Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Музетте, К. Верховен, Об уравнениях C -КП и B -КП, связанных с обобщенным гамильтонианом Хенона–Хейлеса четвертого порядка, *ТМФ*, 2003, том 137, номер 2, 239–252

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf269>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 04:45:05

© 2003 г.

М. Музетте*, К. Верховен*

ОБ УРАВНЕНИЯХ C -КП И B -КП, СВЯЗАННЫХ С ОБОБЩЕННЫМ ГАМИЛЬТониАНОМ ХЕНОНА–ХЕЙЛЕСА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

В своей теоретико-групповой классификации солитонных уравнений Джимбо и Ми-ва располагают билинейные уравнения низших степеней, соответствующие обычной и модифицированной иерархиям Кадомцева–Петвиашвили, в зависимости от представления бесконечномерных алгебр Ли. Рассмотрены $(1+1)$ -мерные редукции для трех конкретных уравнений из этого списка, представляющих интерес с точки зрения нахождения новых связей с обобщенным гамильтонианом Хенона–Хейлеса, которые могут оказаться полезными при интегрировании последнего с функциями, обладающими свойством Пенлеве. Два из этих дифференциальных уравнений в частных производных имеют N -солитонные решения, которые, как и в случае уравнения Каупа–Купершмидта, можно записать как логарифмическую производную от определителя Грама. Кроме того, они могут описывать лобовые столкновения уединенных волн различного вида и формы.

Ключевые слова: солитонные уравнения, зацепляющиеся уравнения типа КдФ, пары Лакса четвертого и пятого порядка, гамильтоновы системы.

1. РЕДУКЦИИ УРАВНЕНИЙ B -КП И C -КП

В иерархии Кадомцева–Петвиашвили (КП) [1] мы сначала рассмотрим двухкомпонентную систему [2]

$$\begin{aligned}(D_1^4 - 4D_1D_3 + 3D_2^2)(\tau_0 \cdot \tau_0) &= 0, \\ ((D_1^3 + 2D_3)D_2 - 3D_1D_4)(\tau_0 \cdot \tau_0) &= 0\end{aligned}\tag{1}$$

и систему

$$\begin{aligned}(D_1^4 - 4D_1D_3 + 3D_2^2)(\tau_0 \cdot \tau_0) &= 0, \\ (D_1^6 - 20D_1^3D_3 - 80D_3^2 + 144D_1D_5 - 45D_1^2D_2^2)(\tau_0 \cdot \tau_0) &= 0,\end{aligned}\tag{2}$$

где нижние индексы у билинейных операторов соответствуют компонентам вектора $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, а степень n оператора Хироты D_{x_i} определена как

$$D_{x_i}^n(f \cdot g) = (\partial_{x_i} - \partial_{x'_i})^n(f(x_i)g(x'_i))|_{x_i=x'_i}.\tag{3}$$

*Dienst Theoretische Natuurkunde, Vrije Universiteit Brussel, Pleinlaan 2, B-1050 Brussels, Belgium. E-mail: mmusette@vub.ac.be; cverhoev@vub.ac.be

Символ τ_0 обозначает функцию от $\mathbf{x}$, которая удовлетворяет условию

$$\tau_0(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = \tau_0(x_1, -x_2, x_3, -x_4, \dots),$$

возникающему из-за симметрии C_∞ -алгебры Ли, и разлагается в ряд Тейлора по четным переменным $x_2, x_4, \dots$:

$$\tau_0(\mathbf{x}) = f(x_{\text{odd}}) + \frac{1}{2}x_2^2 g(x_{\text{odd}}) + \dots,$$

где символ x_{odd} обозначает нечетные переменные $x_1, x_3, \dots$.

Из системы (1) в предположении, что τ_0 не зависит от x_4 , мы получаем $(1+1)$ -мерную билинейную систему

$$\begin{aligned} (D_1^4 - 4D_1 D_3)(f \cdot f) + 6fg &= 0, & (D_1^3 + 2D_3)(f \cdot g) &= 0, \\ f = \tau_0|_{x_2=x_4=\dots=0}, & \quad g = \frac{\partial^2 \tau_0}{\partial x_2^2} \Big|_{x_2=x_4=\dots=0}, \end{aligned} \quad (4)$$

которая эквивалентна паре зацепляющихся дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП) типа Кортевега–де Фриза (КдФ) ($x_3 \equiv t, x_1 \equiv x$) [1]–[4]

$$\begin{aligned} -4u_t + 12uu_x + u_{xxx} + 3v_x &= 0, & u &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln f, \\ 2v_t + 6uv_x + v_{xxx} &= 0, & v &= \frac{g}{4f}, \end{aligned} \quad (5)$$

а после исключения v эквивалентна скалярному уравнению шестого порядка ($u = z_x$) [5]

$$-8z_{tt} + z_{xxxxx} - 2z_{xxxt} + 18z_x z_{xxx} + 36z_{xx} z_{xxx} + 72z_x^2 z_{xx} = 0. \quad (6)$$

Это интегрируемое ДУЧП, которое является уравнением второго порядка по временной переменной, мы будем называть двусторонним уравнением Сацумы–Хироты (дСХ).

