Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Клейн, Решение Керра на частично вырожденных гиперэллиптических римановых поверхностях, *ТМФ*, 2003, том 137, номер 2, 193–200

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf264>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 14:52:52

© 2003 г.

К. Клейн*

РЕШЕНИЕ КЕРРА НА ЧАСТИЧНО ВЫРОЖДЕННЫХ ГИПЕРЭЛЛИПТИЧЕСКИХ РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

Решение Керра для вращающейся черной дыры можно построить как “солитонный” предел тета-функциональных решений Короткина уравнений Эрнста на поверхности рода $g = 2$. Показано, что решение Керра можно также получить на частично вырожденной гиперэллиптической римановой поверхности произвольного четного рода.

Ключевые слова: черные дыры, римановы поверхности, солитонный предел.

1. ВВЕДЕНИЕ

Физическая значимость стационарных аксиально-симметричных уравнений Эйнштейна определяется тем, что их решения могут описывать гравитационное поле черных дыр и звезд в термодинамическом равновесии. Наиболее известным решением этих уравнений является решение Керра [1], которое описывает внешнее гравитационное поле вращающейся черной дыры. Уравнения Эйнштейна в вакууме эквивалентны уравнениям Эрнста [2]

$$\operatorname{Re} \mathcal{E} \left(\mathcal{E}_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} \mathcal{E}_{\rho} + \mathcal{E}_{\zeta\zeta} \right) = \mathcal{E}_{\rho}^2 + \mathcal{E}_{\zeta}^2 \quad (1)$$

для комплекснозначного потенциала Эрнста $\mathcal{E}$, зависящего от двух цилиндрических координат ρ, ζ . Их полная интегрируемость была показана Мезоном [3], а также Белинским и Захаровым [4]. В рамках метода обратной задачи рассеяния решение Керра соответствует двухсолитонному решению уравнения Эрнста. Тета-функциональные решения уравнения Эрнста были даны Короткиным [5], [6] на гиперэллиптической римановой поверхности $\mathcal{L}$ рода g , соответствующей спектральной кривой

$$\mu^2 = (K - \xi)(K - \bar{\xi}) \prod_{i=1}^g (K - E_i)(K - F_i), \quad (2)$$

где $\xi = \zeta - i\rho$. Точки ветвления E_i и F_i не зависят от физических координат и подчинены условию вещественности $E_i = \overline{F_i}$ или $E_i, F_i \in \mathbb{R}$. Соответствующие решения уравнений Эрнста можно записать в терминах тета-функций с характеристиками $[\mathbf{p}, \mathbf{q}]$ на $\mathcal{L}$ в

*LUTh, Observatoire de Paris, 92195 Meudon Cedex, France; MPI für Physik, Föhringer Ring 6, 80805 München, Germany. E-mail: klein@mppmu.mpg.de

виде [6]

$$\mathcal{E} = \frac{\Theta_{\mathbf{p}\mathbf{q}}(\int_{\xi}^{\infty+})}{\Theta_{\mathbf{p}\mathbf{q}}(\int_{\xi}^{\infty-})}, \quad (3)$$

где $\int_b^a$ – сокращенное обозначение для разности отображений Абеля на поверхности $\mathcal{L}$ между точками a и b . Постоянные (по отношению к физическим координатам) векторы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ должны удовлетворять условию вещественности $\text{Re}(\Pi\mathbf{p} + 2\pi i\mathbf{q}) = 0$, где Π – матрица b -периодов. Символы ∞^+ и ∞^- используются для бесконечных точек на различных листах кривой $\mathcal{L}$, а именно $\mu/K^{g+1} \rightarrow \pm 1$ при $K \rightarrow \infty^{\pm}$.

