Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Морози, Д. Тондо, Разделение переменных в мультигамильтоновых системах.
Применение к лагранжеву волчку, *ТМФ*, 2003, том 137, номер 2, 226–238

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf268>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 11:53:59

© 2003 г.

К. Морози*, Дж. Тондо†

РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ В МУЛЬТИГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМАХ. ПРИМЕНЕНИЕ К ЛАГРАНЖЕВУ ВОЛЧКУ

Отталкиваясь от трехгамильтоновой формулировки лагранжева волчка в шестимерном фазовом пространстве, удается построить редукцию векторного поля и пуассоновых тензоров. Явно показано, что после редукции на каждый из симплектических листов векторное поле лагранжева волчка допускает разделение переменных в смысле Гамильтона–Якоби.

Ключевые слова: лагранжев волчок, гамильтонова формулировка, разделяемость переменных.

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной статье завершается исследование лагранжева волчка (ЛВ) как квазибигамильтоновой (КБГ) системы, начатое в работе [1] (содержащей детальное изложение вопроса). В работе [1] было показано, что трехгамильтонова структура ЛВ, задаваемая на шестимерном фазовом пространстве тремя согласованными пуассоновыми тензорами P_0 , P_1 и P_2 , может быть редуцирована на четырехмерное фазовое пространство. При попытке исключить функции Казимира пуассоновых тензоров, фиксируя их значения, мы сталкиваемся с типичной ситуацией, которая также возникает и в других конечномерных интегрируемых системах [2]: на каждый из симплектических листов S_0 , S_1 и S_2 можно ограничить только лишь векторное поле X_L и соответствующий этому полю пуассонов тензор, но нельзя ограничить полную трехгамильтонову структуру, которая нарушается при таком ограничении. Тем не менее векторное поле ЛВ X_L , будучи ограниченным на симплектический лист S_0 пуассонова тензора P_0 , допускает формулировку в виде КБГ-системы, что приводит к разделимости переменных в этой структуре в смысле Гамильтона–Якоби (ГЯ).

В данной статье будет показано, что это свойство векторного поля X_L оказывается более общим. На самом деле свойство КБГ возникает и в том случае, когда ограниче-

*Dipartimento di Matematica, Politecnico di Milano, P.za L. da Vinci 32, I-20133 Milan, Italy.
E-mail: carmor@mate.polimi.it

†Dipartimento di Scienze Matematiche, Università di Trieste, via A. Valerio 12/1, I-34127 Trieste, Italy. E-mail: tondo@univ.trieste.it

ние производится на любой симплектический лист второго пуассонова тензора P_1 ; более того, исследуя некоторые свойства КБГ-модели, можно явно построить переменные разделения для ограничений структуры X_L на любой симплектический лист третьего пуассонова тензора P_2 . Интересно отметить, что в обоих случаях переменные разделения получаются с использованием несимплектических отображений.

Статья имеет следующую структуру. В разделах 2 и 3 обсуждаются некоторые свойства общей трехгамильтоновой структуры с деформациями и свойства КБГ-модели с точки зрения приложения к ЛВ. В разделах 4 и 5 содержится краткий обзор трехгамильтоновой структуры для ЛВ, деформационного поля и их редукций. Наконец, в разделе 6 с использованием результатов раздела 3 показано, что поле X_L может быть представлено в форме, допускающей разделение переменных, если это поле ограничено на любой симплектический лист одного из трех пуассоновых тензоров.

2. ДЕФОРМАЦИИ МУЛЬТИГАМИЛЬТОНОВЫХ СТРУКТУР И НАСЛЕДСТВЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Сделаем следующие предположения:

1. Многообразие (M, P_2, τ) представляет собой пуассоново многообразие с деформацией, т.е. M есть дифференциальное многообразие с пуассоновым тензором P_2 и векторным полем τ таким, что производная Ли $P_1 = L_\tau(P_2)$ тензора P_2 относительно поля τ сама оказывается пуассоновым тензором. Из этого предположения следует, что комбинация $P_2 - \lambda P_1$ есть пуассонов пучок.

2. Пуассонов тензор P_1 точен относительно поля τ , т.е. $L_\tau^2(P_1) = 0$. Отсюда следует, что производная Ли $P_0 = L_\tau(P_1) = L_\tau^2(P_2)$ сама оказывается пуассоновым тензором, совместным как с P_1 , так и с P_2 .

Из этих предположений следует

ЛЕММА 2.1. *Многообразие (M, P_0, P_1, P_2) представляет собой трехгамильтоново многообразие, т.е. линейная комбинация $P_0 - \lambda P_1 - \mu P_2$ сама представляет собой пуассонов тензор при всех значениях постоянных коэффициентов λ и μ .*

ЗАМЕЧАНИЕ. Как легко проверить, если существует трехгамильтонова структура $(\tilde{P}_0, \tilde{P}_1, \tilde{P}_2)$ такая, что $L_\tau(\tilde{P}_0) = 0$, $L_\tau(\tilde{P}_1) = \alpha \tilde{P}_0$ и $L_\tau(\tilde{P}_2) = \beta \tilde{P}_1 + \gamma \tilde{P}_0$ с постоянными коэффициентами α, β и γ , то при каждом значении параметра a величины $P_0 = \tilde{P}_0$, $P_1 = (1/\alpha)\tilde{P}_1 + (\gamma/\alpha\beta)\tilde{P}_0$ и $P_2 = (a/\alpha\beta)\tilde{P}_2$ удовлетворяют соотношениям деформации

$$L_\tau(P_2) = aP_1, \quad L_\tau(P_1) = P_0, \quad L_\tau(P_0) = 0. \quad (2.1)$$

Утверждение следующей леммы задает достаточное условие для существования проекции трехгамильтоновой структуры при погружении.

