Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Л. Лин, Некоторый способ дискретизации иерархии $K\Delta\Phi$, $TM\Phi$, 2003, том 137, номер 2, 209–219

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf266>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 12:13:41

© 2003 г.

Р. Л. Лин*

НЕКОТОРЫЙ СПОСОБ ДИСКРЕТИЗАЦИИ ИЕРАРХИИ КдФ

Предлагается метод введения членов высшего порядка в разложении потенциала для изучения непрерывных пределов иерархии Тоды. Эти члены высшего порядка являются дифференциальными многочленами от членов низшего порядка. Такой тип разложения потенциала позволяет, используя меньшее число уравнений в иерархии Тоды, воспроизвести иерархию Кортевега–де Фриза с помощью так называемого метода рекомбинации. Показано, что в непрерывном пределе пара Лакса, тензоры Пуассона и гамильтонианы иерархии Тоды стремятся к соответствующим величинам иерархии Кортевега–де Фриза.

Ключевые слова: непрерывный предел, иерархия Тоды, иерархия КдФ.

1. ВВЕДЕНИЕ

Непрерывные пределы дискретных систем представляют собой одну из очень важных областей исследования в теории солитонов [1]. В последнее время для изучения некоторых пределов определенных иерархий интегрируемых цепочек успешно использовался так называемый метод рекомбинации, состоящий в подходящем комбинировании объектов (таких, как векторные поля) дискретных систем [2]. До настоящего времени было мало работ, посвященных соотношению в непрерывном пределе между цепочками и дифференциальными уравнениями с различным числом потенциалов. Более того, насколько нам известно, нет работ, предлагающих успешный способ введения членов высшего порядка в разложении потенциала для изучения связи между иерархиями цепочек и иерархиями солитонных уравнений в непрерывном пределе. На основе гипотезы Гизекера [3] мы предлагаем метод нахождения членов высшего порядка в разложении потенциала для изучения соотношения между иерархией Тоды и иерархией Кортевега–де Фриза (КдФ) в непрерывном пределе с помощью метода рекомбинации.

В 1996 г. Гизекер выдвинул следующую гипотезу [3].

ГИПОТЕЗА. Пусть $w(n, t)$ и $v(n, t)$, где $n \in \mathbb{Z}$ и $t \in \mathbb{R}$, — два потенциала иерархии Тоды и f — функция от $x \in \mathbb{R}$ и $t \in \mathbb{R}$. Тогда имеются $\Phi_i(f)$ — дифференциальные

*Department of Mathematical Sciences, Tsinghua University, Beijing 100084, China; Service de physique de l'état condensé, CEA-Saclay, F-91191 Gif-sur-Yvette Cedex, France. E-mail: rlin@math.tsinghua.edu.cn

многочлены от f такие, что, если мы определим

$$\begin{aligned} w(n, t) &= -2 + f(x, t)h^2 + h^2 \sum_{i=1}^L \Phi_i(f(x, t))h^i, \\ v(n, t) &= 1 + f(x, t)h^2 - h^2 \sum_{i=1}^L \Phi_i(f(x, t))h^i, \end{aligned} \quad (1)$$

где h – малый шаг решетки и $x = nh$, то, взяв подходящие линейные комбинации уравнений иерархии Тоды, можно получить асимптотический ряд, главные члены которого по h являются КдФ-иерархией, если L достаточно велико.

В работе [3] Гизекер предложил способ введения $\Phi_i(f)$, однако в этом процессе приходится использовать интегрирование. Поэтому возникают вопросы о том, может ли этот процесс быть продолжен неограниченно и являются ли $\Phi_i(f)$, возникающие в этом процессе, дифференциальными многочленами от f .

Гипотеза Гизекера была доказана в следующих трех случаях для (1) [4]:

$$\begin{aligned} \text{а) } L = 0, \quad f(x, t) &= \frac{1}{2}q(x, t); \\ \text{б) } L = 1, \quad f(x, t) &= \frac{1}{2}q(x, t), \quad \Phi_1(f) = \frac{1}{8}q_x; \\ \text{в) } L = 2, \quad f(x, t) &= \frac{1}{2}q(x, t), \quad \Phi_1(f) = \frac{1}{8}q_x, \quad \Phi_2(f) = -\frac{1}{32}q^2. \end{aligned}$$

Было найдено, что для получения КдФ-иерархии методом рекомбинации в случае (в) необходимо меньшее число уравнений иерархии Тоды, чем в случае (а).

