Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Джоши, Трижды усеченное решение возмущенных первых уравнений Пен-
леве, *ТМФ*, 2003, том 137, номер 2, 188–192

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf263>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 15:31:15

© 2003 г.

Н. Джоши*

ТРИЖДЫ УСЕЧЕННОЕ РЕШЕНИЕ ВОЗМУЩЕННЫХ ПЕРВЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕНЛЕВЕ

Рассматриваются решения класса обыкновенных дифференциальных уравнений вида $y'' = 6y^2 - x^\mu$, который включает в себя первое уравнение Пенлеве (PI) при $\mu = 1$. Хорошо известно, что уравнение PI допускает единственное вещественное решение (называемое трижды усеченным), которое асимптотически стремится к $-\sqrt{x/6}$ и монотонно убывает в положительном направлении по оси вещественных чисел. Доказаны существование и единственность соответствующего решения для любого вещественного неотрицательного $\mu \neq 1$.

Ключевые слова: уравнения Пенлеве.

1. ВВЕДЕНИЕ

Предметом исследования в данной работе служит класс обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) вида

$$y'' = 6y^2 - x^\mu, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

который включает в себя классическое первое уравнение Пенлеве PI,

$$y_1'' = 6y_1^2 - x$$

при $\mu = 1$.

Асимптотическое поведение решений $y_1(x)$ уравнения PI при $|x| \rightarrow \infty$ привлекает внимание исследователей, начиная с работ Бутруса [1], который показал, что уравнение PI имеет единственное вещественное решение с асимптотикой

$$y_1 f = -\sqrt{\frac{x}{6}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{(\sqrt{x})^{5k}}, \quad (1.2)$$

где $a_0 = 1$, а коэффициенты a_{k+1} , $k \geq 0$, задаются рекуррентным соотношением

$$a_{k+1} = \frac{25k^2 - 1}{8\sqrt{6}} a_k - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^k a_m a_{k+1-m}, \quad k \geq 0, \quad (1.3)$$

*School of Mathematics and Statistics F07, University of Sydney, NSW2006 Sydney, Australia.
E-mail: nalini@maths.usyd.edu.au

при $x \rightarrow +\infty$. Существование и единственность данного решения была доказана в работе [2] при использовании другого его определения. Также в этой работе исследовалась структура полюсов и нулей решения на вещественной прямой.

Хорошо известно, что решения с асимптотическим поведением (1.2) отвечают голоморфным решениям в широких секторах плоскости комплексной переменной x . Бутрус назвал эти решения *усеченными (tronquées) интегралами* (так как линии цепочек полюсов этих решений оказываются “усеченными”) с тем, чтобы отличить их от общих решений, которые имеют (двойные) полюсы в каждом секторе плоскости переменной x .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. При заданных числах $x_0 \in \mathbb{C}$ и $0 \leq \theta \in \mathbb{R}$ сектор $\mathcal{S}$ угловой ширины θ задается условием

$$\mathcal{S} := \{x \in \mathbb{C} \mid |x_0| \leq |x|, |\arg(x)| \leq \theta\}.$$

Основной результат данной статьи состоит в следующем утверждении.

ТЕОРЕМА 1.1. При заданном $\mu \in \mathbb{R}$ существуют такое число $x_0 \in \mathbb{C}$, $x_0 \neq 0$, соответствующий сектор $\mathcal{S}_\mu$ угловой ширины меньше $4\pi/|\mu+4|$ и такое настоящее решение $y(x)$ уравнения (1.1), что асимптотическое поведение этого решения в данном секторе в пределе $|x| \rightarrow \infty$ задается асимптотическим рядом

$$y_f = \pm \sqrt{\frac{x^\mu}{6}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{x^{(\mu+4)5k/2}}, \quad (1.4)$$

где $c_k = ((\mu+4)/4)^{2k} b_{2k}$ и

$$12b_0b_k = (k-2) \left(k - \frac{6\mu+4}{\mu+4} \right) b_{k-2} + \sqrt{6} \sum_{j=3}^{k-3} b_j b_{k-j}, \quad (1.5)$$

$$b_0 = \pm 1, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = 2 \frac{\mu(\mu-2)}{\sqrt{6}(\mu+4)^2}. \quad (1.6)$$

Среди возможных настоящих решений y_μ существует единственное настоящее решение $Y(x)$, которое асимптотически стремится к y_f в секторе Σ_μ угловой ширины $8\pi/|\mu+4|$ и содержит лучи

$$\arg(x) = \pm \frac{2\pi}{|\mu+4|}.$$

Этот результат удивителен, поскольку, если только параметр μ не равен нулю или единице, уравнение (1.1) не обладает свойством Пенлеве, т.е. его решения содержат движущиеся сингулярности, в окрестности которых решения оказываются *многозначными* [3]. Но из утверждения теоремы 1.1 следует, что тем не менее существуют и решения, которые голоморфны в широких областях плоскости комплексной переменной x .

