Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Конно, Х. Какухата, Растяжения и стягивания петлевого солитона, взаимодействующего с внешним полем, *ТМФ*, 2003, том 137, номер 2, 201–208

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf265>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 17:53:34

© 2003 г.

К. Конно*, Х. Какухата†

РАСТЯЖЕНИЯ И СТЫГИВАНИЯ ПЕТЛЕВОГО СОЛИТОНА, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕГО С ВНЕШНИМ ПОЛЕМ

Рассматривается интегрируемое уравнение движения для петлевого солитона, взаимодействующего с внешним полем, с точки зрения растяжения и сжатия петли. Для изучения роли упругой силы и нелинейных сил основное уравнение разбивается на три. Получены стационарные решения этих уравнений и численно решены задачи Коши для исследования устойчивости петлевого солитона.

Ключевые слова: петлевой солитон, струна, растяжение, интегрируемое уравнение, устойчивость.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящем сообщении мы исследуем растяжение и/или стягивание петлевого солитона, описываемого интегрируемым уравнением [1]. Петлевой солитон образуется в результате нелинейного действия лоренцевых сил двух видов, действующих на токоподводящую струну в магнитном поле. Для того чтобы исследовать роль составляющих сил в уравнении движения, т.е. упругой силы и лоренцевых сил, мы разбиваем уравнение на три части, получаем их стационарные решения и численно решаем задачи Коши для исследования устойчивости петлевого солитона.

Работа построена следующим образом. Во втором разделе описывается физическая картина и уравнения движения, выводимые из основного уравнения. В разделе 3 определяется локальное растяжение петли. Стационарные решения приводятся в разделе 4, а задача Коши решается в разделе 5. В последнем разделе обсуждаются результаты.

2. ТРИ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Интегрируемое уравнение движения петлевого солитона имеет вид [1]

$$\mathbf{r}_{tt} - \mathbf{r}_{ss} = (\mathbf{r}_s + \mathbf{r}_t) \times (\mathbf{J} \times \mathbf{r}), \quad (1)$$

*Department of Physics, College of Science and Technology, Nihon University, Tokyo 101-8308, Japan

†Toyama University, Toyama 930-8555, Japan. E-mail: kakuhata@iis.toy

где $\mathbf{r}$ – вектор положения с координатами (X, Y, Z) , $\mathbf{J}$ – внешний электрический ток, определяемый вектором $(0, 0, 1)$, t – время, а s – параметр вдоль петли. Определяя $\mathbf{B} = \mathbf{J} \times \mathbf{r}$, можно показать, что $\mathbf{B}$ удовлетворяет уравнениям Максвелла

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{B} &= 2\mathbf{J}, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Если рассматривать $\mathbf{r}_s + \mathbf{r}_t$ как эффективный внутренний ток вдоль петли, то правую часть уравнения (1) можно интерпретировать как лоренцеву силу. Уравнение (1) имеет два вида решений, которые классифицируются нулевым или ненулевым моментом импульса при граничных условиях $\mathbf{r} \rightarrow (0, 0, s)$ при $|s| \rightarrow \infty$ [2].

Для изучения растяжения и стягивания петли, а также для исследования механизма устойчивости солитонов мы ищем решения трех уравнений движения

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{tt} - \mathbf{r}_{ss} &= 0, \\ \mathbf{r}_{tt} - \mathbf{r}_{ss} &= \mathbf{r}_s \times \mathbf{B}, \\ \mathbf{r}_{tt} - \mathbf{r}_{ss} &= \mathbf{r}_t \times \mathbf{B}, \end{aligned} \quad (3)$$

в которых разделены составляющие силы из уравнения (1). Первое уравнение является линейным. Мы исследуем эффект упругой силы $\mathbf{r}_{ss}$. Поскольку $\mathbf{r}_s^2$ не является сохраняющейся величиной, стационарному решению первого уравнения может соответствовать локальное растяжение. Второе уравнение включает одну из лоренцевых сил $\mathbf{r}_s \times \mathbf{B}$, действие которой, вообще говоря, оказывается бóльшим, чем эффект силы Лоренца $\mathbf{r}_t \times \mathbf{B}$ в третьем уравнении. Третье уравнение интересно тем, что входящая в него сила Лоренца зависит от скорости распространения солитона.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАСТЯЖЕНИЯ ПЕТЛИ

Локальная длина $dl(s)$ вдоль петли задается как

$$dl(s) = \sqrt{(dX)^2 + (dY)^2 + (dZ)^2} = \sqrt{(X_s)^2 + (Y_s)^2 + (Z_s)^2} ds, \quad (4)$$

локальное растяжение струны определяется формулой

$$l_s = \frac{\partial l}{\partial s} = \sqrt{\mathbf{r}_s^2}. \quad (5)$$

Заметим, что $\mathbf{r}_s^2/2$ представляет собой локальную упругую энергию. Можно сказать, что если $l_s = 1$, т.е. длина постоянна, то растяжения или стягивания нет, и s имеет смысл длины дуги. Если $l_s > 1$, мы будем говорить, что петля растягивается, а если $l_s < 1$, то петля стягивается.

4. СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ

Мы ищем имеющие петлевую форму стационарные решения уравнений (1) и (3) в виде

$$\begin{aligned} X &= A \cos \Theta \operatorname{sech}(ks - \omega t), \\ Y &= A \sin \Theta \operatorname{sech}(ks - \omega t), \\ Z &= s - B \operatorname{th}(ks - \omega t) \end{aligned} \quad (6)$$

с граничным условием $\mathbf{r} \rightarrow (0, 0, s)$ при $|s| \rightarrow \infty$, потому что такой вид имеет однопетлевое солитонное решение уравнения (1). Здесь k и ω – волновое число и частота, A и B – константы, а Θ – угол, составляемый плоскостью, заметаемой солитонной петлей, с плоскостью XZ . Можно видеть, что третье из уравнений (3) не имеет стационарного решения в форме (6).

4.1. Линейное уравнение. Для первого уравнения движения из (3) имеем стационарно-петлевое солитонное решение вида (6) с дисперсионным соотношением

$$\omega^2 - k^2 = 0. \quad (7)$$

Локальное растяжение выражается как

$$(l_s)^2 = 1 + (k^2 A^2 - 2kB) \operatorname{sech}^2(ks - \omega t) - k^2 (A^2 - B^2) \operatorname{sech}^4(ks - \omega t) \quad (8)$$

и зависит от k , A и B . Решение соответствует растяжению или стягиванию в зависимости от значений параметров.

В специальном случае постоянной длины, полагая $A = \pm 2/k$ и $B = 2/k$, получаем решение вида

$$\begin{aligned} X &= \pm \frac{2}{k} \cos \Theta \operatorname{sech}(ks - \omega t), \\ Y &= \pm \frac{2}{k} \sin \Theta \operatorname{sech}(ks - \omega t), \\ Z &= s - \frac{2}{k} \operatorname{th}(ks - \omega t). \end{aligned} \quad (9)$$

4.2. Нелинейное уравнение, содержащее силу $\mathbf{r}_s \times \mathbf{B}$. Для второго уравнения движения из (3) имеем стационарное решение

$$\begin{aligned} X &= 2\sqrt{1-v^2} \cos \Theta \operatorname{sech} \frac{s-vt}{\sqrt{1-v^2}}, \\ Y &= 2\sqrt{1-v^2} \sin \Theta \operatorname{sech} \frac{s-vt}{\sqrt{1-v^2}}, \\ Z &= s - 2\sqrt{1-v^2} \operatorname{th} \frac{s-vt}{\sqrt{1-v^2}}, \end{aligned} \quad (10)$$

где ω и k параметризованы как

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}, \\ k &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \end{aligned} \quad (11)$$

для того, чтобы удовлетворить дисперсионному соотношению

$$\omega^2 - k^2 = -1. \quad (12)$$

Локальное растяжение выражается как

$$l_s = 1. \quad (13)$$

Заметим, что даже если $\mathbf{r}_s^2$ не является постоянной движения, стационарное решение имеет постоянную длину.

4.3. Нелинейное уравнение, содержащее силу $(\mathbf{r}_s + \mathbf{r}_t) \times \mathbf{B}$. Односолитонное решение уравнения (1) с нулевым моментом импульса имеет вид

$$\begin{aligned} X &= 2\sqrt{\frac{1+v}{1-v}} \cos \Theta \operatorname{sech} \frac{s-vt}{\sqrt{1-v^2}}, \\ Y &= 2\sqrt{\frac{1+v}{1-v}} \sin \Theta \operatorname{sech} \frac{s-vt}{\sqrt{1-v^2}}, \\ Z &= s - 2\sqrt{\frac{1+v}{1-v}} \operatorname{th} \frac{s-vt}{\sqrt{1-v^2}}, \end{aligned} \quad (14)$$

где дисперсионное соотношение задается в форме (12) и мы записываем ω и k как в (11). Локальное растяжение выражается в виде

$$(l_s)^2 = 1 + \frac{4v}{(1-v)^2} \operatorname{sech}^2 \frac{s-vt}{\sqrt{1-v^2}}. \quad (15)$$

Интересно, что растяжение или стягивание петлевого солитона зависит от его скорости распространения.

5. ЗАДАЧА КОШИ

В этом разделе мы рассмотрим задачу Коши с начальными условиями (14) при $t = 0$ для уравнений (3). Наша цель состоит в том, чтобы исследовать устойчивость петлевого солитонного решения, изучая роль трех сил: упругой силы $\mathbf{r}_{ss}$ и двух видов силы Лоренца: $\mathbf{r}_s \times \mathbf{B}$ и $\mathbf{r}_t \times \mathbf{B}$.

5.1. Линейное уравнение. Рис. 1 иллюстрирует временную эволюцию одного из солитонных решений. Можно заметить, что, поскольку начальное значение не является стационарным решением линейного уравнения, один петлевой и один солитон типа “клюва” возникают и распространяются в противоположных направлениях. Петлевой солитон распространяется в положительном направлении, что сопровождается

Рис. 1. Временная эволюция однопетлевого солитона (а) и соответствующее локальное растяжение l_s в зависимости от Z (б) при $t = 0, 4, 8, 12, 16$ для $v = 0.5$ и $\Theta = \pi/2$ (сверху вниз).

