T\text{-}\lim \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{M(E)} k_j. \quad (32)$$

Аналогично получаем

$$T\text{-}\lim q_N(E) = \beta(E) = T\text{-}\lim \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{M(E)} \omega_j, \quad (33)$$

где $\beta(E) = T\text{-}\lim \beta_N(E)$.

Оценим теперь волновые числа k_j и частоты ω_j для выбранного спектрального скейлинга. Используем для этого наблюдение [7]: для спектрального распределения (23) справедливо следующее приближение для базисных голоморфных дифференциалов:

$$\psi_j \approx -\frac{\eta_j}{2\pi} \frac{\prod_{i=1, i \neq j}^N (E + \eta_j^2)}{(\prod_{k=1}^{2N+1} (E - E_j))^{1/2}} dE. \quad (34)$$

Можно видеть, что

$$(E - E_{2j-1})(E - E_{2j}) = (E + \eta_j^2) + O(e^{-N}).$$

При этом становится возможным обширное сокращение в (34), так что гиперэллиптические интегралы в (11), (12) превращаются в элементарные. В результате мы имеем следующие асимптотики (подробнее см. [7]):

$$\begin{aligned} B_{ij} &\approx -\frac{i}{\pi} \left(\ln \left| \frac{\eta_i - \eta_j}{\eta_i + \eta_j} \right| + N \gamma(\eta_i) \delta_{ij} \right), \quad i, j = 1, 2, \dots, N, \\ a_{j,N-1} &\approx -\frac{\eta_j}{2\pi}, \quad a_{j,N-1} \sum_{j=1}^{2N+1} E_j + 2a_{j,N-2} \approx \frac{\eta_j^3}{\pi}. \end{aligned} \quad (35)$$

Представим теперь общие соотношения (13) между вещественными и мнимыми периодами тета-функций в виде, удобном для перехода к термодинамическому пределу:

$$\begin{aligned} B\mathbf{k} &= -4\pi i \mathbf{a}_{N-1}, \\ B\boldsymbol{\omega} &= -8\pi i \left(\mathbf{a}_{N-1} \sum_{j=1}^{2N+1} E_j + 2\mathbf{a}_{N-2} \right). \end{aligned} \quad (36)$$

Из асимптотик (35) следует, что для обеспечения баланса членов в (36) необходим следующий скейлинг: $k_j \sim \omega_j \sim O(1/N)$. Поэтому введем две непрерывные функции $k(\eta)$ и $\omega(\eta)$ так, что

$$k_j = \frac{1}{N} k(\eta_j), \quad \omega_j = \frac{1}{N} \omega(\eta_j). \quad (37)$$

Тогда, подставив (35), (37) в (36), получим две алгебраические системы для величин $k(\eta_i)$, $\omega(\eta_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \frac{1}{N} \ln \left| \frac{\eta_i - \eta_j}{\eta_i + \eta_j} \right| k(\eta_j) + \gamma(\eta_i) k(\eta_i) &= -2\pi \eta_i, \\ \sum_{j=1}^N \frac{1}{N} \ln \left| \frac{\eta_i - \eta_j}{\eta_i + \eta_j} \right| \omega(\eta_j) + \gamma(\eta_i) \omega(\eta_i) &= 8\eta_i^3. \end{aligned} \quad (38)$$

Используя (37), представим соотношения (32), (33) для термодинамического предела чисел вращения в непрерывном виде:

$$2d\alpha(-\eta^2) = \varphi(\eta) k(\eta) d\eta, \quad 2d\beta(-\eta^2) = \varphi(\eta) \omega(\eta) d\eta. \quad (39)$$

Теперь мы легко получаем термодинамический предел систем (38):

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln \left| \frac{\eta - \mu}{\eta + \mu} \right| \frac{\mu}{\eta} \alpha'(-\mu^2) d\mu + \sigma(\eta) \alpha'(-\eta^2) &= \frac{\pi}{2}, \\ \int_0^1 \ln \left| \frac{\eta - \mu}{\eta + \mu} \right| \frac{\mu}{\eta} \beta'(-\mu^2) d\mu + \sigma(\eta) \beta'(-\eta^2) &= -2\pi\eta^2, \end{aligned} \quad (40)$$

где $\sigma(\eta) = \gamma(\eta)/\varphi(\eta)$. Мы видим, что термодинамический предел чисел вращения определяется только одной функцией $\sigma(\eta)$ на решетке (а не двумя исходными функциями $\varphi(\eta)$ и $\gamma(\eta)$).

Интегральные уравнения (40) были получены в работе [9] в связи с нахождением термодинамического предела для случайных процессов, порождаемых конечнозонными потенциалами (стохастическими солитонными решетками). Отметим, что эти интегральные уравнения возникают также в работе [16], где они определяют минимизатор типа Лакса–Левермора для N -солитонных решений со случайно распределенными фазами солитонов при $N \rightarrow \infty$. Понятно, что должна существовать прямая связь между стохастической версией вариационной задачи Лакса–Левермора и термодинамическим пределом для чисел вращения.

6. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ ПРЕДЕЛ УРАВНЕНИЙ УИЗЕМА

Модуляционное уравнение (2) описывает медленные X -, T -деформации спектральной поверхности (3). Теперь мы собираемся применить термодинамический предельный переход к уравнению (2). Как следует из (32), (33), локальные термодинамические пределы суть

$$T\text{-}\lim dp_N(E) = d\alpha(E), \quad T\text{-}\lim dq_N(E) = d\beta(E). \quad (41)$$

На большом масштабе имеем

$$d\alpha = d\alpha(-\eta^2; X, T), \quad d\beta = d\beta(-\eta^2; X, T). \quad (42)$$

Тогда термодинамический предел системы Уизема (2) принимает вид

$$\partial_T \alpha' = \partial_X \beta', \quad (43)$$

где функциональная зависимость $\beta'[\alpha'(-\eta^2; x, t)]$ дается формулами (40). Поэтому термодинамический предел уравнений Уизема описывает эволюцию плотности состояний $\alpha'(E)/\pi$.

Поскольку $d\alpha(E) > 0$, можно ввести функцию распределения $f(\eta; X, T)$ следующим образом:

$$f(\eta; X, T) d\eta = \frac{1}{\pi} d\alpha(-\eta^2; X, T), \quad \int_0^1 f d\eta = \kappa. \quad (44)$$

Введя функцию

$$s(\eta; X, T) = \frac{\beta'(-\eta^2; X, T)}{\alpha'(-\eta^2; X, T)}, \quad (45)$$

мы можем представить (43) в виде нелинейного уравнения переноса

$$\partial_T f = \partial_X (sf), \quad (46)$$

где интегральное уравнение для функции s получается исключением $\sigma(\eta)$ из (40):

$$s = -4\eta^2 + \frac{1}{\eta} \int_0^1 \ln \left| \frac{\eta - \mu}{\eta + \mu} \right| f(\mu) [s(\mu) - s(\eta)] d\mu. \quad (47)$$

В случае малой интегральной плотности состояний $\kappa \ll 1$ получаем выражение

$$s \approx -4\eta^2 - \frac{4}{\eta} \int_0^1 \ln \left| \frac{\eta - \mu}{\eta + \mu} \right| f(\mu) [\mu^2 - \eta^2] d\mu, \quad (48)$$

которое представляет собой выражение, полученное Захаровым для скорости пробного солитона, движущегося в разреженном солитонном газе [10]. Поэтому интегро-дифференциальная система (46), (47) может рассматриваться как обобщение кинетического уравнения Захарова для солитонов на случай конечной плотности.

Теперь обсудим кратко, что происходит при термодинамическом предельном переходе с лежащей в основе конечнозонной микроструктурой. В работе [9] было показано, что термодинамический предел конечнозонных потенциалов следует рассматривать как *случайный процесс*. Более точно, термодинамический предел существует не для отдельного потенциала $u_N(x)$, а для стационарного случайного процесса, который порождается при рассмотрении соответствующего тора, снабженного мерой Хаара. Такие процессы были названы в [17] *стохастическими солитонными решетками*. Стохастические солитонные решетки $\nu(x|\phi)$ определяются выражением

$$\nu_N(x|\phi) = u_N(\dots, k_j x + \phi_j, \dots), \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (49)$$

в котором величины $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_N)$ равномерно распределены на торе Tor^N . Было показано [9], что термодинамический предел стохастических солитонных решеток

$$T\text{-}\lim \nu_N(x|\phi) = \zeta(x - x_j) \quad (50)$$

представляет собой случайный процесс, который определен на счетном множестве точек $\{x_j, j \in \mathbb{Z}\}$, распределенных по Пуассону в $\mathbb{R}$. Поскольку отношение ширины разрешенных/запрещенных зон $\sim N e^{-N} \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, то термодинамический предел стохастических солитонных решеток (50) может быть ассоциирован с одномерным солитонным газом. Это также свидетельствует в пользу нашей интерпретации термодинамического предела уравнений Уизема как кинетического уравнения для солитонов.

7. УСРЕДНЕННЫЕ ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Интегрируя (43) по E на интервале $(-1, 0)$, мы получаем термодинамический предел закона сохранения числа волн:

$$\partial_T \kappa = \partial_X \Omega, \quad (51)$$

где $\pi \kappa$ — полная плотность волн (интегральное волновое число) (21) и $\pi \Omega$ — соответствующая интегральная частота (см. (22)).