Если положить $z = \partial_{x_1} \ln \tau_0(\mathbf{x})|_{x_2=x_4=\dots=0}$, то система (2) становится $(2+1)$ -мерным ДУЧП, которое обычно называют уравнением C -КП,

$$\begin{aligned} 9z_{x_1, x_5} - 5z_{2x_3} + \left(-5z_{2x_1, x_3} - 15z_{x_1} z_{x_3} + z_{5x_1} + \right. \\ \left. + 15z_{x_1} z_{3x_1} + 15(z_{x_1})^3 + \frac{45}{4}(z_{2x_1})^2 \right)_{x_1} = 0, \quad z_{2x_3} \equiv z_{x_3 x_3}, \quad \dots \end{aligned} \quad (7)$$

Это уравнение является обобщением на случай двух пространственных переменных либо уравнения Каупа–Купершмидта (КК) [6] (если положить $x_1 = x, x_3 = y, x_5 = t$), либо двустороннего уравнения КК (дКК) [7] (если положить $x_1 = x, x_5 = y, x_3 = t$).

Редукциями низших размерностей являются следующие редукции.

1. Редукция $\partial_{x_3} \tau_0 = 0, x_1 \equiv x, x_5 \equiv 9t$,

$$\begin{aligned} D_x^4(f \cdot f) + 6fg &= 0, \\ (D_x^6 + 16D_x D_t)(f \cdot f) - 90D_x^2(f \cdot g) &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

которая эквивалентна потенциальному уравнению КК пятого порядка [8]

$$z_t + z_{xxxx} + 15z_x z_{xxx} + 15(z_x)^3 + \frac{45}{4}(z_{xx})^2 = 0, \quad z = \partial_x \ln f. \quad (9)$$

2. Редукция $\partial_{x_5} \tau_0 = 0$, $x_1 \equiv x$, $x_3 \equiv t$,

$$\begin{aligned} (D_x^4 - 4D_x D_t)(f \cdot f) + 6fg &= 0, \\ (D_x^6 - 20D_x^3 D_t - 80D_t^2)(f \cdot f) - 45D_x^2(f \cdot g) &= 0, \end{aligned} \quad (10)$$

которая эквивалентна уравнению дКК шестого порядка [7]

$$\left(z_{xxxx} + 15z_x z_{xxx} + 15(z_x)^3 - 15z_x z_t - 5z_{xt} + \frac{45}{4}(z_{xx})^2 \right)_x - 5z_{tt} = 0. \quad (11)$$

Из списка [1] билинейных уравнений, соответствующих модифицированной иерархии КП, рассмотрим систему

$$\begin{aligned} (D_1^2 + D_2)(\tau_0 \cdot \tau_1) &= 0, \\ (D_1^6 - 20D_1^3 D_3 - 80D_3^2 + 144D_1 D_5 + 15(4D_1 D_3 - D_1^4)D_2)(\tau_0 \cdot \tau_1) &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

где тау-функции удовлетворяют условиям симметрии B_∞ -алгебры Ли,

$$\tau_1(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = \tau_0(x_1, -x_2, x_3, -x_4, \dots),$$

и разлагаются в ряд Тейлора по $x_2, x_4, \dots$:

$$\begin{aligned} \tau_0(\mathbf{x}) &= f(x_{\text{odd}}) + x_2 g(x_{\text{odd}}) + \frac{1}{2} x_2^2 h_1(x_{\text{odd}}) + x_4 h_2(x_{\text{odd}}) + \dots, \\ \tau_1(\mathbf{x}) &= f(x_{\text{odd}}) - x_2 g(x_{\text{odd}}) + \frac{1}{2} x_2^2 h_1(x_{\text{odd}}) - x_4 h_2(x_{\text{odd}}) + \dots. \end{aligned}$$

Если положить $z = \partial_{x_1} \ln \tau_0(\mathbf{x})|_{x_2=x_4=\dots=0}$, то система (12) превращается в $(2+1)$ -мерное ДУЧП, которое обычно называется уравнением В-КП,

$$9z_{x_1, x_5} - 5z_{2x_3} + (-5z_{2x_1, x_3} - 15z_{x_1} z_{x_3} + z_{5x_1} + 15z_{x_1} z_{3x_1} + 15(z_{x_1})^3)_{x_1} = 0, \quad (13)$$

и является обобщением на случай двух пространственных переменных либо уравнения Савады–Котера (СК), либо уравнения Рамани [9].

Редукциями низших размерностей являются следующие редукции.

1. Редукция $z_{x_3} = 0$, $x_5 \equiv 9t$, $x_1 \equiv x$, $z = \partial_x \ln f$,

$$z_t + z_{xxxx} + 15z_x z_{xxx} + 15(z_x)^3 = 0, \quad (14)$$

которая является потенциальным уравнением СК [10].

2. Редукция $z_{x_5} = 0$, $x_3 \equiv t$, $x_1 \equiv x$, $z = \partial_x \ln f$,

$$(z_{xxxx} + 15z_x z_{xxx} + 15(z_x)^3 - 15z_x z_t - 5z_{xt})_x - 5z_{tt} = 0, \quad (15)$$

которая является $(1 + 1)$ -мерным уравнением Рамани, называемым также уравнением дСК. Так как этому уравнению уже было уделено много внимания в литературе (см. ссылки в [7]), мы не будем здесь изучать его решения.

В этой статье мы рассмотрим динамику солитонных решений уравнений (6) и (11), которые довольно интересны, так как могут описывать лобовые столкновения уединенных волн различного вида и формы. Мы также получим аналитическое выражение, представляющее их N -солитонные решения через определитель Грама.

В заключение мы покажем, как уравнения (11) и (15) (записанные в виде систем зацепляющихся уравнений типа КдФ) и система (5) связаны с другими зацепляющимися системами КдФ, которые связаны с помощью редукции с обобщенным гамильтонианом Хенона–Хейлеса [11] с обобщенным потенциалом четвертого порядка [12]–[14].