ЛЕММА 2.2. *Пусть отображение $\pi: M \mapsto M'$ задает сюръективное погружение на многообразие M' . Если обе структуры P_2 и τ имеют хорошо опеределенные проекции на M' , то и полная трехгамильтонова структура сохраняется при погружении π . Обозначим через P'_0, P'_1 и P'_2 редуцированные тензоры и через τ'*

редуцированное векторное поле. Тогда получим

$$L_{\tau'}(P'_2) = aP'_1, \quad L_{\tau'}(P'_1) = P'_0, \quad L_{\tau'}(P'_0) = 0. \quad (2.2)$$

Как известно, в случае, когда редуцированный пуассонов тензор P'_0 имеет нулевое ядро (обратный к нему тензор при этом симплектичен), то на многообразии M' оператор $N = P'_1 P'^{-1}_0$ представляет собой наследственный оператор, т.е. его кручение Нийенхейса [3] оказывается равным нулю. Наша задача теперь состоит в том, чтобы найти такие ограничения на деформацию τ , которые бы приводили к тому, чтобы оператор N действовал как оператор рекурсии (в направлении, противоположном направлению производных Ли относительно поля τ) для редуцированной трехгамильтоновой структуры на многообразии M' , а также отображал P'_1 в P'_2 (возможно, с точностью до постоянного множителя): $NP'_1 = \lambda P'_2$ при постоянной λ . Для этого можно использовать следующий результат.

ЛЕММА 2.3. Пусть заданы векторное поле τ на многообразии M и его редукция τ' на M' . Рассмотрим уравнение $L_{\tau'}(Q') = 0$ и будем искать такое его решение Q' , которое было бы косимметричным $(2, 0)$ -тензором. Если P'_0 представляет собой общее решение (с точностью до мультипликативной константы), т.е. $L_{\tau'}(Q') = 0 \Rightarrow Q' = \alpha P'_0$, то тензор $N := P'_1 P'^{-1}_0$, заданный на многообразии M' , обладает свойством

$$NP'_1 = \frac{2}{a}P'_2 + \beta P'_0, \quad \beta = \text{const}. \quad (2.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно условиям (2.2) и предыдущим предположениям уравнения $L_{\tau'}(Q') = P'_0$ и $L_{\tau'}(Q') = P'_1$ обладают соответственно решениями $Q' = P'_1 + \alpha P'_0$ и $Q' = (1/a)P'_2 + \alpha P'_0$. Вследствие равенства $L_{\tau'}(N) = I$ получим

$$\frac{1}{2-a}L_{\tau'}(NP'_1 - P'_2) = P'_1 \Rightarrow \frac{1}{2-a}(NP'_1 - P'_2) = \frac{1}{a}P'_2 + \alpha P'_0,$$

откуда следует утверждение (2.3) с параметром $\beta = (2-a)\alpha$.

ЛЕММА 2.4. Пусть задана трехгамильтонова структура (P'_0, P'_1, P'_2) с полем τ' , удовлетворяющим условиям (2.2), и с оператором рекурсии N таким, что $NP'_0 = P'_1$ и $NP'_1 = \lambda P'_2 + \mu P'_0$. Тогда тензоры $Q_0 = P'_0$, $Q_1 = P'_1$ и $Q_2 = P'_2 + (\mu/\lambda)P'_0$ таковы, что деформационные соотношения (2.2) остаются справедливыми, и имеем $NQ_0 = Q_1$, $NQ_1 = \lambda Q_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО состоит в прямом вычислении.

Полученные результаты свидетельствуют о том, что при заданной трехгамильтоновой структуре (P_0, P_1, P_2) с деформационным полем τ , удовлетворяющим соотношениям (2.1), и в случае, когда деформация и трехгамильтонова структура сохраняются при погружении π , существует также и структура рекурсий, задаваемая оператором N на редуцированном многообразии (возможно после масштабного преобразования).

3. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА КБГ-МОДЕЛИ

КБГ-модель была введена в работах [4] и исследована более подробно в [5], [6].

Пусть даны два согласованных пуассоновых тензора Q_0 и Q_1 . Векторное поле X допускает формулировку в терминах КБГ-системы, если существуют такие три функции ρ , H и K , что

$$X = Q_0 dH = \frac{1}{\rho} Q_1 dK. \quad (3.1)$$

Если многообразие M четномерно, $\dim M = 2n$, то будем говорить, что формулировка в терминах КБГ-системы имеет максимальный ранг, если Q_0 и Q_1 невырождены в каждой точке $m \in M$, а ассоциированный с ними тензор $N = Q_1 Q_0^{-1}$ (с исчезающим кручением Нийенхейса) имеет n различных собственных значений $\lambda_1(m), \dots, \lambda_n(m)$. Будем говорить, что формулировка в терминах КБГ-системы имеет пфаффианов вид, если $\rho = \prod_{i=1}^n \lambda_i$. Для КБГ-структуры максимального ранга можно ввести карту Дарбу–Нийенхейса $(\lambda_i; \mu_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, такую, что Q_0 , Q_1 и N принимают в ней канонический вид:

$$Q_0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & \Lambda \\ -\Lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

где I – единичная $(n \times n)$ -матрица и $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ [7].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1 [5]. *В переменных на карте Дарбу–Нийенхейса общее решение уравнения (3.1) в пфаффиановом случае задается функциями*

$$H = \sum_{i=1}^n \frac{f_i}{\Delta_i}, \quad K = \sum_{i=1}^n \frac{\rho}{\lambda_i} \frac{f_i}{\Delta_i}, \quad (3.3)$$

где $\Delta_i = \prod_{j \neq i} (\lambda_i - \lambda_j)$, а f_i – произвольные функции, зависящие не более чем от пары переменных (λ_i, μ_i) . Более того, уравнения ГЯ допускают разделение переменных для обеих функций H и K в карте $(\lambda; \mu)$.

