Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Маньяс, Л. Мартинес Алонсо, Преобразование годографа, применимое к широкому классу дифференциальных уравнений в частных производных, *ТМФ*, 2003, том 137, номер 2, 220–225

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf267>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 17:27:24

© 2003 г.

М. Маньяс*, Л. Мартинес Алонсо*

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГОДОГРАФА, ПРИМЕНИМОЕ К ШИРОКОМУ КЛАССУ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Представлено преобразование годографа, обеспечивающее построение решений для широкого семейства многомерных нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, и рассмотрено его применение для нескольких конкретных примеров.

Ключевые слова: преобразования годографа, нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных.

В данной короткой заметке представлено обобщение на векторный случай введенного в работе [1] метода годографа, используемого при построении решений для класса скалярных дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП). Основу этого метода составляет неявное уравнение для скалярной функции $u = u(\mathbf{x})$

$$X_0(u) + \sum_{i=1}^n x_i X_i(u) = 0, \quad (1)$$

где $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ – вектор в n -мерном линейном пространстве V , а X_i , $i = 0, 1, \dots, n$, – заданные функции от u . Продифференцировав (1) по переменной x_l , получим

$$\left(\frac{dX_0}{du} + \sum_{i=1}^n x_i \frac{dX_i}{du} \right) \frac{\partial u}{\partial x_l} + X_l = 0. \quad (2)$$

Поэтому если только

$$\frac{dX_0}{du} + \sum_{i=1}^n x_i \frac{dX_i}{du} \neq 0,$$

то можно записать

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \frac{X_k}{X_l} \frac{\partial u}{\partial x_l}, \quad l, k = 1, \dots, n. \quad (3)$$

*Departamento de Física Teórica II, Universidad Complutense, E28040 Madrid, Spain.
E-mail: manuel@darboux.fis.ucm.es; luism@fis.ucm.es

Пусть в некотором m -мерном линейном пространстве W задана в параметрической форме кривая γ . Рассмотрим функцию $\phi: U \subset V \rightarrow W$ вида

$$\phi(\mathbf{x}) := \gamma(u(\mathbf{x})).$$

Вычисляя частную производную от функции ϕ по переменной x_k , получаем

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_l} \int^u \frac{d\gamma}{du} \frac{X_k}{X_l} du. \quad (4)$$

Введем обозначения

$$D^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad X^\alpha := X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}, \quad |\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$$

для мультииндекса $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Из (4) вытекает, что для двух произвольных мультииндексов α и β одинакового порядка, $|\alpha| = |\beta|$, имеет место равенство

$$D^\alpha \phi = D^\beta \int^u \frac{d\gamma}{du} \frac{X^\alpha}{X^\beta} du,$$

и, следовательно, можно сделать вывод, что для заданного линейного дифференциального оператора

$$L := \sum_{|\alpha|=N} c_\alpha D^\alpha$$

с произвольным набором констант $\{c_\alpha\}$ справедливо тождество

$$L\phi = D^\beta \int^u \frac{d\gamma}{du}(u) Q(u) du, \quad (5)$$

где

$$Q(u) := \frac{\sum_{|\alpha|=N} c_\alpha X^\alpha(u)}{X^\beta(u)}, \quad N = |\beta|. \quad (6)$$

Это первое ключевое наблюдение, используемое при построении решений для широкого семейства нелинейных ДУЧП.

Изменив параметризацию кривой γ в интеграле в равенстве (5) на параметризацию вида $\gamma(u) = \Gamma(Q(u))$, получим

$$L\phi = D^\beta \int^{Q(u)} \frac{d\Gamma}{dQ}(Q) Q dQ.$$

Пусть теперь в пространстве W задано векторное поле $\mathbf{X}$ такое, что

$$Q \frac{d\Gamma}{dQ} = \frac{d}{dQ}(\mathbf{X} \circ \Gamma). \quad (7)$$

Тогда равенство (5) принимает вид

$$L\phi = D^\beta (\mathbf{X} \circ \Gamma \circ Q(u)) = D^\beta \mathbf{X}(\phi). \quad (8)$$