2. N -СОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ дСХ

Применяя преобразование Беклунда

$$\begin{aligned}
 p_t - \left(p_{xx} - \frac{3}{4} \frac{p_x^2}{p} + \frac{3}{2} pp_x + 3z_x p + \frac{1}{4} p^3 \right)_x &= 0, \quad p = Z - z, \\
 \frac{1}{2} p_{xxxx} + \frac{5}{3} z_{xxx} p - \frac{p_x p_{xxx}}{p} + \frac{3}{2} p p_{xxx} + 2z_{xx} p_x + 2z_{xx} p^2 - \frac{3}{4} \frac{p_x^2}{p} + \\
 + 2z_x p_{xx} + \frac{9}{4} \frac{p_x^2 p_{xx}}{p^2} + p_x p_{xx} + \frac{7}{4} p^2 p_{xx} + 2z_x^2 p - z_x \frac{p_x^2}{p} + 4z_x p p_x + \\
 + z_x p^3 - \frac{15}{16} \frac{p_x^4}{p^3} + \frac{15}{8} p p_x^2 + p^3 p_x + \frac{4}{3} z_t p + \frac{1}{16} p^5 - \lambda p &= 0,
 \end{aligned} \tag{16}$$

где z и Z — два различных решения уравнения (6), мы показали в работе [15], что это уравнение имеет N -солитонные решения, которые, как и в случае уравнения КК, связаны с определителем Грама:

$$z^{(N)} = \partial_x \ln f^{(N)}, \quad f^{(N)} = \det \left[\int \phi_i \phi_j dx \right]_{1 \leq i, j \leq N}, \tag{17}$$

где ϕ_i удовлетворяет паре Лакса четвертого порядка [2] (u, v — решение системы (5))

$$\begin{aligned}
 (\partial_x^4 + 4u\partial_x^2 + 4u_x\partial_x + 2u_{xx} + 4u^2 + v)\psi &= \lambda\psi, \\
 \left(\partial_x^3 + 3u\partial_x + \frac{3}{2}u_x \right) \psi &= \partial_t \psi
 \end{aligned} \tag{18}$$

при $u = v = 0$ и $\lambda \equiv \lambda_i$.

Учитывая, что дисперсионное соотношение, соответствующее линейной части уравнения (6), является полиномом второй степени по ω ,

$$F(\omega, k) \equiv 8\omega^2 - k^6 + 2\omega k^3 = 0,$$

в зависимости от направления распространения мы получим два типа уединенных волн, распространяющихся со скоростями $v_+ = k^2/2$ и $v_- = -k^2/4$. Уединенная волна, распространяющаяся в отрицательном направлении, имеет КдФ-подобный профиль, задаваемый соотношениями

$$u_- = \partial_x^2 \ln(1 + e^{\theta_-}), \quad \theta_- = kx + \frac{1}{4}k^3t + \delta_-, \quad (19)$$

и соответствует случаю, когда система (5) вырождается ($v \equiv 0$) в уравнение КдФ, тогда как уединенная волна, распространяющаяся в положительном направлении, имеет вид

$$u_+ = \partial_x^2 \ln\left(1 + 2e^{\theta_+} + \frac{1}{2}e^{2\theta_+}\right), \quad \theta_+ = kx - \frac{1}{2}k^3t + \delta_+. \quad (20)$$

Следовательно, для двухсолитонного решения

$$u_{12} = \partial_x^2 \ln f_{12}$$

мы получаем соотношения трех различных типов:

$$\begin{aligned} f_{12} &\equiv f_{12}^{(- -)} = 1 + e^{\theta_{1,-}} + e^{\theta_{2,-}} + A_{12}e^{\theta_{1,-} + \theta_{2,-}}, \\ f_{12} &\equiv f_{12}^{(++)} = 1 + 2(e^{\theta_{1,+}} + e^{\theta_{2,+}}) + \frac{1}{2}(e^{2\theta_{1,+}} + e^{2\theta_{2,+}}) + B_{12}e^{\theta_{1,+} + \theta_{2,+}} + \\ &\quad + A_{12}(e^{2\theta_{1,+} + \theta_{2,+}} + e^{\theta_{1,+} + 2\theta_{2,+}}) + \frac{A_{12}^2}{4}e^{2(\theta_{1,+} + \theta_{2,+})}, \\ f_{12} &\equiv f_{12}^{(+ -)} = 1 + 2e^{\theta_{1,+}} + e^{\theta_{2,-}} + \frac{1}{2}e^{2\theta_{1,+}} + 2\tilde{A}_{12}e^{\theta_{1,+} + \theta_{2,-}} + \frac{\tilde{A}_{12}^2}{2}e^{2\theta_{1,+} + \theta_{2,-}}, \end{aligned}$$

где

$$A_{12} = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2}, \quad B_{12} = \frac{4(k_1^4 + k_2^4)}{(k_1 + k_2)(k_1^2 + k_2^2)}, \quad \tilde{A}_{12} = \frac{2k_1^2 - 2k_1k_2 + k_2^2}{2k_1^2 + 2k_1k_2 + k_2^2}.$$

Первое соотношение описывает столкновение двух распространяющихся в одном направлении уединенных волн типа КдФ, имеющих вид (19), второе соотношение описывает столкновение двух распространяющихся в одном направлении уединенных волн типа пары зацепляющихся уравнений КдФ, имеющих вид (20), и третье соотношение (см. рис. 1) описывает лобовое столкновение уединенных волн типа КдФ и пары зацепляющихся уравнений КдФ.