Здесь и ниже будем называть функциями, имеющими нормальный вид, функции вида (3.3) в данной карте. Из предложения 3.1 непосредственно вытекает

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *Пусть $X = Q_0 dH$ – гамильтоновы векторные поля, где величины Q_0 и H задаются соответствующими формулами (3.2) и (3.3). Тогда существуют такие Q_1 и K , задаваемые соответствующими формулами (3.2) и (3.3), что $X = (1/\rho) Q_1 dK$.*

Обратно, пусть $X = (1/\rho) Q_1 dK$ с $\rho = \prod_{i=1}^n \lambda_i$, а Q_1 и K задаются соответствующими соотношениями (3.2) и (3.3). Тогда существуют величины Q_0 и H , задаваемые соответствующими формулами (3.2) и (3.3), такие, что $X = Q_0 dH$.

В контексте приложения к ЛВ рассмотрим более подробно случай четырехмерного многообразия ($n = 2$). В этом случае возникают более общие условия, приводящие к тому, что гамильтоново векторное поле становится сепарабельным.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Пусть на четырехмерном многообразии задано гамильтоново векторное поле $X = Q_0 d\tilde{H}$, где Q_0 имеет канонический вид (3.2) в карте $(x; y)$. Пусть гамильтониан $\tilde{H}$ представляет собой линейную комбинацию двух функций $\hat{H}$ и $\hat{K}$, приведенных к нормальной форме (3.3), т.е.

$$\begin{aligned}\tilde{H}(x; y) &= \alpha \hat{H}(x; y) + \beta \hat{K}(x; y), \quad \alpha, \beta = \text{const}, \\ \hat{H}(x; y) &= \frac{1}{x_1 - x_2} (\hat{f}_1(x_1, y_1) - \hat{f}_2(x_2, y_2)), \\ \hat{K}(x; y) &= \frac{1}{x_1 - x_2} (x_2 \hat{f}_1(x_1, y_1) - x_1 \hat{f}_2(x_2, y_2)).\end{aligned}\tag{3.4}$$

Тогда отображение $\Phi_0: (x; y) \mapsto (\lambda; \mu)$,

$$\lambda_i = \frac{\beta}{\alpha + \beta x_i}, \quad \mu_i = -\frac{1}{\beta^2} (\alpha + \beta x_i)^2 y_i, \quad i = 1, 2,\tag{3.5}$$

симплектично для Q_0 (т.е. вид Q_0 сохраняется при действии Φ_0), а гамильтониан $\tilde{H}$ преобразуется под действием отображения Φ_0 в функцию H , имеющую нормальный вид (3.3) с функциями

$$f_i(\lambda_i, \mu_i) = -\beta \lambda_i \hat{f}_i \left(\frac{1}{\lambda_i} - \frac{\alpha}{\beta}, -\lambda_i^2 \mu_i \right), \quad i = 1, 2.\tag{3.6}$$

Тем самым векторное поле X допускает формулировку в терминах КБГ-системы, а гамильтониан $\tilde{H}$, как оказывается, допускает разделение переменных в карте $(\lambda; \mu)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прямыми вычислениями проверяется, что отображение Φ_0 симплектично для Q_0 и что гамильтониан $\tilde{H}$ принимает вид

$$\tilde{H}(x(\lambda; \mu); y(\lambda; \mu)) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} (f_1(\lambda_1, \mu_1) - f_2(\lambda_2, \mu_2))\tag{3.7}$$

с функциями $f_i(\lambda_i, \mu_i)$, задаваемыми формулой (3.6). Согласно следствию 3.1 векторное поле $X = Q_0 dH$ также допускает квазигамильтонову формулировку $X = (1/\rho) Q_1 dK$. Разделение переменных для $\tilde{H}$ в карте $(\lambda; \mu)$ следует при этом из предложения 3.1.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Гамильтониан $\tilde{H}$ также допускает разделение переменных в карте $(x; y)$. Соответствующее уравнение ГЯ $\tilde{H}(x; \partial W / \partial x) = \tilde{h}$ имеет общее решение $W = W_1 + W_2$, где функции W_1 и W_2 удовлетворяют разделяющим уравнениям Якоби [8]:

$$\hat{f}_i(x_i, W'_i(x_i)) = x_i \hat{h} - \hat{k}, \quad \alpha \hat{h} + \beta \hat{k} = \tilde{h}, \quad i = 1, 2.\tag{3.8}$$