В настоящей работе для введения $\Phi_i(f)$, требуемых в (1), вместо способа Гизекера мы предлагаем новый метод вывода соотношения между иерархией Тоды и КдФ-иерархией с помощью метода рекомбинации в непрерывном пределе. В нашем подходе к нахождению $\Phi_i(f)$ легко видеть, что все они являются дифференциальными многочленами от f . Мы покажем, что по сравнению с работой [4] для получения КдФ иерархии методом рекомбинации необходимо меньшее число уравнений иерархии Тоды, если в разложении потенциала (1) вводятся члены высшего порядка. Мы также покажем, что в непрерывном пределе пара Лакса, тензоры Пуассона и гамильтонианы иерархии Тоды стремятся к соответствующим величинам КдФ-иерархии.

2. ИЕРАРХИЯ ТОДЫ И КДФ-ИЕРАРХИЯ

2.1. Иерархия Тоды. Иерархия Тоды связана с дискретной изоспектральной задачей [5], [6]

$$Ly = (E + w + vE^{(-1)})y = \lambda y, \quad (2)$$

где $w = w(n, t)$ и $v = v(n, t)$ зависят от целого числа $n \in \mathbb{Z}$, вещественная переменная $t \in \mathbb{R}$, λ является спектральным параметром, а оператор сдвига E определяется как

$$(Ef)(n) = f(n+1), \quad f^{(k)}(n) = E^{(k)}f(n) = f(n+k), \quad n, k \in \mathbb{Z}.$$

Уравнения связанной с задачей (2) иерархии Тоды можно записать как уравнения Гамильтона [5]

$$\begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix}_{t_m} = JK_{m+1} = J \frac{\delta H_{m+1}}{\delta u}, \quad m = 0, 1, \dots, \quad (3)$$

где $\delta/\delta u = (\delta/\delta w, \delta/\delta v)^T$, а тензор Пуассона J и гамильтонианы H_i определяются как

$$\begin{aligned} J &\equiv \begin{pmatrix} 0 & J_{12} \\ J_{21} & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & (1-E)v \\ v(E^{(-1)} - 1) & 0 \end{pmatrix}, \\ K_i &\equiv \begin{pmatrix} K_{i,1} \\ K_{i,2} \end{pmatrix} = \frac{\delta H_i}{\delta u} = \begin{pmatrix} -b_i^{(1)} \\ \frac{a_i}{v} \end{pmatrix}, \quad i = 0, 1, \dots, \\ H_0 &= \frac{1}{2} \ln v, \quad H_i = -\frac{b_{i+1}}{i}, \quad i = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (4)$$

при $a_0 = 1/2$, $b_0 = 0$ и

$$b_{i+1}^{(1)} = wb_i^{(1)} - (a_i^{(1)} + a_i), \quad a_{i+1}^{(1)} - a_{i+1} = w(a_i^{(1)} - a_i) + vb_i - v^{(1)}b_i^{(2)} \quad (5)$$

при $i = 0, 1, \dots$. Пары Лакса для m -го уравнения иерархии Тоды (3) имеют вид (2), а

$$y_{t_m} = A_m y = \sum_{i=0}^m (-vb_i^{(1)} E^{(-1)} - a_i)(E + w + vE^{(-1)})^{m-i} y, \quad m = 0, 1, \dots \quad (6)$$

Уравнения (3) имеют бигамильтонову формулировку

$$\begin{aligned} GK_{i-1} &= JK_i, \quad i = 1, 2, \dots, \\ G &\equiv \begin{pmatrix} vE^{(-1)} - v^{(1)}E & w(1-E)v \\ v(E^{(-1)} - 1)w & v(E^{(-1)} - E)v \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (7)$$

где G – второй тензор Пуассона. Первые четыре коварианта K_i имеют вид

$$K_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2v} \end{pmatrix}, \quad K_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad K_2 = \begin{pmatrix} w \\ 1 \end{pmatrix}, \quad K_3 = \begin{pmatrix} v + v^{(1)} + w^2 \\ w + w^{(-1)} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