Заметим, что если поле v тождественно равно нулю, то пара Лакса четвертого порядка (18) вырождается в пару Лакса второго порядка для уравнения КдФ.

3. N-СОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ дКК

(2 + 1)-мерное уравнение C -КР (7) возникает из условия совместности для линейных операторов

$$\begin{aligned} L &\equiv \partial_{x_3} - \partial_{x_1}^3 - 3u\partial_{x_1} - \frac{3}{2}u_{x_1}, \\ M &\equiv \partial_{x_5} - \partial_{x_1}^5 - 5u\partial_{x_1}^3 - \frac{15}{2}u_{x_1}\partial_{x_1}^2 - \left(5u^2 + \frac{35}{6}u_{2x_1} + \frac{15}{9}z_{x_3}\right)\partial_{x_1} - \\ &\quad - 5uu_{x_1} - \frac{5}{3}u_{3x_1} - \frac{15}{18}u_{x_3}, \quad u = z_{x_1}, \\ [L, M] &= 0 \Leftrightarrow E_{C-КП}(z) = 0, \end{aligned} \quad (21)$$

Рис. 1. u_{12}^{+-} ($k_1 = 0.7$ и $k_2 = 0.9$).

которые действуют на волновую функцию $\phi(x_1, x_3, x_5)$. Рассматривая редукцию (u не зависит от x_3)

$$\begin{aligned} u(x_1, x_3, x_5) &\equiv u(x_1, x_5), & \phi(x_1, x_3, x_5) &= e^{\lambda x_3} \phi(x_1, x_5), \\ x_5 &\equiv 9t, & x_1 &\equiv x, & \lambda &= \text{const}, \end{aligned}$$

мы снова получим пару Лакса третьего порядка [8] для уравнения КК,

$$\begin{aligned} \left(\partial_x^3 + 3u\partial_x + \frac{3}{2}u_x \right) \phi &= \lambda \phi, \\ \left(\partial_x^5 + 5u\partial_x^3 + \frac{15}{2}u_x\partial_x^2 + \left(5u^2 + \frac{35}{6}u_{xx} \right) \partial_x + 5uu_x + \frac{5}{3}u_{xxx} \right) \phi &= \frac{1}{9}\partial_t \phi, \\ [L, M] = 0 &\Leftrightarrow u_t + \left(u_{xxxx} + 15uu_{xx} + 15u^3 + \frac{45}{4}(u_x)^2 \right)_x = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Если u не зависит от x_5 ,

$$\begin{aligned} u(x_1, x_3, x_5) &\equiv u(x_1, x_3), & \phi(x_1, x_3, x_5) &= e^{\lambda x_5} \phi(x_1, x_3), \\ x_3 &\equiv t, & x_1 &\equiv x, \end{aligned}$$

то мы получаем пару Лакса [7] для потенциального уравнения дКК (11),

$$\begin{aligned} \left(\partial_x^5 + 5u\partial_x^3 + \frac{15}{2}u_x\partial_x^2 + \left(5u^2 + \frac{35}{6}u_{xx} + \frac{15}{9}z_t \right) \partial_x + \right. \\ \left. + 5uu_x + \frac{5}{3}u_{xxx} + \frac{15}{18}u_t \right) \phi &= \lambda \phi, & u &= z_x, \\ \left(\partial_x^3 + 3u\partial_x + \frac{3}{2}u_x \right) \phi &= \partial_t \phi, \\ [L, M] = 0 &\Leftrightarrow E_{\text{дКК}}(z) = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Рассматривая преобразование Дарбу [16]

$$Z = \partial_x \ln f + z, \quad f = \int^x \phi^2,$$

и исключая ϕ из него и из линейного уравнения (23), мы получаем преобразование Беклунда

$$p_t - \left(p_{xx} - \frac{3p_x^2}{4p} + \frac{3}{2}pp_x + 3z_xp + \frac{1}{4}p^3 \right)_x = 0, \quad p = Z - z, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}p_{xxxx} + \frac{5}{3}z_{xxx}p - \frac{5}{4}\frac{p_x p_{xxx}}{p} + \frac{3}{2}pp_{xxx} + \frac{5}{4}z_{xx}p_x + \frac{5}{4}z_{xx}p^2 - \frac{5}{8}\frac{p_{xx}^2}{p} + \\ & + \frac{5}{2}z_xp_{xx} + \frac{5}{2}\frac{p_x^2 p_{xx}}{p^2} + \frac{5}{4}p_x p_{xx} + \frac{5}{4}p^2 p_{xx} + \frac{5}{2}z_x^2 p - \frac{15}{8}z_x \frac{p_x^2}{p} + \frac{15}{4}z_x p p_x + \\ & + \frac{5}{8}z_x p^3 - 35\frac{p_x^4}{p^3} + \frac{25}{16}pp_x^2 + \frac{5}{8}p^3 p_x - \frac{5}{8}\frac{p_x^3}{p} + \frac{5}{6}z_t p + \frac{1}{32}p^5 - \lambda = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Как было показано в [15], из (24) легко получить формулу нелинейной суперпозиции

$$f_{12} = f_0 \left| \begin{array}{cc} \int^x \phi_1^2 & \int^x \phi_1 \phi_2 \\ \int^x \phi_1 \phi_2 & \int^x \phi_2^2 \end{array} \right|, \quad (26)$$

где ϕ_1 и ϕ_2 – решение пары Лакса (23) с соответствующими спектральными параметрами λ_1 и λ_2 , а потенциал $z_0 = \partial_x \ln f_0$ является решением потенциального уравнения дКК (11). Если взять $f_0 = 1$ в качестве исходного (затравочного) решения, то $z_{12} = \partial_x \ln f_{12}$ дает двухсолитонное решение уравнения (11), зависящее от двух различных параметров λ_1 и λ_2 . Следовательно, формула нелинейной суперпозиции для N -солитонного решения, так же как и для решения уравнения КК [17], имеет вид

$$f^{(N)} \equiv \det \left[\int \phi_i \phi_j dx \right]_{1 \leq i, j \leq N}, \quad (27)$$

где ϕ_i – вакуумная волновая функция, являющаяся решением пары Лакса (23) при $z = 0$ и $\lambda = \lambda_i$.