В самом деле, отображение Φ_0 представляет собой разделяющее отображение [9], т.е. оно отображает набор разделенных переменных в другой набор разделенных переменных. Поэтому с учетом вида (3.7) функции $\tilde{H}$ можно легко проверить, что у уравнения ГЯ имеется полное решение $W(x_1, x_2; \hat{h}, \hat{k}) = W_1(x_1; \hat{h}, \hat{k}) + W_2(x_2; \hat{h}, \hat{k})$, где $\alpha \hat{h} + \beta \hat{k} = \tilde{h}$, а функции W_1 и W_2 удовлетворяют разделяющим уравнениям Якоби (3.8) для уравнений ГЯ $\tilde{H}(x; \partial W / \partial x) = \tilde{h}$ и $\tilde{K}(x; \partial W / \partial x) = \tilde{k}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. *Зададим на четырехмерном многообразии поле $X = Q_1 d\tilde{H}$, представляющее собой гамильтоново векторное поле с матрицей Q_1 вида (3.2) в карте $(x; y)$; пусть гамильтониан $\tilde{H}$ задается при этом линейной комбинацией двух функций $\hat{H}$ и $\hat{K}$ нормального вида (3.3), т.е.*

$$\begin{aligned}\tilde{H}(x; y) &= \alpha \hat{H}(x; y) + \beta \hat{K}(x; y), \quad \alpha, \beta = \text{const}, \\ \hat{H}(x; y) &= \frac{1}{x_1 - x_2} (\hat{f}_1(x_1, y_1) - \hat{f}_2(x_2, y_2)), \\ \hat{K}(x; y) &= \frac{1}{x_1 - x_2} (x_2 \hat{f}_1(x_1, y_1) - x_1 \hat{f}_2(x_2, y_2)).\end{aligned}$$

Тогда отображение $\Phi_1: (x; y) \mapsto (\lambda; \mu)$, задаваемое соотношениями

$$\lambda_i = \frac{1}{\alpha + \beta x_i}, \quad \mu_i = -\frac{1}{\beta} (\alpha + \beta x_i)^2 \frac{y_i}{x_i}, \quad i = 1, 2, \quad (3.9)$$

является отображением Дарбу для Q_1 (т.е. Q_1 отображается в матрицу Q_0 под действием Φ_1), в то время как гамильтониан $\tilde{H}$ переводится отображением Φ_1 в функцию H нормального вида (3.3), в которой

$$f_i(\lambda_i, \mu_i) = -\beta \lambda_i \hat{f}_i \left(\frac{1}{\beta} \left(\frac{1}{\lambda_i} - \alpha \right), -\left(\frac{1}{\lambda_i} - \alpha \right) \lambda_i^2 \mu_i \right), \quad i = 1, 2. \quad (3.10)$$

Таким образом, векторное поле X допускает формулировку в терминах КБГ-системы, а гамильтониан $\tilde{H}$ допускает разделение переменных в карте $(\lambda; \mu)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно проверить с помощью прямого вычисления, что отображение Φ_1 задает преобразование Дарбу для Q_1 и гамильтониан $\tilde{H}$ отображается при этом в функцию H нормального вида с составляющими f_i , заданными формулой (3.10). Из следствия 3.1 и предложения 3.1 при этом следует, что гамильтониан $\tilde{H}$ допускает разделение переменных в карте $(\lambda; \mu)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. *Пусть на четырехмерном многообразии поле $X = Q_2 d\tilde{G}$ представляет собой гамильтоново векторное поле с матрицей тензора Q_2 вида (3.2) в карте $(x; y)$ и пусть*

$$\tilde{G} = \alpha \hat{K} + \beta \hat{H}^2,$$

где $\hat{H}$ и $\hat{K}$ имеют нормальный вид (3.3). Тогда отображение $\Phi_2: (x; y) \mapsto (\lambda; \mu)$,

$$\lambda_i = -\frac{1}{x_i}, \quad \mu_i = y_i, \quad i = 1, 2, \quad (3.11)$$

является преобразованием Дарбу для Q_2 (т.е. оно отображает Q_2 в Q_0), а величина $\tilde{G}$ отображается при преобразовании Φ_2 в функцию

$$G = \alpha H + \beta K^2, \quad (3.12)$$

где H и K имеют нормальный вид (3.3) и

$$f_i(\lambda_i, \mu_i) = -\lambda_i \hat{f}_i \left(-\frac{1}{\lambda_i}, \mu_i \right), \quad i = 1, 2. \quad (3.13)$$

Функция $\tilde{G}$ обладает при этом свойством разделимости переменных в карте $(\lambda; \mu)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно непосредственно проверить, что отображение Φ_2 является преобразованием Дарбу для функции Q_2 , а $\tilde{G}$ при этом отображается в G . Рассмотрим уравнение ГЯ $G(\lambda; \partial W / \partial \lambda) = g$ для гамильтониана G . Решение его примет вид $W = W_1 + W_2$ с функциями W_1 и W_2 , являющимися решениями уравнения с разделенными переменными

$$f_i(\lambda_i, W'_i(\lambda_i)) = \lambda_i h - k, \quad \alpha h + \beta k^2 = g, \quad i = 1, 2. \quad (3.14)$$

4. ТРЕХГАМИЛЬТОНОВА СТРУКТУРА ЛАГРАНЖЕВА ВОЛЧКА

В системе, движущейся вместе с волчком, в которой оси координат направлены вдоль главных осей инерции волчка с фиксированной точкой O , ЛВ параметризуется парой $m = (\omega; \gamma)$, где $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ и $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^T$ суть соответственно угловая скорость и единичный вектор нормали. Обозначив через μ массу волчка, через g ускорение свободного падения, через $J = \text{diag}(A, A, cA)$ главную матрицу моментов инерции ($c \neq 1$) и через $G = (0, 0, a)^T$ координату центра масс, выберем нормировку таким образом, чтобы удовлетворялось равенство $\mu a g = A$.