2.2. Иерархия КДФ. Спектральная задача Шредингера имеет вид

$$\bar{L}\bar{y} = (\partial_x^2 + q)\bar{y} = -\bar{\lambda}\bar{y}, \quad (9)$$

связанный с иерархией КДФ [6]

$$q_{t_m} = B_0 P_m = B_0 \frac{\delta \bar{H}_m}{\delta q}, \quad m = 0, 1, \dots, \quad (10)$$

где векторное поле имеет бигамильтонову формулировку с двумя тензорами Пуассона B_0 и B_1 :

$$\begin{aligned} B_0 P_{k+1} &= B_1 P_k, \quad k = 0, 1, \dots, \\ B_0 &= \partial \equiv \partial_x, \quad B_1 = \frac{1}{4} \partial^3 + q\partial + \frac{1}{2} q_x, \quad \bar{H}_i = \frac{4\bar{b}_{i+2}}{2i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (11)$$

при $\bar{b}_0 = 0$, $\bar{b}_1 = 1$ и

$$\bar{b}_{i+1} = \left(\frac{1}{4} \partial^2 + q - \frac{1}{2} \partial^{-1} q_x \right) \bar{b}_i, \quad i = 0, 1, \dots,$$

где $\partial^{-1} \partial = \partial \partial^{-1} = 1$. Первые три коварианта P_k имеют вид

$$P_0 = 2, \quad P_1 = q, \quad P_2 = \frac{1}{4}(3q^2 + q_{xx}). \quad (12)$$

Хорошо известное уравнение КдФ является вторым:

$$q_{t_2} = \frac{1}{4}(3q^2 + q_{xx})_x. \quad (13)$$

Пары Лакса для m -го уравнения иерархии КдФ (10) имеют вид (9), а

$$\bar{y}_{t_m} = \bar{A}_m \bar{y} = \sum_{i=0}^m \left(-\frac{1}{2} \bar{b}_{i,x} + \bar{b}_i \partial \right) (\partial^2 + q)^{m-i} \bar{y}, \quad m = 0, 1, \dots \quad (14)$$

3. НЕПРЕРЫВНЫЕ ПРЕДЕЛЫ ИЕРАХИИ ТОДЫ С ЧЛЕНАМИ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА В РАЗЛОЖЕНИИ ПОТЕНЦИАЛА

Рассмотрим иерархию Тоды на решетке с малым шагом h . Интерполируем последовательности $(w(n))$ и $(v(n))$ двумя гладкими функциями непрерывной переменной x и свяжем $w(n)$ и $v(n)$ с $f(x)$, используя (1). Полагаем, что

$$\begin{aligned} E^{(k)} w(n) &= -2 + f(x + kh)h^2 + h^2 \sum_{i=1}^L \Phi_i(f(x + kh))h^i, \\ E^{(k)} v(n) &= 1 + f(x + kh)h^2 - h^2 \sum_{i=1}^L \Phi_i(f(x + kh))h^i, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

В следующих подразделах мы исследуем непрерывные пределы различных аспектов иерархии Тоды с членами высшего порядка (1) в разложении потенциала.

3.1. Оператор Лакса и тензоры Пуассона. Как и в нашей предыдущей работе [4], можно получить непрерывный предел оператора Лакса и тензоров Пуассона иерархии Тоды.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. При выполнении соотношений (1) при $f(x, t) = q(x, t)/2$ оператор Лакса иерархии Тоды стремится в непрерывном пределе к оператору Лакса иерархии КдФ, т.е.

$$L = \bar{L}h^2 + O(h^3). \quad (15)$$

Определим

$$\tilde{J} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{J}_{21} \\ \tilde{J}_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

так, чтобы $J\tilde{J} = I$. Тогда имеем следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. При выполнении соотношений (1) при $f(x, t) = q(x, t)/2$ тензоры Пуассона иерархии Тоды стремятся в непрерывном пределе к таковым в иерархии КДФ:

$$J = -B_0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} h + O(h^2), \quad W_{ij} + W_{kl} = -B_1 h^3 + O(h^4), \quad (16)$$

где $W \equiv G\tilde{J}G/4 + G = (W_{ij})$, $1 \leq i, j \leq 2$, и

$$(i, j, k, l) \in \{(1, 1, 1, 2), (1, 1, 2, 1), (1, 2, 2, 2), (2, 1, 2, 2)\}.$$

3.2. Коварианты и уравнения. Для дальнейшего использования мы приведем здесь три леммы; их доказательства можно найти в работе [4].