Следовательно, мы имеем нелинейное ДУЧП для векторной функции ϕ . Проанализируем условие (7) более подробно. Используя правило дифференцирования сложных функций, нетрудно записать (7) в виде

$$(D\mathbf{X}(\Gamma(Q)) - Q) \frac{d\Gamma}{dQ} = 0, \quad (9)$$

где $D(\mathbf{X})(\Gamma(Q))$ обозначает производную (матрицу Якоби) векторного поля $\mathbf{X}$ в точке $\Gamma(Q)$.

Предыдущие результаты собраны в следующей теореме.

ТЕОРЕМА (решение годографа). Пусть $X_0, X_1, \dots, X_n$ – произвольные функции от u , функция $Q(u)$ определена формулой (6), где c_α – произвольные константы, а $\mathbf{X}$ – векторное поле

$$\mathbf{X} := \begin{pmatrix} F_1(\phi_1, \dots, \phi_m) \\ \vdots \\ F_m(\phi_1, \dots, \phi_m) \end{pmatrix}.$$

Если $u(\mathbf{x})$ удовлетворяет неявному уравнению

$$X_0(u) + \sum_{i=1}^n x_i X_i(u) = 0, \quad \mathbf{x} := (x_1, \dots, x_n), \quad (10)$$

и

$$\Gamma(Q) := \begin{pmatrix} \Gamma_1(Q) \\ \vdots \\ \Gamma_m(Q) \end{pmatrix}$$

– кривая в m -мерном пространстве такая, что выполняется уравнение (9), то функция

$$\phi(\mathbf{x}) := \Gamma(Q(u(\mathbf{x})))$$

является решением ДУЧП

$$\sum_{|\alpha|=N} c_\alpha D^\alpha \phi = D^\beta \mathbf{X}(\phi). \quad (11)$$

Очевидно, что для существования нетривиальных решений уравнения (9) ($\Gamma(Q) \neq \text{const}$) требуется выполнение условия

$$\det(D\mathbf{X}(\Gamma(Q)) - Q) = 0. \quad (12)$$

Чтобы лучше понять это уравнение, рассмотрим случаи $m = 1, 2$.

Случай $m = 1$. В этом случае мы имеем скалярную функцию $\mathbf{X} = F$, и $\Gamma = (DF)^{-1}$ есть решение уравнения (12). Рассмотрим применение предложенного в [1] для этого скалярного случая метода к уравнению Бойера–Финли [2] общей теории относительности. Уравнение Бойера–Финли имеет вид

$$\phi_z \bar{z} + \kappa (e^\phi)_{tt} = 0, \quad \kappa = \pm 1, \quad (13)$$

где $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ и $x, y, t, \phi \in \mathbb{R}$. Оно характеризует автодуальные вакуумные пространства Эйнштейна, обладающие неавтодуальным вектором Киллинга, – ультрагиперболические пространства с сигнатурой $(++-)$ при $\kappa = -1$ и евклидовы пространства с сигнатурой $(+++)$ при $\kappa = 1$.

Наш метод позволяет получать решения ультрагиперболического уравнения Бойера–Финли. Согласно [3] решения уравнения Бойера–Финли должны быть неинвариантными [4], поскольку эти симметрии переносятся на соответствующие дополнительные векторы Киллинга.

Используем уравнение годографа (10) в виде

$$t + \rho e^{-i\alpha(\rho)} z + \rho e^{i\alpha(\rho)} \bar{z} = h(\rho),$$

где α и h — произвольные функции от $u = \rho$; решение уравнения Бойера–Финли дается выражением $\phi = \ln \rho^2$. Вид уравнения годографа гарантирует, что решение ϕ принимает вещественные значения. Используя полярную систему координат $z = \rho e^{i\theta}$, получаем соотношение годографа

$$t + 2\rho r \cos(\alpha(\rho) - \theta) = h(\rho). \quad (14)$$

Следуя [4], мы должны проверить, возможно ли найти такие константы α и β и функции $a(z)$ и $b(\bar{z})$, которые удовлетворяли бы уравнению

$$(\alpha + \beta t)\phi_t + a(z)\phi_z + b(\bar{z})\phi_{\bar{z}} = 2\beta - a'(z) - b'(\bar{z}). \quad (15)$$

Наше рассмотрение [1] показывает, что в общем случае это невозможно.