Существенное различие между решением (3) уравнения Эрнста и, например, конечнотонными решениями уравнений Кортевега–де Фриза состоит в зависимости некоторых точек ветвления гиперэллиптической поверхности от физических координат. Поэтому решения (3) определяются на семействе $\mathcal{L}(\xi, \bar{\xi})$ римановых поверхностей и, вообще говоря, не являются периодическими или квазипериодическими, но являются асимптотически плоскими. В работе [7] было показано, что поверхности с точками ветвления, подчиненными условиям $E_i = \bar{F}_i$, $i = 1, \dots, g$, и $E_i = -F_{g+1-i}$, $i = 1, \dots, g/2$, допускают решения с экваториальной симметрией $\mathcal{E}(-\zeta) = \bar{\mathcal{E}}(\zeta)$.

Как показано в [5], решение Керра можно получить в стандартном солитонном пределе на римановой поверхности рода $g = 2$, где точки ветвления E_i, F_i попарно совпадают. Потенциал Эрнста для решения Керра можно, таким образом, записать в терминах элементарных функций,

$$\mathcal{E} = \frac{e^{-i\varphi}r_1 + e^{i\varphi}r_2 - 2\alpha}{e^{-i\varphi}r_1 + e^{i\varphi}r_2 + 2\alpha}, \quad (4)$$

где

$$r_1^2 = (\zeta + \alpha)^2 + \rho^2, \quad r_2^2 = (\zeta - \alpha)^2 + \rho^2, \quad \alpha = m \cos \varphi. \quad (5)$$

Масса Арновитта–Дезера–Мизнера пространства-времени равняется m , а момент импульса $J = m^2 \sin \varphi$. В используемых координатах Вейля горизонт черной дыры располагается на оси между $-\alpha$ и α . В пределе $\varphi = 0$ решение становится статическим и сферически-симметричным решением Шварцшильда; в пределе экстремального решения Керра $\varphi = \pi/2$ горизонт вырождается.

В настоящей работе мы ставим вопрос о том, какие решения связаны с частично вырожденными римановыми поверхностями высших родов. Этот вопрос важен для построения точных решений уравнений Эйнштейна, описывающих системы “черная дыра–материя”. Пусть $\tilde{\mathcal{L}}$ – поверхность, заданная спектральной кривой четного рода $g + 2$ указанного вида. Рассмотрим предел, в котором разрезы $g + 1$ и $g + 2$ стягиваются соответственно в точки $-\alpha$ и α на вещественной оси. Мы покажем, что решения (3), которые в данном пределе задаются в терминах тета-функций соответствующей римановой поверхности рода g , эквивалентны решению Керра при подходящим образом выбранной характеристике. Доказательство этой теоремы проводится с использованием алгебраического представления решений (3) (см., например, [8]) и теоремы Абеля.

В разделе 2 собраны некоторые полезные факты о тета-функциональных решениях уравнений Эрнста. В разделе 3 рассматривается стандартное вырождение поверхности рода $g = 2$, которое в пределе позволяет получить из решения (3) решение Керра (4) – результат, обобщаемый на частично вырожденные поверхности высших родов. Результаты кратко суммируются в разделе 4.

2. ГИПЕРЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЭРНСТА

Рассмотрим вещественную гиперэллиптическую риманову поверхность $\mathcal{L}$ рода g , заданную соотношением (2) и условием вещественности $E_i = \overline{F_i} \vee E_i$, $F_i \in \mathbb{R}$, где $\xi = \zeta - i\rho$, $\zeta, \rho \in \mathbb{R}$, и E_i и F_i не зависят от физических координат. Введем канонический базис циклов на поверхности $\mathcal{L}$: a -циклы выбираются так, что они охватывают разрезы $[E_i, F_i]$, а все b -циклы начинаются на разрезах $[\xi, \bar{\xi}]$. Базисные голоморфные дифференциалы нормированы условиями