Дисперсионное соотношение, соответствующее линейной части уравнения (11), так же как и уравнения (6), является полиномом второй степени по ω ,

$$F(\omega, k) \equiv 5\omega^2 - k^6 + 5\omega k^3 = 0,$$

и мы соответственно получаем два различных значения для скорости односолитонного решения

$$v_+ = \frac{\sqrt{5}(3 + \sqrt{5})}{10}k^2 > 0, \quad v_- = \frac{\sqrt{5}(-3 + \sqrt{5})}{10}k^2 < 0 \quad (28)$$

и два различных профиля в зависимости от направления распространения (см. рис. 2)

$$u_{\pm}^{(1)} = \partial_x^2 \ln f \equiv \partial_x^2 \ln \left(1 + 4e^{\theta_{\pm}} + \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}e^{2\theta_{\pm}} \right), \quad \theta_{\pm} = k(x - v_{\pm}t) + \delta. \quad (29)$$

Рис. 2. $u_-^{(1)}$ и $u_+^{(1)}$ при $k = 1$. Рис. 3. $u_{12}^{(- -)} (k_1 = 0.9 \text{ и } k_2 = 1.25)$ и $u_{12}^{(+ +)} (k_1 = 0.6 \text{ и } k_2 = 0.85)$.

Для двухсолитонного решения мы получаем три возможности. Две из них дают столкновение распространяющихся в одном направлении уединенных волн (см. рис. 3),

$$\begin{aligned}
 u_{12}^{(\pm\pm)} &= \partial_x^2 \ln f_{12}^{(\pm\pm)}, \\
 f_{12}^{(\pm\pm)} &= 1 + 4(e^{\theta_{1,\pm}} + e^{\theta_{2,\pm}}) + \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}(e^{2\theta_{1,\pm}} + e^{2\theta_{2,\pm}}) + B_{12}^{(\pm\pm)}e^{\theta_{1,\pm} + \theta_{2,\pm}} + \\
 &\quad + 4A_{12}^{(\pm\pm)}(e^{2\theta_{1,\pm} + \theta_{2,\pm}} + e^{\theta_{1,\pm} + 2\theta_{2,\pm}}) + A_{12}^{(\pm\pm)^2}e^{2(\theta_{1,\pm} + \theta_{2,\pm})},
 \end{aligned} \tag{30}$$

где

$$\begin{aligned}
 A_{12}^{(\pm\pm)} &= \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2 \frac{k_1^2 - (1 \mp \sqrt{5})k_1k_2/2 + k_2^2}{k_1^2 + (1 \mp \sqrt{5})k_1k_2/2 + k_2^2}, \\
 B_{12}^{(\pm\pm)} &= \frac{16(k_1^4 - (3 \mp \sqrt{5})k_1^2k_2^2/4 + k_2^4)}{(k_1 + k_2)^2(k_1^2 + (1 \mp \sqrt{5})k_1k_2/2 + k_2^2)}.
 \end{aligned}$$

 Рис. 4. $u_{12}^{(+)}(k_1 = 0.6 \text{ и } k_2 = 0.75)$.

Третья представляет лобовое столкновение уединенных волн (см. рис. 4),

$$\begin{aligned}
 u_{12}^{(+)} &= \partial_x^2 \ln f_{12}^{(+-)}, \\
 f_{12}^{(+)} &= 1 + 4(e^{\theta_{1,+}} + e^{\theta_{2,-}}) + \frac{3 + \sqrt{5}}{2} e^{2\theta_{1,+}} + \\
 &\quad + \frac{3 - \sqrt{5}}{2} e^{2\theta_{2,-}} + B_{12}^{(+)} e^{\theta_{1,+} + \theta_{2,-}} + \\
 &\quad + 4A_{12}^{(+)} \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} e^{2\theta_{1,+} + \theta_{2,-}} + \frac{3 - \sqrt{5}}{2} e^{\theta_{1,+} + 2\theta_{2,-}} \right) + \\
 &\quad + A_{12}^{(+)}{}^2 e^{2(\theta_{1,+} + \theta_{2,-})},
 \end{aligned} \tag{31}$$

где

$$\begin{aligned}
 A_{12}^{(+)} &= \frac{k_1^4 - (5 - \sqrt{5})k_1^3 k_2 / 2 + 3(3 - \sqrt{5})k_1^2 k_2^2 / 2 - (5 - 2\sqrt{5})k_1 k_2^3 + (7 - 3\sqrt{5})k_2^4 / 2}{k_1^4 + (5 - \sqrt{5})k_1^3 k_2 / 2 + 3(3 - \sqrt{5})k_1^2 k_2^2 / 2 + (5 - 2\sqrt{5})k_1 k_2^3 + (7 - 3\sqrt{5})k_2^4 / 2}, \\
 B_{12}^{(+)} &= \frac{16(k_1^4 + (3 - \sqrt{5})k_1^2 k_2^2 / 4 + (7 - 3\sqrt{5})k_2^4 / 2)}{k_1^4 + (5 - \sqrt{5})k_1^3 k_2 / 2 + 3(3 - \sqrt{5})k_1^2 k_2^2 / 2 + (5 - 2\sqrt{5})k_1 k_2^3 + (7 - 3\sqrt{5})k_2^4 / 2}.
 \end{aligned}$$