Уравнения Эйлера–Пуассона $dL_O/dt = M_O$ и $d\gamma/dt = 0$ при этом принимают вид $dm/dt = X_L(m)$, где X_L дается формулой

$$X_L(m) = \left(-(c-1)\omega_2\omega_3 - \gamma_2, (c-1)\omega_3\omega_1 + \gamma_1, 0; \gamma_2\omega_3 - \gamma_3\omega_2, \gamma_3\omega_1 - \gamma_1\omega_3, \gamma_1\omega_2 - \gamma_2\omega_1 \right)^T.$$

Векторное поле ЛВ X_L допускает трехгамильтонову формулировку:

$$X_L = P_0 dh_0 = P_1 dh_1 = P_2 dh_2.$$

В матрично-блочной форме записи согласованные пуассоновы тензоры имеют вид

$$\begin{aligned} P_0 &= \begin{pmatrix} 0 & B \\ B & C \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} -B & 0 \\ 0 & \Gamma \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} T & R \\ -R^T & 0 \end{pmatrix}, \\ B &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & c\omega_3 & -\omega_2 \\ -c\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_3 & -\gamma_2 \\ -\gamma_3 & 0 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & -\gamma_1 & 0 \end{pmatrix}, \\ T &= \begin{pmatrix} 0 & -c\omega_3 & \omega_2/c \\ c\omega_3 & 0 & -\omega_1/c \\ -\omega_2/c & \omega_1/c & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma_3 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & 0 & -\gamma_1 \\ -\gamma_2/c & \gamma_1/c & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Соответствующие функции Гамильтона при этом имеют вид

$$\begin{aligned} h_0 &= \frac{1}{2}F_4 + (c-1)F_1F_3, \quad h_1 = \frac{1}{2}c(c-1)F_1^3 - F_3 - (c-1)F_1F_2, \quad h_2 = F_2, \\ F_1 &= \omega_3, \quad F_2 = \frac{1}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2 + c\omega_3^2) - \gamma_3, \\ F_3 &= \omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2 + c\omega_3\gamma_3, \quad F_4 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Функции (F_1, F_2) , (F_1, F_4) и (F_3, F_4) суть функции Казимира для соответствующих структур P_0 , P_1 и P_2 .

Гамильтонова формулировка для ЛВ по отношению к структуре P_2 является классической (см., например, [10]). Бигамильтонова формулировка по отношению к структурам (P_0, P_2) была построена в работе [11] в полупрямом произведении $\mathfrak{so}(3) \times \mathfrak{so}(3)$ и в дальнейшем была переоткрыта в работе [12] в алгебро-геометрическом подходе. В работе [13] с помощью подходящей редукции пучка Ли–Пуассона, заданного в прямой сумме трех копий алгебр $\mathfrak{so}(3)$, была построена трехгамильтонова формулировка по отношению к тензорам (P_0, P_1, P_2) .

Как показано в работе [13], трехгамильтонова структура ЛВ допускает деформацию вида $L_\tau(P_2) = 2P_1$, $L_\tau(P_1) = P_0$, $L_\tau(P_0) = 0$, где τ задается в карте $(\omega; \gamma)$ соотношением $\tau = (0, 0, -2/c; \omega_1, \omega_2, c\omega_3)^T$. Напротив, оператор рекурсии N , связывающий пуассоновы тензоры, не существует на многообразии M .

Пуассоновы пучки $P_1 - \lambda P_0$, $P_2 - \lambda P_1$ и $P_2 - \lambda P_0$ суть три пуассоновых пучка типа Гельфанда–Захаревича; точнее, эти пучки лежат в классе полных систем Гельфанда–Захаревича без кручения, имеющих ранг 2 (см. [14]). Каждый из этих пучков допускает две полиномиальные функции Казимира, коэффициенты которых образуют цепочки Ленарда для каждого из пучков, которые строятся с помощью деформационного поля τ . В графическом представлении цепочки Ленарда системы (P_0, P_1) могут быть представлены в виде

где $G = F_2 + c(c-1)F_1^2/2$. Цепочки Ленарда системы (P_1, P_2) при этом имеют вид

Таким образом, можно утверждать, что структуры $P_1 - \lambda P_0$ и $P_2 - \lambda P_1$ представляют собой пуассоновы пучки ранга 2 и типа (1, 5). Наконец, цепочки Ленарда структуры

(P_0, P_2) имеют вид

из которого следует, что структура $P_2 - \lambda P_0$ представляет собой пуассонов пучок ранга 2 и типа $(3, 3)$.

5. РЕДУКЦИИ ТРЕХГАМИЛЬТОНОВОЙ И ДЕФОРМАЦИОННОЙ СТРУКТУР

Трехгамильтонова структура (P_0, P_1, P_2) ЛВ, равно как и деформационное поле τ , допускает редукцию на четырехмерное многообразие M' (см. работу [1], где этот процесс редукции интерпретировался в терминах теоремы редукции Марсдена–Ратье).