ЛЕММА 1. При выполнении соотношений (1) имеет место соотношение

$$K_i = \begin{pmatrix} -b_i^{(1)} \\ \frac{a_i}{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \gamma_i \end{pmatrix} + O(h), \quad i = 0, 1, \dots, \quad (17)$$

где α_i и γ_i имеют вид

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 0, & \alpha_1 &= 1, & \gamma_0 &= \frac{1}{2}, & \gamma_1 &= 0, \\ \alpha_i &= (-1)^{(i-1)} C_{2i-2}^{i-1}, & \gamma_i &= (-1)^i C_{2i-2}^i, & i &= 2, 3, \dots \end{aligned}$$

ЛЕММА 2. Определим оператор

$$T \equiv \tilde{J}G = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Тогда при выполнении соотношений (1) при $f(x, t) = q(x, t)/2$ матричные элементы оператора T имеют следующие разложения:

$$\begin{aligned} T_{11} &= -2 + \frac{1}{2}h^2q + O(h^3), & T_{12} &= 2 + h\partial + \left(\frac{1}{2}\partial^2 + q\right)h^2 + O(h^3), \\ T_{21} &= 2 - h\partial + \left(\frac{1}{2}\partial^2 - \frac{1}{2}\partial^{-1}q_x\right)h^2 + O(h^3), & T_{22} &= -2 + \frac{1}{2}h^2\partial^{-1}q\partial + O(h^3). \end{aligned}$$

ЛЕММА 3. При выполнении соотношений (1) имеет место соотношение

$$TK_i \equiv \tilde{J}GK_i = K_{i+1} + \delta_{i+1}K_0, \quad i = 0, 1, \dots, \quad (19)$$

где

$$\delta_i = -2(\alpha_i + \gamma_i) = (-1)^i \frac{2}{i} C_{2i-2}^{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (20)$$

Приведем теперь новый метод, с помощью которого можно ввести $\Phi_i(f)$, и в случае выполнения соотношений (1) при $f(x, t) = q(x, t)/2$ выведем непрерывный предел ковариантов и уравнений иерархии Тоды.

ЛЕММА 4. При выполнении соотношений (1) при $f(x, t) = q(x, t)/2$ имеют место разложения

$$K_i = \begin{pmatrix} \alpha_i + \Psi_{i,1,0}(q)h^2 + h^2 \sum_{j=1}^L h^j (\zeta_{i,1}\Phi_j + \Psi_{i,1,j}(q, \Phi_1, \dots, \Phi_{j-1})) \\ \gamma_i + \Psi_{i,2,0}(q)h^2 + h^2 \sum_{j=1}^L h^j (\zeta_{i,2}\Phi_j + \Psi_{i,2,j}(q, \Phi_1, \dots, \Phi_{j-1})) \end{pmatrix} + O(h^{L+3}) \quad (21)$$

при $i = 0, 1, 2, \dots$, где α_i и γ_i определяются в лемме 1,

$$\begin{aligned} \zeta_{0,1} &= 0, & \zeta_{0,2} &= \frac{1}{2}, & \zeta_{1,1} &= 0, & \zeta_{1,2} &= 0, \\ \zeta_{i+1,1} &= -2\zeta_{i,1} + 2\zeta_{i,2} + \alpha_i - 2\gamma_i, \\ \zeta_{i+1,2} &= 2\zeta_{i,1} - 2\zeta_{i,2} + \alpha_i - \frac{1}{2}\delta_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (22)$$

$\Psi_{i,1,j}(q, \Phi_1, \dots, \Phi_{j-1})$ обозначает член, являющийся дифференциальным полиномом от $q, \Phi_1, \dots, \Phi_{j-1}$, и т.д.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим $c_i = -vb_i^{(1)}$, $i = 0, 1, \dots$. Используя тождество [5]

$$\sum_{i=0}^k (a_i a_{k-i} + b_i c_{k-i}) = 0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

с помощью математической индукции можно показать, что a_i, b_i и c_i , $i = 0, 1, \dots$, являются полиномами от $w, v, w^{(-1)}, v^{(-1)}, w^{(1)}, v^{(1)}, \dots$. Согласно определению K_i в (4) заключаем, что K_i имеет вид разложения (21). Используя леммы 1 и 3, можно доказать справедливость (22) с помощью математической индукции.