Бутрус также рассмотрел уравнение (1.1) и показал, что существует замена переменных

$$y(x) = x^{\mu/2} u(z), \quad z = \frac{4}{\mu+4} x^{(\mu+4)/4}, \quad (1.7)$$

которая приводит уравнение (1.1) к виду

$$u_{zz} + \frac{5\mu}{\mu+4} \frac{u_z}{z} + \frac{4\mu(\mu-2)}{(\mu+4)^2} \frac{u}{z^2} = 6u^2 - 1. \quad (1.8)$$

Анализируя это уравнение, можно показать, что существует решение в виде формального ряда по степеням $1/z$, т.е.

$$u_f = \sqrt{\frac{1}{6}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{z^k}, \quad (1.9)$$

где коэффициенты b_k удовлетворяют соотношениям (1.5). Заметим, что из выбора начальных условий (1.6) следует, что все коэффициенты b_{2j+1} с нечетными индексами равны нулю.

2. СУЩЕСТВОВАНИЕ

Для простоты обозначений будем считать, что $\mu \geq 0$. Доказательство легко продолжается на все значения параметра μ . При доказательстве утверждения о существовании в теореме 1.1 будет использоваться теорема 12.1 из книги Васова [4].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1 (*усеченные решения*). *В каждом секторе S_μ угловой ширины, меньшей $4\pi/(\mu+4)$, существует решение уравнения (1.1), асимптотическое поведение которого при $|x| \rightarrow \infty$ в этом секторе задается асимптотическим разложением (1.4).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $y(x)$ есть решение уравнения (1.1). С помощью замены переменных (1.7) зададим функцию

$$w(z) = u(z) - \frac{b_0}{\sqrt{6}}. \quad (2.1)$$

Тогда эта функция удовлетворяет уравнению

$$w'' = -2\sqrt{6} b_0 w + 6w^2 - \frac{5\mu w'}{(\mu+4)z} - 4 \frac{\mu(\mu-2)(\sqrt{6}w - b_0)}{\sqrt{6}(\mu+4)^2 z^2}, \quad (2.2)$$

где штрихи, как обычно, обозначают производные по независимой переменной. При этом разложение (1.4) принимает вид

$$w \sim \sqrt{\frac{1}{6}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_{2k}}{z^{2k}}. \quad (2.3)$$

Если положить $w_1 = w$ и $w_2 = w'$, то уравнение (2.2) может быть переписано в виде системы уравнений

$$\begin{aligned} w_1' &= w_2, \\ w_2' &= -2\sqrt{6} b_0 w_1 + 6w_1^2 - \frac{5\mu w_2}{(\mu+4)z} - 4 \frac{\mu(\mu-2)(\sqrt{6}w_1 - b_0)}{\sqrt{6}(\mu+4)^2 z^2}. \end{aligned}$$

Якобиан векторной функции в правой части, вычисленный в точке $w = 0$, $z \rightarrow \infty$, имеет собственные значения $\lambda_1 = -\lambda_2 = \sqrt{-2\sqrt{6}b_0}$. Система уравнений для величин w_1, w_2 примет вид

$$z^q \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = f(w_1, w_2),$$

где $q = 0$. Более того, вводя возмущения в формальный ряд, можно показать, что этот ряд оказывается настоящим асимптотическим разложением в полуплоскостях, отсекаемых вещественными или мнимыми осями в плоскости комплексной переменной z . Эти результаты находятся в согласии с утверждениями теоремы 12.1 книги [4], в которой показано существование подлинного решения с искомым асимптотическим поведением.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Решения, задаваемые предложением 2.1, называются *усеченными* решениями (или усеченными интегралами).

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $y(x)$ представляет собой усеченное решение уравнения (1.1) в заданном секторе S_μ . Тогда его k -я производная $y^{(k)}(x)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, допускает асимптотическое разложение

$$y^{(k)}(x) \sim y_f^{(k)}(x), \quad x \rightarrow \infty, \quad x \in S_\mu,$$

где $y_f^{(k)}(x)$ – асимптотический ряд, полученный при k -м (почленном) дифференцировании y_f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку функция $w(z)$ представляет собой решение уравнения (2.2) с асимптотическим разложением (2.3), она голоморфна в секторе S_μ при достаточно больших z . Тогда доказательство следует из теоремы 8.8 книги [4].