Пусть M' представляет собой четырехмерное многообразие, параметризованное переменными карты $(x; y) = (x_1, x_2; y_1, y_2)$, а $\pi: M \mapsto M' = M/\pi$, $(\omega; \gamma) \mapsto (x; y)$ задает сюръективное погружение, задаваемое формулами

$$x_{1,2} = -\frac{1}{2}(c\omega_3 - i\omega_2) \mp \frac{1}{2}\sqrt{(c\omega_3 - i\omega_2)^2 + 4(\gamma_3 - i\gamma_2)},$$

$$y_{1,2} = -\gamma_1 - \frac{1}{2}\omega_1(c\omega_3 - i\omega_2) \mp \frac{1}{2}\omega_1\sqrt{(c\omega_3 - i\omega_2)^2 + 4(\gamma_3 - i\gamma_2)}.$$

Прямым вычислением можно получить следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *Пуассонов тензор P_0 и деформационное поле τ редуцируются под действием проекции π : проекции тензорных полей при этом имеют вид*

$$P'_0 = -i \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau' = (1, 1, 0, 0)^T, \quad (5.1)$$

где I — единичная (2×2) -матрица. В силу леммы 2.2 структуры P_1 и P_2 также допускают проекции: редуцированные тензоры P'_1 и P'_2 имеют вид

$$P'_1 = -i \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{X} \\ -\mathcal{X} & 0 \end{pmatrix}, \quad P'_2 = -i \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{X}^2 \\ -\mathcal{X}^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

где $\mathcal{X} = \text{diag}(x_1, x_2)$.

Более того, проекция π сохраняет соотношения деформации. Поскольку структура P'_0 , очевидно, имеет нулевое ядро, тензор $N = P'_1 P'^{-1}_0$ существует и имеет нулевое кручение; при этом легко проверить, что $NP'_0 = P'_1$ и $NP'_1 = P'_2$. Поэтому данная структура представляет собой частный случай структуры, обсуждавшейся в лемме 2.3, с параметрами $a = 2$ и $\beta = 0$.

6. РЕДУКЦИИ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ X_L НА СИМПЛЕКТИЧЕСКИЕ ЛИСТЫ

Рассмотрим в данном разделе редукцию системы ЛВ на симплектические листы S_i пуассоновых тензоров P_i , $i = 0, 1, 2$. Каждый лист S_i представляет собой четырехмерное подмногообразие многообразия M , задаваемое набором уровней двух функций Казимира структуры P_i . В силу формул (4.1) симплектические листы задаются соотношениями

$$\begin{aligned} S_0 &= \{m \in M \mid \omega_3 = C_1, \omega_1^2 + \omega_2^2 + c\omega_3^2 - 2\gamma_3 = 2C_2\}, \\ S_1 &= \{m \in M \mid \omega_3 = C_1, \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = C_4\}, \\ S_2 &= \{m \in M \mid \omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2 + c\omega_3\gamma_3 = C_3, \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = C_4\}, \end{aligned} \quad (6.1)$$

в которых C_1, C_2, C_3 и C_4 суть фиксированные значения соответствующих функций Казимира F_1, F_2, F_3 и F_4 . Поскольку эти интегралы движения находятся в инволюции по отношению к каждой из структур P_i , набор уровней, образуемых остающимися двумя интегралами движения на листе S_i , представляет собой лист Λ_i лагранжева слоения листа S_i . Заметим, что для всякой точки $m \in M$ лагранжевы листы Λ_0, Λ_1 и Λ_2 , проходящие через m , совпадают. Более того, с учетом теоремы редукции Марсдена–Ратье, можно доказать следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1 [5]. *Симплектические листы S_0, S_1 и S_2 (локально) диффеоморфны четырехмерному многообразию $M' = M/\pi$.*

Обратившись к явной конструкции, получим, что если $(x_1, x_2; y_1, y_2)$ задает карту на многообразии M' , то можно проверить, что симплектические листы допускают следующие параметризации.

ЛЕММА 6.1. *Симплектический лист S_0 параметризуется отображением $\Psi_0: M' \mapsto M$, $(x; y) \mapsto (\omega; \gamma)$, задаваемым формулами*

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, & \omega_2 &= -i(x_1 + x_2 + cC_1), & \omega_3 &= C_1, \\ \gamma_1 &= \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{x_2 - x_1}, & \gamma_2 &= \frac{i}{2}[x_1^2 + x_2^2 + g_1(x; y)], & \gamma_3 &= -\frac{1}{2}[(x_1 + x_2)^2 + g_1(x; y)], \\ g_1(x; y) &= -\frac{(y_2 - y_1)^2}{(x_2 - x_1)^2} + 2cC_1(x_1 + x_2) + 2C_2 + c(c-1)C_1^2. \end{aligned}$$

Симплектический лист S_1 параметризуется отображением Ψ_1 , задаваемым формулами

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, & \omega_2 &= -i(x_1 + x_2 + cC_1), & \omega_3 &= C_1, \\ \gamma_1 &= \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{x_2 - x_1}, & \gamma_2 &= -\frac{i}{2}[x_1x_2 - g_2(x; y)], & \gamma_3 &= -\frac{1}{2}[x_1x_2 + g_2(x; y)], \\ g_2(x; y) &= -\frac{(x_2y_1 - x_1y_2)^2}{x_1x_2(x_2 - x_1)^2} + \frac{C_4}{x_1x_2}. \end{aligned}$$

Симплектический лист S_2 параметризуется отображением Ψ_2 , задаваемым формулами

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, & \omega_2 &= -\frac{i}{2}[x_1 + x_2 + g_3(x; y)], & \omega_3 &= -\frac{1}{2c}[x_1 + x_2 - g_3(x; y)], \\ \gamma_1 &= \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_2 - x_1}, & \gamma_2 &= -\frac{i}{2}[x_1 x_2 - g_2(x; y)], & \gamma_3 &= -\frac{1}{2}[x_1 x_2 + g_2(x; y)], \\ g_3(x; y) &= \frac{x_1^2 y_2^2 - x_2^2 y_1^2}{x_1^2 x_2^2 (x_2 - x_1)} - \frac{2C_3}{x_1 x_2} + \frac{x_1 + x_2}{x_1^2 x_2^2} C_4.\end{aligned}$$