ЛЕММА 5. Пусть комбинаторные коэффициенты $\beta_{k,i}$, $0 \leq i \leq k+1$, $k = 0, 1, \dots$, определены как

$$\begin{aligned} \beta_{0,0} &= 2, & \beta_{0,1} &= 1, & \beta_{1,0} &= -2, & \beta_{1,1} &= 2, & \beta_{1,2} &= 1, \\ \beta_{k+1,i} &= \beta_{k,i-1}, \quad 1 \leq i \leq k+2, & \beta_{k+1,0} &= \sum_{i=0}^{k+1} \beta_{k,i} \delta_{i+1}. \end{aligned} \quad (23)$$

Тогда при $k = 1, 2, \dots$

$$\sum_{i=0}^{k+1} \beta_{k,i} \alpha_i = 0, \quad \sum_{i=0}^{k+1} \beta_{k,i} \gamma_i = 0, \quad \sum_{i=0}^{k+1} \beta_{k,i} (\zeta_{i,2} - \zeta_{i,1}) = (-4)^k. \quad (24)$$

Эту лемму можно доказать с помощью математической индукции, используя леммы 1, 3 и 4.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. При заданном целом $m > 0$ пусть $\beta_{k,i}$ определяются соотношениями (23) и

$$\begin{aligned}\Phi_{2k-1} &= (-1)^k 2^{-2k-1} \left[-\frac{1}{2} \partial P_k + 2 \sum_{i=0}^{k+1} \beta_{k,i} (\Psi_{i,1,2k-1} - \Psi_{i,2,2k-1}) \right], \\ \Phi_{2k} &= (-1)^k 2^{-2k-1} \left[\frac{1}{2} P_{k+1} - \left(\frac{1}{2} \partial^2 + \frac{3}{2} q \right) \frac{1}{2} P_k - \right. \\ &\quad \left. - \partial \sum_{i=0}^{k+1} \beta_{k,i} (\zeta_{i,2} \Phi_{2k-1} + \Psi_{i,2,2k-1}) + 2 \sum_{i=0}^{k+1} \beta_{k,i} (\Psi_{i,1,2k} - \Psi_{i,2,2k}) \right]\end{aligned}\quad (25)$$

при $k = 1, 2, \dots, m-1$. Тогда при выполнении соотношений (1) при $L = 2m-2$ и $f(x, t) = q(x, t)/2$

$$\tilde{P}_m \equiv \sum_{i=0}^{m+1} \beta_{m,i} K_i = \frac{1}{2} P_m h^{2m} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + O(h^{2m+1}), \quad (26)$$

$$\begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix}_{t_m} + \frac{1}{h^{2m-1}} J \tilde{P}_m = \frac{1}{2} (q_{t_m} - B_0 P_m) h^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + O(h^3). \quad (27)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предложение легко проверить для случая, когда $m = 1$. Если уравнение (26) выполнено для m , то (согласно лемме 4) имеем

$$\begin{aligned}T \tilde{P}_m &= \tilde{J} G \left[\frac{1}{2} P_m h^{2m} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + h^{2m+1} \sum_{i=0}^{m+1} \beta_{m,i} \begin{pmatrix} \zeta_{i,1} \Phi_{2m-1} + \Psi_{i,1,2m-1} \\ \zeta_{i,2} \Phi_{2m-1} + \Psi_{i,2,2m-1} \end{pmatrix} + \right. \\ &\quad \left. + h^{2m+2} \sum_{i=0}^{m+1} \beta_{m,i} \begin{pmatrix} \zeta_{i,1} \Phi_{2m} + \Psi_{i,1,2m} \\ \zeta_{i,2} \Phi_{2m} + \Psi_{i,2,2m} \end{pmatrix} + O(h^{2m+3}) \right].\end{aligned}\quad (28)$$