Как известно [5], любое решение ϕ уравнения (13) определяет некоторое пространство Эйнштейна–Вейля, в котором метрика имеет вид

$$dl^2 = dt^2 - 4\rho^2(dr^2 + r^2 d\theta^2), \quad \omega = 2\phi_t dt. \quad (16)$$

Поэтому, вводя замену переменных $(t, r, \theta) \rightarrow (\rho, r, \psi)$:

$$\begin{aligned} t &= h(\rho) - 2r\rho \cos \psi, \\ r &= r, \\ \theta &= \psi + \alpha(\rho), \end{aligned} \quad (17)$$

мы можем выписать соответствующую структуру Эйнштейна–Вейля явно, в виде выражений, содержащих две произвольные функции:

$$\begin{aligned} dl^2 &= [(h' - 2r \cos \psi)^2 - 4r^2 \rho^2 (\alpha')^2] d\rho^2 - 4\rho^2 \sin^2 \psi dr^2 - \\ &- 4r^2 \rho^2 \cos^2 \psi d\psi^2 - 2\rho \cos(\psi)(h' - 2r \cos \psi) d\rho dr - \\ &- 4r\rho [(h' - 2r \cos \psi) \sin(\psi) - 2r\rho \alpha'] d\rho d\psi - 2r\rho^2 \sin 2\psi dr d\psi \end{aligned} \quad (18)$$

и

$$\omega = \frac{4}{\rho} \frac{(h' - 2r \cos \psi) d\rho - 2\rho \cos \psi dr + 2r\rho \sin \psi d\psi}{h' - 2r \cos \psi - 2r\rho \alpha' \sin \psi} dt. \quad (19)$$

Отметим, что формулы (17)–(19) определяют семейство структур Эйнштейна–Вейля, которые отличаются от описанных Уордом [5]. Действительно, Уорд использовал преобразование годографа для нахождения всех решений уравнения (13), не зависящих от одной из пространственных переменных x или y .

Соответствующая метрика четырехмерного ультрагиперболического пространства Эйнштейна для вакуума приведена в работе [3]:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \phi_t dl^2 - \frac{1}{\phi_t} [d\tilde{t} + i(\phi_z dz - \phi_{\bar{z}} d\bar{z})]^2 = \\ &= \frac{2}{\rho D} dl^2 - \frac{\rho D}{2} \left(d\tilde{t} - \frac{4}{D} (\sin \psi dr + r \cos \psi d\psi + \alpha' r \cos \psi d\rho) \right)^2, \end{aligned}$$

где $D = h' - 2r \cos \psi - 2r\rho \alpha' \sin \psi$.

Случай $m = 2$. В этом случае имеем

$$\mathbf{X}(\phi_1, \phi_2) = \begin{pmatrix} F_1(\phi_1, \phi_2) \\ F_2(\phi_1, \phi_2) \end{pmatrix}, \quad \Gamma(Q) = \begin{pmatrix} \Gamma_1(Q) \\ \Gamma_2(Q) \end{pmatrix},$$

и уравнение (12) принимает вид

$$Q^2 - (\nabla \cdot \mathbf{X})(\Gamma(Q))Q + J(\mathbf{X})(\Gamma(Q)) = 0,$$

где $\nabla \cdot \mathbf{X}$ и $J(\mathbf{X})$ обозначают соответственно дивергенцию и якобиан векторного поля $\mathbf{X}$.