Используя эти параметризации, можно показать, что ЛВ допускает формулировку в терминах КБГ-системы на каждом из симплектических листов. Тогда следующие три предложения легко доказываются прямыми вычислениями.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.2. Векторное поле X_L , будучи ограничено на S_0 , имеет вид

$$X_L = P'_0 d\tilde{H},$$

где структура P'_0 задается формулой (5.1). Гамильтониан $\tilde{H} = h_0|_{S_0}$ имеет вид

$$\tilde{H}(x; y) = (c - 1)C_1 \hat{H}(x; y) + \hat{K}(x; y), \quad (6.2)$$

где

$$\begin{aligned}\hat{H}(x; y) &= F_3|_{S_0} = \frac{1}{x_1 - x_2}(\hat{f}(x_1, y_1) - \hat{f}(x_2, y_2)), \\ \hat{K}(x; y) &= \frac{F_4}{2}|_{S_0} = \frac{1}{x_1 - x_2}(x_2 \hat{f}(x_1, y_1) - x_1 \hat{f}(x_2, y_2)), \\ \hat{f}(\xi, \eta) &= -\frac{1}{2}\eta^2 + \frac{1}{2}\xi^4 + cC_1 \xi^3 + \left(C_2 + \frac{1}{2}c(c - 1)C_1^2\right)\xi^2.\end{aligned} \quad (6.3)$$

Тем самым имеет место частный случай ситуации из предложения 3.2 при $\alpha = (c - 1)C_1$ и $\beta = 1$. Отсюда можно заключить, что поле $X_L|_{S_0}$ в карте $(\lambda; \mu)$, задаваемой формулами (3.5), представляет собой разделяющееся КБГ-векторное поле.

ЗАМЕЧАНИЕ. Векторное поле $X_L|_{S_0}$ также допускает разделение переменных в карте $(x; y)$. В самом деле, как следует из уравнений (3.8) и выражения (6.3) для $\hat{f}$, решение W уравнения ГЯ для гамильтониана $\tilde{H}$ имеет вид $W = W_1 + W_2$, где функции W_1 и W_2 могут быть вычислены в квадратурах при решении системы обыкновенных дифференциальных уравнений, получаемой при замене величин y_i на величины $\partial W / \partial x_i$ в уравнении

$$y_i^2 = x_i^4 + 2cC_1 x_i^3 + [2C_2 + c(c - 1)C_1^2]x_i^2 - 2\hat{h}x_i + 2\hat{k}, \quad i = 1, 2. \quad (6.4)$$

Здесь $\tilde{h} = (c - 1)C_1 \hat{h} + \hat{k}$, а $\tilde{h}$, $\hat{h}$ и $\hat{k}$ суть соответствующие значения гамильтонианов $\tilde{H}$, $\hat{H}$ и $\hat{K}$, ограниченных на лагранжев лист $\Lambda_0(C_3, C_4)$. Можно теперь установить связь с методом разделения переменных Складина [8]. В самом деле, сравнивая (6.4) со спектральной кривой, получаемой из пары Лакса [11], можно непосредственно заключить, что переменные разделения (x, y) удовлетворяют уравнению спектральной кривой, ограниченной на лист $\Lambda_0(C_3, C_4)$.

Рассмотрим теперь редукцию на симплектический лист S_1 .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.3. Векторное поле X_L , ограниченное на лист S_1 , имеет вид

$$X_L = P'_1 d\tilde{H},$$

где P'_1 задается формулой (5.2). Гамильтониан $\tilde{H} = h_1|_{S_1}$ может быть представлен в виде

$$\begin{aligned}\tilde{H}(x; y) &= (c-1)C_1\hat{H}(x; y) + \hat{K}(x; y), \\ \hat{H}(x; y) &= \frac{1}{x_1 - x_2}(\hat{f}(x_1, y_1) - \hat{f}(x_2, y_2)), \\ \hat{K}(x; y) &= \frac{1}{x_1 - x_2}(x_2\hat{f}(x_1, y_1) - x_1\hat{f}(x_2, y_2)), \\ \hat{f}(\xi, \eta) &= -\frac{1}{2\xi}\eta^2 + \frac{1}{2}\xi^3 + cC_1\xi^2 + \frac{C_4}{2\xi} - \frac{1}{2}c(c-1)(c-2)C_1^3.\end{aligned}$$

При этом возникает частный случай ситуации из предложения 3.3 с параметрами $\alpha = (c-1)C_1$ и $\beta = 1$; поэтому можно прийти к заключению, что карта $(\lambda; \mu)$, определенная формулами (3.9), задает разделение переменных для гамильтониана $\tilde{H}$. Решение уравнения ГЯ для $\tilde{H}$ задается формулами:

$$\begin{aligned}W(\lambda_1, \lambda_2; \tilde{h}, \hat{k}) &= \int^{\lambda_1} \sqrt{\hat{\varphi}_1(\xi)} d\xi + \int^{\lambda_2} \sqrt{\hat{\varphi}_1(\xi)} d\xi, \\ \hat{\varphi}_1(\xi) &= \frac{1}{\xi^4} \left(\left(\frac{1}{\xi} - \alpha \right)^2 + 2cC_1 \left(\frac{1}{\xi} - \alpha \right) - \frac{\alpha c(c-2)C_1^2 - 2\tilde{h} + 2\hat{k}/\xi}{1/\xi - \alpha} + \frac{C_4}{(1/\xi - \alpha)^2} \right),\end{aligned}$$

где $\tilde{h}$ и $\hat{k}$ — значения гамильтонианов $\tilde{H}$ и $\hat{K}$ на лагранжевом листе $\Lambda_1(C_2, C_3)$.