В выражениях (30) и (31)

$$\begin{aligned}
 \theta_{1,\pm} &= k_1(x - v_{1,\pm}t) + \delta_{1,\pm}, \quad v_{1,\pm} = \frac{\sqrt{5}(\pm 3 + \sqrt{5})}{10} k_1^2, \\
 \theta_{2,\pm} &= k_2(x - v_{2,\pm}t) + \delta_{2,\pm}, \quad v_{2,\pm} = \frac{\sqrt{5}(\pm 3 + \sqrt{5})}{10} k_2^2.
 \end{aligned}$$

4. СВЯЗЬ С ОБОБЩЕННЫМ ГАМИЛЬТониАНОМ ХЕНОНА–ХЕЙЛЕСА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Известно, что двухчастичный гамильтониан с потенциалом четвертого порядка, содержащий линейные и неполиномиальные аддитивные члены,

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + aq_1^4 + bq_1^2 q_2^2 + cq_2^2 + \text{аддитивные члены}, \tag{32}$$

может быть проинтегрирован в следующих четырех случаях [18], [19]:

- 1) $a : b : c = 1 : 2 : 1$;
- 2) $a : b : c = 1 : 6 : 1$;
- 3) $a : b : c = 1 : 6 : 8$;
- 4) $a : b : c = 1 : 12 : 16$.

В каждом интегрируемом по Лиувиллю случае связь между уравнениями движения и стационарным потоком некоторого солитонного ДУЧП была установлена в работах [13], [20], [21], что позволило записать общее решение через эллиптические и гиперболические функции [21]–[24]. Но в случае, если гамильтониан содержит аддитивные члены некоторых видов, этих связей недостаточно для того, чтобы проинтегрировать уравнения движения в явном виде. Мы приведем некоторые новые соотношения, связывающие уравнения движения с другими солитонными ДУЧП, для того чтобы проинтегрировать уравнения движения с функциями, обладающими свойством Пенлеве.

Современное состояние исследований четырех указанных выше случаев интегрируемости по Лиувиллю показано в таблице, где представлены: 1) их связи с солитонными ДУЧП; 2) ссылки на предыдущие работы, в которых изучался гамильтониан четвертого порядка; 3) результаты, касающиеся интегрирования уравнения движения в зависимости от вида аддитивных членов. Первые три случая (с указанием ограничений на произвольные параметры α , β и μ , ν) были проинтегрированы с гиперэллиптическими функциями второго рода.

$a : b : c$	ДУЧП	Гамильтонова система	Интегрируемость	
			без аддитивных членов	с аддитивными членами
1 : 2 : 1	нелинейная суперпозиция [25]	[26]	Да	$\alpha q_1^{-2} + \beta q_2^{-2}$ $\alpha\beta \neq 0$: Да [22] (гиперэллиптические)
1 : 6 : 1	система зацепляющихся уравнений КдФ (пара Лакса 4-го порядка)	[12]	Да	$\alpha q_1^{-2} + \beta q_2^{-2}$ $\alpha = \beta$: Да [24] (гиперэллиптические) $\alpha \neq \beta$: Нет
1 : 6 : 8	система зацепляющихся уравнений КдФ (пара Лакса 4-го порядка)	[12]	Да [21]	$\mu q_1 + \nu q_2^{-2}$ $\mu\nu = 0$: Да [20], [24] (гиперэллиптические) $\mu\nu \neq 0$: Нет
1 : 12 : 16	система зацепляющихся уравнений КдФ (пара Лакса 5-го порядка)	[13]	Да [27]	$\alpha q_1^{-2} + \beta q_2^{-2}$: Нет

Рис. 5. Три пары зацепляющихся уравнений КдФ и отображения Миуры M_1 и M_2 [13] (“sr” обозначает стационарную редукцию).

Система зацепляющихся уравнений типа КдФ (5), которая имеет бигамильтонову структуру [27], связана с системой зацепляющихся уравнений типа КдФ, приведенной в [12], [13],

$$\begin{aligned} f_t &= -\frac{1}{2}(2f_{xxx} + 3ff_{xx} + 3f_x^2 - 3f^2f_x + 6fg_x + 6gf_x), \\ g_t &= \frac{1}{4}(2g_{xxx} + 12gg_x + 6g_{xx} + 12gf_{xx} + 18f_xg_x - 6f^2g_x + 3f_{xxx} + \\ &\quad + 3ff_{xx} + 18ff_{xx} - 6f^2f_{xx} - 6ff_x^2), \end{aligned} \quad (33)$$

преобразованием Миуры

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}(2g - f_x - f^2), \\ v &= \frac{1}{4}(2f_{xxx} + 4ff_{xx} + 8gf_x + 4fg_x + 3f_x^2 - 2f^2f_x - f^4 + 4f^2g). \end{aligned} \quad (34)$$

Кроме того, стационарная редукция уравнения дСХ (6) может быть идентифицирована с нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнением F-VI в классификации Косгроува [29], где оно интегрируется с гиперэллиптическими функциями.