$$\int_{a_i} d\omega_j = 2\pi i \delta_{ij},$$

а матрица Π их b -периодов определяется как

$$\Pi_{ij} = \int_{b_i} d\omega_j.$$

Отображение Абеля с базисной точкой ξ обозначается как $\int_{\xi}^P = \int_{\xi}^P d\omega$. Дифференциал третьего рода с полюсами первого порядка в точках A и B с соответствующими вычетами $+1$ и -1 обозначается как $d\omega_{AB}$. Тета-функция с характеристиками, соответствующая кривой $\mathcal{L}$, имеет вид

$$\Theta_{\mathbf{p}\mathbf{q}}(\mathbf{z}|\Pi) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^g} \exp \left\{ \frac{1}{2} \langle \Pi(\mathbf{p} + \mathbf{m}), \mathbf{p} + \mathbf{m} \rangle + \langle \mathbf{p} + \mathbf{m}, \mathbf{z} + 2\pi i \mathbf{q} \rangle \right\}, \quad (6)$$

где $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^g$ — аргумент, $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{C}^g$ — векторы характеристик, и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение. С точностью до экспоненциального множителя тета-функция с характеристиками равна тета-функции с нулевыми характеристиками (обозначаемой как Θ) и сдвинутым аргументом:

$$\Theta_{\mathbf{p}\mathbf{q}}(\mathbf{z}|\Pi) = \Theta(\mathbf{z} + \Pi\mathbf{p} + \mathbf{q}) \exp \{ \pi i \langle \Pi\mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle + \langle \mathbf{p}, \mathbf{z} + 2\pi i \mathbf{q} \rangle \}. \quad (7)$$

В дальнейшем K^+ будет обозначать точку, принадлежащую верхнему листу поверхности $\mathcal{L}$ и имеющую проекцию K на $\mathbb{C}P^1$, а K^- — точку, имеющую ту же проекцию на $\mathbb{C}P^1$, но принадлежащую нижнему листу.

Тета-функциональные решения уравнений Эрнста (1), соответствующие алгебраической кривой (2), даются в следующем предложении, принадлежащем Короткину [5].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $\Theta_{\mathbf{p}\mathbf{q}}$ — тета-функция на поверхности (2) с постоянной (по $\xi, \bar{\xi}$) характеристикой, подчиненной условию вещественности $\text{Re}(\Pi\mathbf{p} + 2i\pi\mathbf{q}) = 0$, и пусть $\Theta_{\mathbf{p}\mathbf{q}}(\int_{\xi}^{\infty^-}) \neq 0$. Тогда

$$\mathcal{E} = \frac{\Theta_{\mathbf{p}\mathbf{q}}(\int_{\xi}^{\infty^+})}{\Theta_{\mathbf{p}\mathbf{q}}(\int_{\xi}^{\infty^-})} \quad (8)$$

является решением уравнения Эрнста.

Доказательство этого предложения можно найти в работе [6]. Заметим, что здесь предполагается, что пути интегрирования в числителе и знаменателе имеют одну и ту же проекцию на $\mathbb{C}P^1$, т.е. $\int_{\xi}^{\infty^+} = -\int_{\xi}^{\infty^-}$.

В астрофизических приложениях важную роль играет экваториальная симметрия, т.е. симметрия отражения в плоскости $\zeta = 0$. В дальнейшем мы будем рассматривать только решения с этим свойством, т.е.

$$\mathcal{E}(-\zeta) = \overline{\mathcal{E}}(\zeta). \quad (9)$$

В работе [7] было показано, что решения с этой симметрией можно получить на поверхности четного рода со свойством $\mu(K, -\zeta) = \mu(-K, \zeta)$. Здесь мы ограничимся случаем поверхности с $E_i = \overline{F}_i$, $i = 1, \dots, g$, и $E_i = -F_{g+1-i}$, $i = 1, \dots, g/2$.