Наконец, обратившись к редукции на симплектический лист S_2 , получим следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.4. Векторное поле X_L , ограниченное на лист S_2 , принимает вид

$$X_L = P'_2 d\tilde{G},$$

где P'_2 задается формулой (5.2). Гамильтониан $\tilde{G} = h_2|_{S_2}$ может быть представлен в виде

$$\begin{aligned}\tilde{G} &= -\frac{1}{2c}(c-1)\hat{H}^2 + \hat{K}, \\ \hat{H}(x; y) &= -cF_1|_{S_2} = \frac{1}{x_1 - x_2}(\hat{f}(x_1, y_1) - \hat{f}(x_2, y_2)), \\ \hat{K}(x; y) &= G|_{S_2} = \frac{1}{x_1 - x_2}(x_2\hat{f}(x_1, y_1) - x_1\hat{f}(x_2, y_2)), \\ \hat{f}(\xi, \eta) &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\eta^2}{\xi^2} - \xi^2 + 2\frac{C_3}{\xi} - \frac{C_4}{\xi^2} \right).\end{aligned}$$

При этом получается в точности частный случай ситуации из предложения 3.4 при подстановке $\beta = -(c-1)/2c$ и $\alpha = 1$; также в этом случае векторное поле $X_L|_{S_2}$ оказывается разделимым в карте $(\lambda; \mu)$, задаваемой формулами (3.11). Решение уравнения ГЯ для гамильтониана $\hat{K}$ при этом имеет вид

$$W(\lambda_1, \lambda_2; h, k) = \int^{\lambda_1} \sqrt{\hat{\varphi}_2(\xi)} d\xi + \int^{\lambda_2} \sqrt{\hat{\varphi}_2(\xi)} d\xi,$$

$$\hat{\varphi}_2(\xi) = C_4 + \frac{2C_3}{\xi} + \frac{2\hat{k}}{\xi^2} - \frac{2\hat{h}}{\xi^3} + \frac{1}{\xi^4},$$

где $\hat{h}$ и $\hat{k}$ суть значения соответствующих гамильтонианов $\hat{H}$ и $\hat{K}$ на лагранжевом листе $\Lambda_2(C_1, C_2)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В отличие от случая структуры S_0 , для структур S_1 и S_2 мы получили, что векторное поле ЛВ X_L оказывается разделимым в карте $(\lambda; \mu)$, но не допускает разделения переменных в карте $(x; y)$, в которой оно не допускает гамильтоновой формулировки относительно канонического пуассонова тензора Q_0 .

Благодарности. Работа была частично поддержана М.И.У.Р. (исследовательский проект “Геометрия интегрируемых систем”) и грантом G.N.F.M. I.N.D.A.M.

Список литературы

- [1] *C. Morosi, G. Tondo.* J. Phys. A. 2002. V. 35. P. 1741–1750.
- [2] *G. Tondo.* J. Phys. A. 1995. V. 28. P. 5097–5115; *Г. Фальки, Ф. Магри, Г. Тондо.* ТМФ. 2000. Т. 122. № 2. С. 212–230; *G. Falqui, F. Magri, M. Pedroni, G. Zubelli.* Regul. Chaotic Dyn. 2000. V. 5. P. 33–52.
- [3] *F. Magri, C. Morosi.* A geometrical characterization of integrable Hamiltonian systems through the theory of Poisson–Nijenhuis manifolds. Quaderno 19/S, Dip. Mat. Milano: Università di Milano, 1984.
- [4] *R. Caboz, V. Ravoson, L. Gavrilov.* J. Phys. A. 1991. V. 24. P. L523–L525; *R. Brouzet, R. Caboz, J. Rabenivo, V. Ravoson.* J. Phys. A. 1996. V. 29. P. 2069–2075.
- [5] *C. Morosi, G. Tondo.* J. Phys. A. 1997. V. 30. P. 2799–2806.
- [6] *G. Tondo, C. Morosi.* Rep. Math. Phys. 1999. V. 44. P. 255–266.
- [7] *F. Magri, T. Marsico.* Some developments of the concept of Poisson manifolds in the sense of A. Lichnerowicz. In: Gravitation, Electromagnetism, and Geometric Structures. Ed. G. Ferrarese. Bologna: Pitagora, 1996. P. 207–222.
- [8] *E. K. Sklyanin.* Progr. Theor. Phys. Suppl. 1995. V. 118. P. 35–60.
- [9] *S. Benenti.* J. Math. Phys. 1997. V. 38. P. 6578–6602.
- [10] *L. Gavrilov, A. Zhivkov.* Enseign. Math. 1998. V. 44. P. 133–170.
- [11] *T. Ratiu.* Am. J. Math. 1982. V. 104. P. 409–448.
- [12] *C. Médan.* Phys. Lett. A. 1996. V. 215. P. 176–180.
- [13] *G. Magnano.* Acc. Sc. Torino-Mem. Sc. Fis. 1995, 1996. V. 19, 20. P. 159–209.
- [14] *I. M. Gel'fand, I. S. Zakharevich.* Selecta Math. (N. S.). 2000. V. 6. P. 131–183.