В силу определений (25) Φ_{2m-1} и Φ_{2m} и леммы 2 получаем

$$T \tilde{P}_m = \frac{1}{2} P_{m+1} h^{2m+2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + O(h^{2m+3}) \quad (29)$$

(вследствие справедливости (11) и (24)). С другой стороны (согласно лемме 3),

$$T \tilde{P}_m = \tilde{J} G \sum_{i=0}^{m+1} \beta_{m,i} K_i = \sum_{i=0}^{m+1} \beta_{m,i} (K_{i+1} + \delta_{i+1} K_0) = \tilde{P}_{m+1}. \quad (30)$$

Уравнение (27) является следствием уравнения (26) и предложения 2. Доказательство закончено.

Приведем пример. При $m = 3$, используя предложение 3, можно получить

$$\Phi_1 = \frac{1}{8} q_x, \quad \Phi_2 = -\frac{1}{32} q^2, \quad \Phi_3 = -\frac{1}{384} q_{xxx}, \quad \Phi_4 = \frac{1}{254} (q^3 + q q_{xx} + q_x^2). \quad (31)$$

Тогда при выполнении соотношений (1) при $L = 4$, $f(x, t) = q(x, t)/2$ и с учетом определения Φ_i , приведенного выше, имеем

$$-10K_0 + 4K_1 - 2K_2 + 2K_3 + K_4 = \frac{1}{2}P_3h^6 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + O(h^7).$$

Из работы [4] следует, что для получения P_3 следует комбинировать $K_0, K_1, \dots, K_6$ при выполнении соотношений (1) при $L = 0$; в общем случае для получения P_m при этих условиях следует комбинировать $K_0, K_1, \dots, K_{2m}$. Предложение 3 показывает, что при введении $\Phi_i(f)$ согласно (25) примерно лишь половина из них, т.е. $K_0, K_1, \dots, K_{m+1}$, необходимы для получения P_m . Более того, из рекуррентной формулы (25) для $\Phi_i(f)$ легко видеть, что все $\Phi_i(f)$ являются дифференциальными полиномами от f , и наш процесс нахождения $\Phi_i(f)$ можно продолжить неограниченно.

3.3. Гамильтонианы. В этом подразделе мы выведем соотношение между гамильтонианами иерархии Тоды и иерархии КдФ в непрерывном пределе.

ЛЕММА 6. Если $\tilde{w}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, и $q(x)$, $x \in \mathbb{R}$, связаны как

$$\tilde{w}(n) = q^{(s_1)}(x)q^{(s_2)}(x) \dots q^{(s_m)}(x)h^l, \quad (32)$$

где h – шаг решетки, $x = nh$, s_i , $1 \leq i \leq m$, и l – неотрицательные целые числа, а $\tilde{S}$ обозначает оператор, заменяющий соотношение (32) на полином по $\tilde{w}, \tilde{w}^{(-1)}, \tilde{w}^{(1)}, \dots$ и далее в разложение Тейлора, то имеет место формула

$$\frac{\delta}{\delta q} \circ \tilde{S} = h^l \tilde{Z} \circ \tilde{S} \circ \frac{\delta}{\delta \tilde{w}}, \quad (33)$$

где $\tilde{Z}$ обозначает дифференциальный оператор.

Лемма доказывается прямым вычислением, которое мы опускаем.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть при заданном целочисленном $m > 0$, выполнении соотношений (1) при $L = 2m - 2$, $f(x, t) = q(x, t)/2$ и (25) имеет место соотношение

$$\tilde{H}_m \equiv \sum_{i=0}^{m+1} \beta_{m,i} H_i - \sum_{i=1}^{m+1} \beta_{m,i} \frac{\alpha_{i+1}}{i}. \quad (34)$$

Тогда

$$\int S(\tilde{H}_m) dx = \frac{1}{2} h^{2m+2} \int \bar{H}_m dx + O(h^{2m+3}), \quad (35)$$