3. ЕДИНСТВЕННОСТЬ

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1 (трижды усеченное (tritonquée) решение). Существует единственное решение $Y(x)$ уравнения (1.1), которое допускает асимптотическое разложение $y_f(x)$ в секторе $|x_0| \leq |x|$, $|\arg(x)| \leq 4\pi/(\mu+4)$, где через $x^{\mu/2}$ обозначено аналитическое продолжение корня $-\sqrt{x^\mu}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть при заданном $\epsilon > 0$ функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ представляют собой усеченные решения, задаваемые предложением 2.1 в соответствующих секторах S_1 : $-\epsilon/2 < \arg(x) < 4\pi/(\mu+4) - \epsilon$, S_2 : $-4\pi/(\mu+4) + \epsilon < \arg(x) < \epsilon/2$. Рассмотрим решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ в секторе перекрытия $|\arg(x)| < \epsilon/2$. В этом секторе данные функции имеют одно и то же асимптотическое разложение, тем самым

$$v(x) := y_1(x) - y_2(x) \underset{|\arg(x)| < \epsilon/2}{\underset{x \rightarrow \infty}{=}} o(x^{-(5n-1)(\mu+4)/2}) \quad (3.1)$$

при всех положительных целых n . С другой стороны, функция v удовлетворяет линейному ОДУ

$$v'' = 6(y_1 + y_2)v =: (-f(x) + g(x))v,$$

где

$$f(x) = 2\sqrt{6x^\mu}, \quad g(x) = 6(y_1 + y_2) + 2\sqrt{6x^\mu}.$$

Функции f и g голоморфны в секторе $x \in S_1 \cap S_2$ при достаточно больших значениях x . Из асимптотического разложения (1.4) следует, что интеграл

$$\int_x^\infty |f^{-1/4}(f^{-1/4})'' - gf^{-1/2}| dx,$$

взятый по вещественной оси, сходится. Поэтому можно применить теорему 2.2 из книги Олвера [5], которая приводит к результату

$$\begin{aligned} v(x) = & \frac{C_1}{f^{1/4}} \exp\left(i \int_x^\infty f^{1/2} dx\right) (1 + o(1)) + \\ & + \frac{C_2}{f^{1/4}} \exp\left(-i \int_x^\infty f^{1/2} dx\right) (1 + o(1)), \end{aligned}$$

где C_1 и C_2 — некоторые константы. При вещественных значениях переменной x это противоречит асимптотическому поведению (3.1), если только не положить $C_1 = 0 = C_2$. Поэтому $y_1 = y_2$ при больших вещественных значениях переменной x .

Будем называть решение, заданное предложением 3.1, трижды усеченным решением $Y(x)$.

4. ОБСУЖДЕНИЕ

Полученный выше результат приводит к единственному решению, которое голоморфно в кольцевом секторе угловой ширины $8\pi/(\mu + 4)$ с радиусом, ограниченным снизу. В случае уравнения PI нами было показано [2], что это решение продолжается до аналитического решения на всей положительной части вещественной оси (на самом деле это решение единственное, которое лежит ниже нижней ветви параболы $y = -\sqrt{x/6}$ и при этом монотонно убывает по переменной x). Поскольку уравнение (1.1) не удовлетворяет тесту Пенлеве, найденное трижды усеченное решение $Y(x)$, вообще говоря, не может быть единственным образом аналитически продолжено на область, содержащую начало координат. Тем не менее предварительные исследования привели нас к гипотезе, что доказательство, сходное с приведенным в работе [2], может быть обобщено для доказательства того, что функция $Y(x)$ может быть продолжена до аналитической функции на всей положительной части оси вещественных чисел.

Благодарности. Данное исследование было поддержано Австралийским научным советом (Discovery Project Grant № DP0208430).

Список литературы

- [1] *P. Boutroux.* Ann. École Normale Sup. 1913. V. 30. P. 265–375.
- [2] *N. Joshi, A. V. Kitaev.* Stud. Appl. Math. 2001. V. 107. P. 253–291.
- [3] *N. Joshi, M. D. Kruskal.* Stud. Appl. Math. 1994. V. 93. P. 187–207.
- [4] *W. R. Wasow.* Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations. Huntington, N. Y.: Robert E. Krieger, 1976.
- [5] *Ф. Олвер.* Асимптотика и специальные функции. М.: Наука, 1990.