В общем это уравнение локально-эквивалентно условиям вида $\Gamma_1(Q) = a(Q)$ и $\Gamma_2(Q) = f(Q, a(Q))$. Тогда, ввиду (12), уравнение (9) превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка на $a(Q)$ вида

$$\frac{d}{dQ}(F_1(a, f(Q, a))) - Q \frac{da}{dQ} = 0.$$

Представим два простых примера.

ПРИМЕР 1. Для векторного поля

$$\mathbf{X}(\phi_1, \phi_2) = \begin{pmatrix} \phi_1 \phi_2 \\ \phi_1^2 + \phi_2^2 \end{pmatrix}$$

решение уравнения (9) имеет вид

$$\Gamma_1(Q) = \pm \frac{1}{2} \sqrt{4\Gamma_2(Q)^2 - 6Q\Gamma_2(Q) + 2Q^2}, \quad \Gamma_2(Q) = \frac{Q}{8} \left(4 - \frac{1}{W(CQ)} \right),$$

где C – произвольная константа, а W – функция Ламберта, определяемая формулой

$$W(z)e^{W(z)} = z.$$

Следовательно, мы приходим к заключению, что решения системы ДУЧП

$$\begin{aligned} L\phi_1 &= D^\beta(\phi_1\phi_2), \\ L\phi_2 &= D^\beta(\phi_1^2 + \phi_2^2), \end{aligned}$$

где

$$L := \sum_{|\alpha|=N} c_\alpha D^\alpha, \quad |\beta| = N, \quad (20)$$

имеют вид

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \pm \frac{1}{2} \sqrt{4\phi_2^2 - 6Q\phi_2(Q) + 2Q^2}, \\ \phi_2 &= \frac{Q}{8} \left(4 - \frac{1}{W(CQ)} \right), \end{aligned}$$

причем Q задано формулой (6) и $u(\mathbf{x})$ является решением уравнения (10).

ПРИМЕР 2. Для векторного поля

$$\mathbf{X}(\phi_1, \phi_2) = \begin{pmatrix} \phi_1 \phi_2 \\ \phi_1^3 + \phi_2^2 \end{pmatrix}$$

решение уравнения (9) имеет вид

$$\begin{aligned} \Gamma_1(Q) &= \frac{1}{3} \sqrt[3]{18\Gamma_2(Q)^2 - 27Q\Gamma_2(Q) + 9Q^2}, \\ \Gamma_2(Q) &= \frac{1}{25C} \left((10CQ + 1) \pm \sqrt{-5CQ + 1} \right), \end{aligned}$$

где C — произвольная константа. Поэтому, как и в предыдущем примере, мы приходим к заключению, что решения системы ДУЧП

$$\begin{aligned} L\phi_1 &= D^\beta(\phi_1\phi_2), \\ L\phi_2 &= D^\beta(\phi_1^3 + \phi_2^2), \end{aligned}$$

где L и β определены в (20), имеют вид

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{1}{3} \sqrt[3]{18\phi_2^2 - 27Q\phi_2 + 9Q^2}, \\ \phi_2 &= \frac{1}{25C} \left((10CQ + 1) \pm \sqrt{-5CQ + 1} \right), \end{aligned}$$

причем Q задано формулой (6) и $u(\mathbf{x})$ является решением уравнения годографа (10).

Благодарности. Данная работа была частично поддержана SICYT (грант № BFM2002-01607).

Список литературы

- [1] *M. Mañas, L. Martinez Alonso.* A hodograph transformation which applies to the heavenly equation. nlin.SI/0209050.
- [2] *C. P. Boyer, J. D. Finley.* J. Math. Phys. 1982. V. 23. P. 1126.
- [3] *Y. Nutku, M. B. Sheftel.* A family of heavenly metrics. gr-qc/0105088.
- [4] *L. Martina, M. B. Sheftel, P. Winternitz.* J. Phys. A. 2001. V. 34. P. 9243.
- [5] *R. S. Ward.* Class. Q. Grav. 1990. V. 7. P. L95.