где S – оператор, заменяющий соотношение (1) при $L = 2m - 2$, $f(x, t) = q(x, t)/2$ и (25) на полином по $w, v, w^{(-1)}, v^{(-1)}, w^{(1)}, v^{(1)}, \dots$ и далее в разложение Тейлора.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 6 при выполнении соотношений (1), где $L = 2m - 2$, $f(x, t) = q(x, t)/2$, и (25) (поскольку Φ_i являются дифференциальными полиномами по q) имеем

$$\frac{\delta}{\delta q} \circ S = \frac{1}{2} h^2 S \circ \left(\frac{\delta}{\delta w} + \frac{\delta}{\delta v} \right) + h^3 Z \circ S \circ \left(\frac{\delta}{\delta w} - \frac{\delta}{\delta v} \right),$$

где Z обозначает дифференциальный оператор, конкретный вид которого не важен. Вспоминая лемму 1 и определение H_i (4), можно получить разложение

$$S(\tilde{H}_m) = \sum_{i=2}^{\infty} \tilde{H}_{m,i} h^i,$$

где $\tilde{H}_{m,i}|_{q=0} = 0$. Согласно предложению 3

$$\frac{\delta}{\delta q} \circ S(\tilde{H}_m) = \frac{1}{2} h^{2m+2} \frac{\delta \bar{H}_m}{\delta q} + O(h^{2m+3}),$$

откуда можно получить [5]

$$\tilde{H}_{m,i} \in \text{Const} + \text{Image}(\partial), \quad 2 \leq i \leq 2m + 1.$$

Как указано выше, ни в одном $\tilde{H}_{m,i}$, $i \geq 2$, нет постоянного члена, т.е. $\tilde{H}_{m,i}|_{q=0} = 0$. Поэтому

$$\int \tilde{H}_{m,i} dx = 0, \quad 2 \leq i \leq 2m + 1.$$

На основании точно таких же рассуждений можно заключить, что

$$\int \tilde{H}_{m,2m+2} dx = \frac{1}{2} \int \bar{H}_m dx,$$

чем и завершается доказательство.

3.4. О парах Лакса. В этом подразделе мы выведем непрерывные пределы пар Лакса иерархии Тоды.

ЛЕММА 7. Пусть

$$\tilde{A}_k \equiv \sum_{i=1}^{k+1} \beta_{k,i} A_{i-1}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (36)$$

Тогда при выполнении соотношений (1) при $f(x, t) = q(x, t)/2$ имеем

$$\tilde{A}_k = \sum_{i=2}^{\infty} \tilde{A}_{k,i} h^i, \quad (37)$$

где

$$\tilde{A}_{k,2i}|_{q=0} = 0, \quad \tilde{A}_{k,2i+1}|_{q=0} = \tilde{\xi}_{k,2i+1} \partial^{2i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (38)$$

и $\tilde{\xi}_{k,2i+1}$ — константа.

Эту лемму можно доказать с помощью математической индукции, используя леммы 1 и 5.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. При заданном целочисленном $m > 0$ и выполнении соотношений (1) при $L = 2m - 2$, $f(x, t) = q(x, t)/2$ и (25) имеем

$$\tilde{A}_m \equiv \sum_{i=1}^{m+1} \beta_{m,i} A_{i-1} = -\bar{A}_m h^{2m-1} + O(h^{2m}). \quad (39)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предложение выполнено при $m = 1, 2$. Согласно предложению 3

$$[\tilde{A}_m, L] = -[\bar{A}_m, \bar{L}] h^{2m+1} + O(h^{2m+2}). \quad (40)$$

В случае выполнения соотношений (1) при $L = 2m - 2$, $f(x, t) = q(x, t)/2$ и (25), взяв вместе предложение 1 и лемму 7, получаем

$$L = \bar{L} h^2 + \sum_{i=3}^{\infty} L_i h^i, \quad \tilde{A}_m = \sum_{i=2}^{\infty} \tilde{A}_{m,i} h^i, \quad (41)$$

где L_i и $\tilde{A}_{m,i}$ — дифференциальные операторы. Сравнивая члены h^4 в (40), получаем

$$[\tilde{A}_{m,2}, \bar{L}] = 0. \quad (42)$$

Согласно работе [7] можно представить $\tilde{A}_{m,2}$ как

$$\tilde{A}_{m,2} = \sum_{j=0}^{\infty} \eta_{m,2,j} (\bar{L})^j, \quad (43)$$

где $\eta_{m,2,j}$ — константы. Вспоминая лемму 7, получаем

$$\tilde{A}_{m,2}|_{q=0} = 0 = \sum_{j=0}^{\infty} \eta_{m,2,j} (\partial^2)^j. \quad (44)$$