Известно [11], [8], что квазиимпульс $p_N(E)$ является производящей функцией для интегралов Крускала $I_k^{(N)}$:

$$p_N(E) = 2\sqrt{-E} \left(1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{I_k^{(N)}}{(-2E)^k} \right), \quad -E \gg 1, \quad (52)$$

$$I_0^{(N)} = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_0^L u_N(x) dx, \quad I_1^{(N)} = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_0^L \frac{1}{2} u_N^2(x) dx, \quad \dots \quad (53)$$

Значит, термодинамический предел для интегралов Крускала вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned} P_k(X, T) &= T \cdot \lim I_k^{(N)} = T \cdot \lim \left(\text{Res}_{-\infty} \left[\frac{2^{2k+1}}{2k+1} \frac{dp_N}{dE} (-E)^{(2k+1)/2} \right] \right) = \\ &= \frac{2^{2k+1}}{(2k+1)\pi} (-1)^{k+1} \int_{-1}^0 (-E)^{(2k+1)/2} \alpha'(E; X, T) dE = \\ &= \frac{2^{2k+1}}{2k+1} (-1)^{k+1} \int_0^1 \eta^{2k+1} f(\eta; X, T) d\eta, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (54)$$

Таким образом, бесконечное множество *независимых* усредненных законов сохранения имеет вид

$$\partial_T P_k = \partial_X Q_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (55)$$

где потоки $Q_k(X, T)$ находятся аналогично (54) из термодинамического предела для дифференциала квазиэнергии (41):

$$Q_k(X, T) = \frac{2^{2k+1}}{2k+1} (-1)^{k+1} \int_0^1 \eta^{2k+1} f(\eta; X, T) s(\eta; X, T) d\eta. \quad (56)$$

В частности, из (53), (54) следует, что термодинамические пределы для первых двух моментов КдФ суть

$$\bar{u}(X, T) = -2 \int_0^1 \eta f(\eta; X, T) d\eta, \quad \overline{u^2}(X, T) = \frac{16}{3} \int_0^1 \eta^3 f(\eta; X, T) d\eta. \quad (57)$$

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы построили предел бесконечного рода уравнений КдФ–Уизема. Этот предел основан на специальном скейлинге для соответствующей римановой поверхности таком, что интегральная плотность состояний остается конечной при $N \rightarrow \infty$ (предел термодинамического типа). Получаемая в результате система имеет вид нелинейного дифференциального уравнения переноса (46) для плотности состояний и интегрального уравнения (47), связывающего плотность состояний с соответствующей скоростью потока. В пределе малой плотности эта система дает кинетическое уравнение Захарова для разреженного солитонного газа.

Ясно, что процедура перехода к термодинамическому пределу может быть распространена на другие интегрируемые иерархии Уизема. Другим следствием развитой теории является предел бесконечного рода для алгебро-геометрической процедуры Кричевера интегрирования уравнений Уизема [18], [11]. Этот результат составит предмет отдельной публикации [19].

Благодарности. Автор благодарен А. Крылову за многочисленные вдохновляющие обсуждения. Автор также выражает благодарность Т. Граве и Я. Чену за ряд полезных замечаний. Работа была частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 00-01-00210).

Список литературы

- [1] *G. B. Whitham.* Proc. Roy. Soc. A. 1965. V. 283. P. 238.
- [2] *H. Flaschka, G. Forest, D. W. McLaughlin.* Commun. Pure Appl. Math. 1979. V. 33. P. 739.
- [3] *P. D. Lax, C. D. Levermore.* Commun. Pure Appl. Math. 1983. V. 36. P. 253; P. 571; P. 809.
- [4] *S. Venakides.* Trans. Am. Math. Soc. 1987. V. 301. P. 189.
- [5] *S. Venakides.* Commun. Pure Appl. Math. 1990. V. 43. P. 335.
- [6] *P. Deift, S. Venakides, X. Zhou.* Int. Math. Res. Not. 1997. № 6. P. 285.
- [7] *S. Venakides.* Commun. Pure Appl. Math. 1989. V. 42. P. 711.
- [8] *R. Johnson, J. Moser.* Commun. Math. Phys. 1982. V. 84. P. 403.
- [9] *G. A. El, A. L. Krylov, S. A. Molchanov, S. Venakides.* Physica D. 2001. V. 152, 153. P. 653.
- [10] *В. Е. Захаров.* ЖЭТФ. 1971. Т. 60. С. 993.
- [11] *Б. А. Дубровин, С. П. Новиков.* УМН. 1989. Т. 44. № 6. С. 29.
- [12] *С. П. Новиков.* Функц. анализ и его прилож. 1974. Т. 8. № 3. С. 54.
- [13] *P. D. Lax.* Commun. Pure Appl. Math. 1975. V. 26. P. 141.
- [14] *A. P. Имс, В. Б. Матвеев.* ТМФ. 1975. Т. 23. С. 51.
- [15] *M. I. Weinstein, J. B. Keller.* SIAM J. Appl. Math. 1987. V. 47. P. 941.
- [16] *А. В. Гуревич, Н. Г. Мазур, К. П. Зубин.* ЖЭТФ. 2000. Т. 117. С. 797.
- [17] *А. Л. Крылов, Г. А. Эль.* УМН. 1999. Т. 54. № 2. С. 175.
- [18] *И. М. Кричевер.* Функц. анализ и его прилож. 1988. Т. 22. № 3. С. 37.
- [19] *G. A. El.* Algebro-geometrical solutions of the infinite-genus Whitham equations. (to be published).