Иногда удобно использовать алгебраическую формулировку потенциала Эрнста (8). Используя соотношение (7), перепишем потенциал в терминах тета-функций с нулевой характеристикой:

$$\mathcal{E} = \frac{\Theta(\int_{\xi}^{\infty+} + \Pi \mathbf{p} + \mathbf{q})}{\Theta(\int_{\xi}^{\infty-} + \Pi \mathbf{p} + \mathbf{q})} \exp \left\{ \left\langle \mathbf{p}, \int_{\infty-}^{\infty+} \right\rangle \right\}. \quad (10)$$

Определим дивизоры X и D степени g как решение задачи обращения Якоби

$$\int_D^X = \Pi \mathbf{p} + \mathbf{q}, \quad (11)$$

где D выбрано так, что $\int_{\xi}^D = \mathbf{K}$ – вектор Римана, который можно выразить в терминах полупериодов на гиперэллиптических поверхностях (см., например, [9]; обозначения для интегралов между дивизорами такие же, как в [10]). Теорема обращения Якоби гарантирует, что дивизор X корректно определен. Он однозначно определяется формулой (11), за исключением того случая, когда выражение $\Pi \mathbf{p} + 2\pi i \mathbf{q}$ является специальным – случай, который мы всегда исключаем в дальнейшем. Используя дивизор X , можно записать потенциал (10) в алгебраическом виде, т.е. в виде, не содержащем тета-функций:

$$\ln \mathcal{E} = \int_D^X d\omega_{\infty- \infty+} + \left\langle \mathbf{p}, \int_{\infty-}^{\infty+} \right\rangle. \quad (12)$$

В дальнейшем нам потребуется следующая теорема Абеля: если Y и Z являются дивизорами, подчиненными условию

$$\int_Z^Y = 0, \quad (13)$$

то существует мероморфная функция R на $\mathcal{L}$ (являющаяся рациональной функцией в фундаментальном многоугольнике, образованном разрезанной поверхностью) с полюсами только в Y и нулями только в Z . Следствием этой теоремы является тождество

$$\int_Z^Y d\omega_{AB} = \ln \frac{R(A)}{R(B)}. \quad (14)$$

3. РЕШЕНИЕ КЕРРА НА ЧАСТИЧНО ВЫРОЖДЕННЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

В данном разделе мы выясним, как решение Керра возникает в предельном случае подходящих вырождений римановой поверхности $\mathcal{L}$. Для этого рассмотрим риманову поверхность $\tilde{\mathcal{L}}$ четного рода $g + 2$ вида (2). Пусть выполнены условия вещественности из предыдущего раздела, а также выполнены условия симметрии $E_i = -F_{g+1-i}$, $i = 1, \dots, g/2$, и $E_{g+1} = -F_{g+2}$. Рассмотрим предел $E_{g+j} \rightarrow F_{g+j} = K_j$, $j = 1, 2$, при $K_1 = -K_2 = -\alpha$.

В этом пределе риманова поверхность вырождается и все функции в формуле (8) можно выразить в терминах функций и дифференциалов, определенных на поверхности $\mathcal{L}$, заданной уравнением (2) (см. [11]). Голоморфные дифференциалы $d\tilde{\omega}$ на $\tilde{\mathcal{L}}$ становятся дифференциалами на $\mathcal{L}$:

$$\begin{aligned} d\tilde{\omega}_i &= d\omega_i, & i &= 1, \dots, g, \\ d\tilde{\omega}_{g+j} &= d\omega_{E_{g+j}^- E_{g+j}^+}, & j &= 1, 2. \end{aligned} \quad (15)$$

Дифференциалы третьего рода на $\tilde{\mathcal{L}}$ принимают вид просто соответствующих дифференциалов третьего рода на $\mathcal{L}$. Компоненты $\Pi_{(g+1)(g+1)}$ и $\Pi_{(g+2)(g+2)}$ матрицы b -периодов расходятся, тогда как все остальные компоненты остаются в пределе конечными. При таких соотношениях потенциал (8) можно полностью выразить в терминах функций, определенных на $\mathcal{L}$ в рассматриваемом пределе.