растяжением, а солитон типа “клюва” распространяется в отрицательном направлении, что сопровождается стягиванием. Солитон, распространяющийся в положительном направлении, имеет большее ускорение, чем тот, который распространяется в противоположном направлении, но в конце концов они приобретают одну и ту же постоянную скорость $|v| = 1.0$.

5.2. Нелинейное уравнение, содержащее силу $\mathbf{r}_s \times \mathbf{V}$. На рис. 2 показана временная эволюция однопетлевого солитонного решения с положительной скоростью $v = 0.2$. Когда солитон движется в положительном направлении, можно видеть, что солитонная петля становится все больше и больше, и соответственно локальное растяжение возрастает со временем.

Задача Коши для односолитонного решения с отрицательной скоростью $v = -0.2$ представлена на рис. 3. В отличие от случая положительной скорости сила Лоренца $\mathbf{r}_s \times \mathbf{V}$ становится слабой, а упругая сила $\mathbf{r}_{ss}$ ее превосходит. При этом наблюдается стягивание солитонной петли.

5.3. Нелинейное уравнение, содержащее силу $\mathbf{r}_t \times \mathbf{V}$. Временная эволюция однопетлевого солитонного решения с положительной скоростью $v = 0.2$ показана на рис. 4. Петля солитона становится все меньше, и вместо локального растяжения наблюдается стягивание петли.

Рис. 5 иллюстрирует задачу Коши для односолитонного решения при отрицательной скорости $v = -0.2$. В этом случае конкуренция между упругой силой и силой Лоренца $\mathbf{r}_t \times \mathbf{V}$ имеет сложный характер. Не вдаваясь в подробности, можно сказать, что наблюдается растяжение солитонной петли.

Рис. 2. Временная эволюция однопетлевого солитона (а) и соответствующее локальное растяжение l_s в зависимости от Z (б) при $t = 0, 0.5, 1, 1.5, 2$ для $v = 0.2$ и $\Theta = \pi/2$ (сверху вниз).

Рис. 3. Временная эволюция однопетлевого солитона (а) и соответствующее локальное растяжение l_s в зависимости от Z (б) при $t = 0, 4, 8, 12, 16$ для $v = -0.2$ и $\Theta = \pi/2$ (сверху вниз).

Рис. 4. Временная эволюция однопетлевого солитона (а) и соответствующее локальное растяжение l_s в зависимости от Z (б) при $t = 0, 0.5, 1, 1.5, 2$ для $v = 0.2$ и $\Theta = \pi/2$ (сверху вниз).

Рис. 5. Временная эволюция однопетлевого солитона (а) и соответствующее локальное растяжение l_s в зависимости от Z (б) при $t = 0, 4, 8, 12, 16$ для $v = -0.2$ и $\Theta = \pi/2$ (сверху вниз).

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Найдены стационарные решения линейного уравнения и нелинейного уравнения с силой $\mathbf{r}_s \times \mathbf{V}$ (см. (3)). Даже если $\mathbf{r}_s^2$ не является сохраняющейся величиной, имеются стационарные решения с постоянной длиной $l_s = 1$.

Сравнивая рис. 2 и 4, можно следующим образом интерпретировать устойчивость петлевого солитона с положительной скоростью. Устойчивые солитоны возникают в результате конкуренции между упругой силой и двумя видами сил Лоренца в уравнении (1). Силы $\mathbf{r}_s \times \mathbf{V}$ растягивают петлевой солитон; в отличие от них силы $\mathbf{r}_t \times \mathbf{V}$ и $\mathbf{r}_{ss}$ заставляют его сжиматься. Если сила $\mathbf{r}_t \times \mathbf{V}$ отсутствует, то петлевой солитон теряет равновесие, и петля становится все больше и больше. Однако если отсутствует сила $\mathbf{r}_s \times \mathbf{V}$, то петлевой солитон сжимается.

Если солитон имеет отрицательную скорость, то, как показано на рис. 3 и 5, ситуация меняется. Из третьего из уравнений (3) видно, что сила $\mathbf{r}_t \times \mathbf{V}$ оказывает на начальный солитон эффект, заключающийся в увеличении локального растяжения, однако второе из уравнений (3) показывает, что петля солитона сжимается под конкурирующим действием двух сил $-\mathbf{r}_s \times \mathbf{V}$ и $\mathbf{r}_{ss}$. В результате полная устойчивость петлевого солитона восстанавливается. Та же картина имеет место для односолитонного решения с ненулевым моментом импульса.

Можно сказать, что устойчивое движение петлевого солитона сохраняется за счет поддержания равновесия между растяжением и стягиванием петли.

Список литературы

- [1] *H. Kakuhta, K. Konno.* J. Phys. Soc. Japan. 1999. V. 68. P. 756.
- [2] *Х. Какухата, К. Конно.* ТМФ. 2002. V. 133. P. 419.