Тогда можно показать, что $\eta_{m,2,j} = 0$ при всех j и

$$\tilde{A}_{m,2} = 0. \quad (45)$$

Подобным же образом, сравнивая члены $h^4, \dots, h^{2m}$ в (40), заключаем, что

$$\tilde{A}_{m,i} = 0, \quad i = 2, \dots, 2m - 2. \quad (46)$$

Сравнивая в (40) члены h^{2m+1} , находим

$$[\tilde{A}_{m,2m-1}, \bar{L}] = -[\bar{A}_m, \bar{L}]. \quad (47)$$

Тогда $\tilde{A}_{m,2m-1} + \bar{A}_m$ можно представить как [7]

$$\tilde{A}_{m,2m-1} + \bar{A}_m = \sum_{j=0}^{\infty} \eta_{m,2m-1,j} (\bar{L})^j, \quad (48)$$

где $\eta_{m,2m-1,j}$ — константы. Из леммы 7 и равенства (14) находим

$$(\tilde{A}_{m,2m-1} + \bar{A}_m)|_{q=0} = \tilde{\xi}_{m,2m-1} \partial^{2m-1} + \partial^{2m-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \eta_{m,2m-1,j} (\partial^2)^j. \quad (49)$$

Тогда получаем, что $\eta_{m,2m-1,j} = 0$ для всех j и

$$\tilde{A}_m \equiv \sum_{i=1}^{2m} \beta_{m,i} A_{i-1} = -\bar{A}_m h^{2m-1} + O(h^{2m}). \quad (50)$$

Тем самым доказательство завершено.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе, вводя члены высшего порядка в разложении потенциала, мы получили соотношение между иерархией Тоды и иерархией КДФ в непрерывном пределе. По сравнению с результатами работы [4] для воспроизведения иерархии КДФ методом рекомбинации требуется меньшее число членов иерархии Тоды. В данной работе был представлен новый по сравнению с предложенным в работе [3] метод введения $\Phi_i(f)$ в разложение потенциала (1). Более того, из рекуррентной формулы (25) для $\Phi_i(f)$ легко видеть, что все $\Phi_i(f)$, введенные в нашу конструкцию, являются дифференциальными полиномами от f , и наш процесс определения $\Phi_i(f)$ можно продолжать неограниченно. Но это нельзя гарантировать в [3], поскольку $\Phi_i(f)$ там получаются с помощью интегрирования.

Мы также показали, что в непрерывном пределе пары Лакса, тензоры Пуассона и гамильтонианы иерархии Тоды стремятся к соответствующим объектам иерархии КДФ.

Благодарности. Работа частично поддержана китайским фундаментальным исследовательским проектом “Нелинейная наука”. Автор благодарит Postdoctoral grant by the CEA.

Список литературы

- [1] *M. Toda, M. Wadati.* J. Phys. Soc. Japan. 1973. V. 34. P. 18; *K. M. Case, M. Kac.* J. Math. Phys. 1974. V. 14. P. 594; *B. A. Kupershmidt.* Astérisque. 1985. V. 123. P. 1; *М. Аблович, Х. Сигур.* Солитоны и метод обратной задачи рассеяния. М.: Мир, 1987.
- [2] *Y. B. Zeng, S. Rauch-Wojciechowski.* J. Phys. A. 1995. V. 28. P. 113, 3825; *C. Morosi, L. Pizzocchero.* Commun. Math. Phys. 1996. V. 180. P. 505; *Rev. Math. Phys.* 1998. V. 10. P. 235; *J. Phys. A.* 1998. V. 31. P. 2727.
- [3] *D. Gieseker.* Commun. Math. Phys. 1996. V. 181. P. 587.
- [4] *Y. B. Zeng, R. L. Lin, X. Cao.* Phys. Lett. A. 1999. V. 251. P. 177.
- [5] *G. Z. Tu.* J. Phys. A. 1990. V. 23. P. 3903.
- [6] *А. Ньюэлл.* Солитоны в математике и физике. М.: Мир, 1985.
- [7] *V. G. Drinfeld, V. V. Sokolov.* J. Sov. Math. 1985. V. 30. P. 1975.