3.1. Случай $g = 0$. Поучительно сначала рассмотреть случай, когда $g = 0$, аналогично [5]. Имеем следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть характеристика тета-функций в (8) задана как

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} + \frac{\ln a_1}{2\pi i} & \frac{1}{4} + \frac{\ln a_2}{2\pi i} \end{bmatrix}, \quad (16)$$

где $a_1 = 1/a_2 = -\operatorname{ctg}(\varphi/2)$ при $0 < \varphi < \pi/2$. Тогда в пределе $E_1 \rightarrow F_1 = -\alpha$, $E_2 \rightarrow F_2 = \alpha$ решение тождественно решению Керра и потенциал Эрнста имеет вид (4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В пределе $E_i \rightarrow F_i$, $i = 1, 2$, все функции в (8) задаются на римановой поверхности $\mathcal{L}_0$ рода $g = 0$, заданной как $\mu_0^2 = (K - \xi)(K - \bar{\xi})$. Отсюда следует, что их можно выразить через элементарные функции. Голоморфные дифференциалы становятся дифференциалами третьего рода $d\omega_{E_i^- E_i^+}$. Поскольку b -периоды Π_{11} и Π_{22} расходятся, для потенциала Эрнста получаем

$$\mathcal{E} = \frac{1 + a_1 a_2 e^{\omega_1(\infty^+) + \omega_2(\infty^+)} - i e^{-P} (a_1 e^{\omega_1(\infty^+)} - a_2 e^{\omega_2(\infty^+)})}{e^{\omega_1(\infty^+) + \omega_2(\infty^+)} + a_1 a_2 - i e^{-P} (a_1 e^{\omega_2(\infty^+)} - a_2 e^{\omega_1(\infty^+)})}, \quad (17)$$

где

$$P = -\frac{1}{2}\Pi_{12} = \int_{\bar{\xi}}^{K_1} d\omega_2 = \ln \frac{(E_1 - E_2 + r_1 - r_2)(\bar{\xi} - E_2 + r_2)}{(E_1 - E_2 + r_1 + r_2)(\bar{\xi} - E_2 - r_2)} \quad (18)$$

и

$$\omega_i(\infty^+) = \ln \frac{E_i - \zeta + r_i}{-i\rho}. \quad (19)$$

Записывая потенциал Эрнста в виде

$$\mathcal{E} = \frac{\mathcal{G} - 1}{\mathcal{G} + 1}, \quad (20)$$

получаем

$$\mathcal{G} = \frac{1 + a_1 a_2}{1 - a_1 a_2 - i(a_1 + a_2)} \frac{r_1 - r_2}{E_1 - E_2} + \frac{i(a_1 - a_2)}{1 - a_1 a_2 - i(a_1 + a_2)} \frac{r_1 + r_2}{E_1 - E_2}, \quad (21)$$

что с учетом определения a_i является решением Керра в виде (4). Этим завершается доказательство.

3.2. Случай $g > 0$. Рассмотрим характеристику

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} + \frac{\ln a_1}{2\pi i} & \frac{1}{4} + \frac{\ln a_2}{2\pi i} \end{bmatrix}, \quad (22)$$

где a_i определены как в предложении 2. Поскольку b -периоды $\Pi_{(g+1)(g+1)}$ и $\Pi_{(g+2)(g+2)}$ расходятся, тета-функция $\tilde{\Theta}_{\tilde{\mathbf{p}}\tilde{\mathbf{q}}}(\tilde{\mathbf{x}})$ в рассматриваемом пределе пропорциональна выражению

$$\begin{aligned} & \Theta_{\mathbf{p}\mathbf{q}}\left(x + \int_{E_1^-}^{E_2^+}\right) - a_1 a_2 \Theta_{\mathbf{p}\mathbf{q}}\left(x - \int_{E_1^-}^{E_2^+}\right) e^{x_{g+1} + x_{g+2}} - \\ & - i e^{-P} \left(a_1 \Theta_{\mathbf{p}\mathbf{q}}\left(x + \int_{E_1^+}^{E_2^+}\right) e^{x_{g+1}} - a_2 \Theta_{\mathbf{p}\mathbf{q}}\left(x - \int_{E_1^+}^{E_2^+}\right) e^{x_{g+2}} \right), \end{aligned} \quad (23)$$