На рис. 5 показано, как система (5) связана с другими системами зацепляющихся уравнений КдФ, ранее рассмотренными Бейкером [13] в интегрируемых случаях 2 и 3 обобщенного потенциала четвертого порядка.

Наконец, мы объясняем, как две пары зацепляющихся уравнений КдФ, эквивалентные соответственно уравнению Рамани (15) и уравнению дКК (11) и обе обладающие парами Лакса пятого порядка, связаны преобразованием Миуры с другими системами зацепляющихся уравнений КдФ, которые Бейкер рассматривал в связи с интегрируемым случаем 1:12:16 гамильтониана (32).

Парная система [4]

$$\begin{aligned} u_t &= -2au_{xxx} - 2buu_x + \frac{9a^2}{5b}v_x, \\ v_t &= av_{xxx} - bu_{xxxx} - \frac{5b^2}{3a}uu_{xxx} - \frac{5b^2}{3a}u_xu_{xx} + buv_x - bu_xv, \end{aligned} \quad (35)$$

где a и b — не обращающиеся в нуль константы, возникает из условия совместности для пары Лакса пятого порядка

$$\begin{aligned} \left(\partial_x^5 + \frac{5b}{3a} u \partial_x^3 + \frac{5b}{3a} u_x \partial_x^2 + v \partial_x \right) \phi &= \lambda \phi, \\ (a \partial_x^3 + bu \partial_x) \phi &= \partial_t \phi. \end{aligned} \quad (36)$$

Если положить $u = z_x$ и исключить v из (35), то эта система становится эквивалентной уравнению

$$5z_{tt} + \left(5z_{xxt} + 5\frac{b}{a} z_t z_x - az_{xxxx} - 5bz_x z_{xxx} - \frac{5b^2}{3a} z_x^3 \right)_x = 0, \quad (37)$$

которое тождественно совпадает с уравнением Рамани (15) при $a = 1$ и $b = 3$.

Мы также рассмотрим систему зацепляющихся уравнений [4]

$$\begin{aligned} u_t &= -\frac{7}{2} a u_{xxx} - 2buu_x + \frac{9a^2}{5b} v_x, \\ v_t &= \frac{5}{2} a v_{xxx} - \frac{19}{4} b u_{xxxx} - \frac{25b^2}{6a} u u_{xx} - \frac{5b^2}{a} u_x u_{xx} + buv_x - bu_x v, \end{aligned} \quad (38)$$

которая возникает из условия совместности для другой пары Лакса пятого порядка

$$\begin{aligned} \left(\partial_x^5 + \frac{5b}{3a} u \partial_x^3 + \frac{5b}{2a} u_x \partial_x^2 + v \partial_x + \frac{1}{2} v_x - \frac{5b}{12a} u_{xxx} \right) \phi &= \lambda \phi, \\ \left(a \partial_x^3 + bu \partial_x + \frac{b}{2} u_x \right) \phi &= \partial_t \phi. \end{aligned} \quad (39)$$

Если положить $u = z_x$ и исключить v из (38), то эта система становится эквивалентной уравнению

$$5z_{tt} + a \left(5z_{xxt} + 5\frac{b}{a} z_t z_x - az_{xxxx} - 5bz_x z_{xxx} - \frac{5b^2}{3a} z_x^3 - \frac{15b}{4} z_{xx}^2 \right)_x = 0, \quad (40)$$

которое тождественно совпадает с потенциальным уравнением дКК (11) при $a = 1$ и $b = 3$. Две предыдущие системы связаны преобразованием Миуры с системой зацепляющихся уравнений типа КдФ (которая обозначается как сКдФ_a на рис. 6) [13]

$$\begin{aligned} f_t &= -7f_{xxx} - 3g_{xx} - 3ff_{xx} - 9fg_x - 3f_x^2 - 9gf_x + 6f^2 f_x, \\ g_t &= 3f_{xxx} + 2g_{xx} + 3fg_{xx} - 3f^2 f_{xx} - 3f^2 g_x - 3ff_x^2 + 3fgf_x + \\ &\quad + 9f_x f_{xx} + 9f_x g_x + 3gf_{xx} + 3gg_x. \end{aligned} \quad (41)$$

Эта система также обладает парой Лакса пятого порядка, которую можно записать либо в виде

$$\begin{aligned} L_1 &\equiv (\partial_x^2 + f \partial_x + f_x + g) \partial_x (\partial_x^2 - f \partial_x + g) - \lambda, \\ M_1 &\equiv 5\partial_x^3 + 3(2g - 2f_x - f^2) \partial_x + 3(g_x - f_{xx} - f f_x) - \partial_t, \end{aligned}$$

Рис. 6. Три системы зацепляющихся уравнений КдФ и отображения Миуры M_3 и M_4 [13]. Обобщенный кубический гамильтониан Хенона–Хейлеса (в случаях ХХ–КК и ХХ–СК) был проинтегрирован в работе [30].