где $P = \pi_{(g+1)(g+2)}/2$. Подставляя это выражение в решение (8), получаем потенциал Эрнста в рассматриваемом пределе в терминах отношения тета-функций на $\mathcal{L}$. Можно показать, что это отношение тета-функций на $\mathcal{L}$ выражается через элементарные функции на $\mathcal{L}_0$.

ТЕОРЕМА. *Потенциал Эрнста (8) с характеристикой (22) в пределе $E_{g+j} \rightarrow F_{g+j} = K_j$, $j = 1, 2$, тождественно решению Керра, заданному формулой (4), где*

$$e^{-i\varphi} = \frac{ia_1 + 1}{ia_1 - 1} \prod_{i=1}^g \sqrt{\frac{K_1 - F_i}{K_1 - E_i}}. \quad (24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства теоремы используем алгебраическую формулировку из предыдущего раздела. Определим дивизор $\tilde{D} = \xi + \tilde{\xi} + \sum_{i=1}^g F_i$, так что при используемой системе разрезов он будет соответствовать полуцелой характеристике

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (25)$$

к которой следует прибавить характеристику, соответствующую вектору Римана. Отсюда следует, что, как и в разделе 2, на невырожденной поверхности $\tilde{\mathcal{L}}$ можно определить дивизор $\tilde{X} = \tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + X$, где X – дивизор степени g , как решение задачи обращения Якоби

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{D}}^{\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + X} d\tilde{\omega}_{g+i} &= -ia_j, \quad j = 1, 2, \\ \int_{\tilde{D}}^{\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + X} d\tilde{\omega}_i &= 0, \quad i = 1, \dots, g. \end{aligned} \quad (26)$$

Потенциал Эрнста при этом выражается как

$$\ln \mathcal{E} = - \int_{\tilde{D}}^{\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + X} d\tilde{\omega}_{\infty^- \infty^+}, \quad (27)$$

где знак минус возникает из-за того, что характеристика (25) нечетна. В пределе, когда последние два разреза стягиваются, $d\tilde{\omega}_i$ становятся дифференциалами первого рода на $\mathcal{L}$ при $i \leq g$, а остальные дифференциалы превращаются в $d\omega_{K_i^- K_i^+}$. Дифференциал $d\tilde{\omega}_{\infty^- \infty^+}$ принимает вид $d\omega_{\infty^- \infty^+}$. Поэтому второе уравнение в (26) по теореме Абеля определяет мероморфную функцию (являющуюся рациональной функцией на фундаментальном многоугольнике) с нулями в $\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + X$ и полюсами в D :

$$R(K) = \text{const} \frac{(K - \xi)(K - \bar{\xi}) \prod_{i=1}^g (K - F_i) - (AK + B)\mu(K)}{(K - \xi)(K - \bar{\xi}) \prod_{i=1}^g (K - F_i)}. \quad (28)$$

Коэффициенты A и B , являющиеся константами относительно K , определены тем условием, что нулями функции R являются X и $\tilde{X}_i$. Тогда первое соотношение (26) с учетом (14) есть

$$-ia_j = \frac{R(K_j^-)}{R(K_j^+)}, \quad j = 1, 2, \quad (29)$$

а потенциал Эрнста следует из формулы

$$\mathcal{E} = \frac{R(\infty^-)}{R(\infty^+)}. \quad (30)$$

Из соотношения (30) с учетом (20) следует, что $\mathcal{G} = -A$. Определяя A из (29), окончательно получаем выражение

$$A(K_1 - K_2) = \frac{ia_1 + 1}{ia_1 - 1} r_1 \prod_{i=1}^g \sqrt{\frac{K_1 - F_i}{K_1 - E_i}} - \frac{ia_2 + 1}{ia_2 - 1} r_2 \prod_{i=1}^g \sqrt{\frac{K_2 - F_i}{K_2 - E_i}}, \quad (31)$$

являющееся линейным по r_i , определенному в (5). В рассматриваемом здесь случае произведения в (31) являются чисто мнимыми, а

$$\prod_{i=1}^g \sqrt{\frac{K_1 - F_i}{K_1 - E_i}} \prod_{i=1}^g \sqrt{\frac{K_2 - F_i}{K_2 - E_i}} = 1, \quad (32)$$

поскольку $K_1 = -K_2$. Далее, поскольку $a_1 a_2 = 1$, можно определить $e^{-i\varphi}$ с помощью (24) с вещественным φ , откуда следует, что

$$-\mathcal{G}(K_1 - K_2) = e^{-i\varphi} r_1 + e^{i\varphi} r_2. \quad (33)$$

А это есть в точности решение Керра в стандартных обозначениях, чем и завершается доказательство.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы показали, что решение Керра можно получить как частичное вырождение римановых поверхностей высшего рода. Поскольку мы ограничились случаем экваториальной симметрии, мы рассматривали только поверхности четного рода. Это условие можно ослабить, что приводит к так называемым решениям Керра-NUT, относительно которых, однако, имеется убеждение в их астрофизической несущественности (см., например, [12]). Для того чтобы избежать появления голых сингулярностей, мы также ограничили область изменения физических параметров так, что решения лежат между шварцшильдовским решением и экстремальным решением Керра.

Результат данной работы показывает, каким образом в данный формализм могут быть включены диски материи. В работах [13] диски без центральной черной дыры рассматривались в терминах тета-функциональных решений Короткина. Такие диски можно включить в приведенные здесь формулы по существу тем же способом, что и в работе [8]. Поскольку формализм из [8] можно здесь применить с незначительными модификациями, то стационарные диски вокруг черной дыры керровского типа можно рассматривать как случай чистого диска.

Благодарности. Автор благодарит Д. Короткина за полезные обсуждения и указания. Работа частично поддержана программой Marie-Curie Европейского Содружества.

Список литературы

- [1] Д. Крамер, Х. Штефани, М. Мак-Каллум, Э. Херльт. Точные решения уравнения Эйнштейна. М.: Энергоиздат, 1982.
- [2] F. J. Ernst. Phys. Rev. 1968. V. 167. P. 1175; 1968. V. 168. P. 1415.
- [3] D. Maison. Phys. Rev. Lett. 1978. V. 41. P. 521.
- [4] В. А. Белинский, В. Е. Захаров. ЖЭТФ. 1978. Т. 75. № 6. С. 1955.
- [5] Д. А. Короткин. ТМФ. 1988. Т. 77. № 1. С. 25.
- [6] Д. А. Короткин, В. Б. Матвеев. Функц. анализ и его прилож. 2000. Т. 34. № 4. С. 18.
- [7] C. Klein, O. Richter. Phys. Rev. D. 1998. V. 58. P. 124018.
- [8] C. Klein. Phys. Rev. D. 2001. V. 63. P. 064033.
- [9] E. D. Belokolos, A. I. Bobenko, V. Z. Enolskii, A. R. Its, V. B. Matveev. Algebro-Geometric Approach to Nonlinear Integrable Equations. Berlin: Springer, 1994.
- [10] Д. Мамфорд. Лекции о тета-функциях. М.: Мир, 1988.
- [11] J. Fay. Theta-Functions on Riemann Surfaces. Lect. Notes Math. V. 352. Berlin: Springer, 1973.
- [12] S. Hawking, G. Ellis. The Large Scale Structure of Space-Time. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1973.
- [13] C. Klein, O. Richter. Phys. Rev. Lett. 1999. V. 83. P. 2884.