либо как

$$L_2 \equiv (\partial_x^2 - f\partial_x + g)(\partial_x^2 + f\partial_x + f_x + g)\partial_x - \lambda,$$

$$M_2 \equiv 5\partial_x^3 + 3(2g + 3f_x - f^2)\partial_x - \partial_t.$$

Полагая $a = 5$, мы получаем преобразование Миуры

$$u_{\text{Ram}} = \frac{3}{b}(2g + 3f_x - f^2),$$

$$v_{\text{Ram}} = f_{xxx} + g_{xx} - f f_{xx} + g f_x - f g_x + g^2$$

для системы (35) и

$$u_{\text{дКК}} = \frac{3}{b}(2g - 2f_x - f^2),$$

$$v_{\text{дКК}} = -f_{xxx} + 3g_{xx} - f f_{xx} + 2f g_x - f_x^2 + g^2$$

для системы (38). На рис. 6 показано, как системы зацепляющихся уравнений КдФ, обладающие парами Лакса пятого порядка, связаны с интегрируемым гамильтонианом в случае 1:12:16.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы рассмотрели динамику двух $(1 + 1)$ -мерных интегрируемых ДУЧП шестого порядка, которые являются уравнениями второго порядка по временной переменной и имеют солитонные решения, профиль которых зависит от направления распространения. Записанные в виде систем зацепляющихся уравнений КдФ, они связаны стационарной редукцией с тремя интегрируемыми по Лиувиллю случаями обобщенного гамильтониана Хенона–Хейлеса четвертого порядка. Мы надеемся, что полученные нами новые

связи с системами зацепляющихся уравнений КдФ, ранее представленными Бейкером, позволяют проинтегрировать в явном виде (неинтегрируемые) случаи, перечисленные в таблице, с функциями, обладающими свойством Пенлеве. Некоторые предварительные результаты, полученные в [31], позволяют надеяться, что случай 1:12:16 может быть проинтегрирован при α и β , не обращающихся в нуль (см. таблицу).

Благодарности. Один из авторов (К. Верховен) благодарит организаторов конференции NEEDS 2002 за финансовую поддержку. Один из авторов (К. Верховен) является научным сотрудником фонда “Scientific Research-Flanders.”

Список литературы

- [1] *M. Jimbo, T. Miwa.* Publ. Res. Inst. Math. Sci. 1983. V. 19. P. 943.
- [2] *J. Satsuma, R. Hirota.* J. Phys. Soc. Japan. 1982. V. 51. P. 3390.
- [3] *В. Г. Дринфельд, В. В. Соколов.* ДАН СССР. 1981. Т. 258. С. 11.
- [4] *V. G. Drinfel'd, V. V. Sokolov.* J. Sov. Math. 1985. V. 30. P. 1975.
- [5] *О. И. Богоявленский.* УМН. 1990. Т. 45. № 4. С. 17.
- [6] *X.-B. Hu, D.-L. Wang, X.-M. Qian.* Phys. Lett. A. 1999. V. 262. P. 409.
- [7] *J. M. Dye, A. Parker.* J. Math. Phys. 2001. V. 42. P. 2567.
- [8] *D. J. Kaup.* Stud. Appl. Math. 1980. V. 62. P. 189.
- [9] *A. Ramani.* Inverse scattering, ordinary differential equations of Painlevé type, and Hirota's bilinear formalism. In: Fourth Intl. Conf. on Collective Phenomena (Ann. New York Acad. Sci., V. 373). Ed. J. Lebowitz, 1981. P. 54.
- [10] *K. Sawada, T. Kotera.* Progr. Theor. Phys. 1974. V. 51. P. 1355.
- [11] *M. Hénon, C. Heiles.* Astron. J. 1964. V. 69. P. 73.
- [12] *S. Baker, V. Z. Enolskii, A. P. Fordy.* Phys. Lett. A. 1995. V. 201. P. 167.
- [13] *S. Baker.* Squared eigenfunction representations of integrable hierarchies. PhD thesis. Univ. of Leeds, 1995.
- [14] *A. P. Fordy.* Phys. D. 1995. V. 87. P. 20.
- [15] *C. Verhoeven, M. Musette.* J. Phys. A. 2001. V. 34. P. L721.
- [16] *I. Loris.* Inverse Problems. 1999. V. 15. P. 1099.
- [17] *M. Musette, C. Verhoeven.* Phys. D. 2000. V. 144. P. 211.
- [18] *B. Grammaticos, B. Dorizzi, A. Ramani.* J. Math. Phys. 1984. V. 25. P. 3470.
- [19] *J. Hietarinta.* Phys. Rep. 1987. V. 147. P. 87.
- [20] *F. J. Romeiras.* J. Math. Phys. 1995. V. 36. P. 3559.
- [21] *V. Ravoson, A. Ramani, B. Grammaticos.* Phys. Lett. A. 1994. V. 191. P. 91.
- [22] *S. Wojciechowski.* Physica Scripta. 1985. V. 31. P. 433.
- [23] *F. J. Romeiras.* J. Phys. A. 1995. V. 28. P. 5633.
- [24] *К. Верховен, М. Музетте, Р. Конт.* ТМФ. 2003. Т. 134. № 1. С. 128.
- [25] *С. В. Мананов.* ЖЭТФ. 1973. Т. 65. С. 505.
- [26] *R. Garnier.* Rend. Circ. Mat. Palermo. 1919. V. 43. P. 3559.
- [27] *S. Abenda, Yu. Federov.* Acta Math. Appl. 2000. V. 50. P. 137.
- [28] *M. Gürses, A. Karasu.* Phys. Lett. A. 1999. V. 251. P. 247.
- [29] *C. M. Cosgrove.* Stud. Appl. Math. 2000. V. 104. P. 1.
- [30] *C. Verhoeven, M. Musette, R. Conte.* J. Math. Phys. 2002. V. 43. P. 1906.
- [31] *C. Verhoeven.* Integration of Hamiltonian systems of Hénon–Heiles type their associated soliton equations. Thesis. Brussels, 2003.