Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. Л. Безруков, Д. Г. Левков, θ -инстантоны в теории $SU(2)$ с механизмом Хиггса, *ТМФ*, 2004, том 138, номер 3, 468–479

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf27>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 12:43:13

© 2004 г.

Ф. Л. Безруков*, Д. Г. Левков*

θ -ИНСТАНТОНЫ В ТЕОРИИ $SU(2)$ С МЕХАНИЗМОМ ХИГГСА

Рассматриваются процессы с изменением топологического числа в теории $SU(2)$ с механизмом Хиггса. В стандартной модели физики частиц такие процессы сопровождаются нарушением барионного и лептонного чисел. При заданных энергии и числе частиц в начальном состоянии эти процессы описываются с помощью классических решений, называемых θ -инстантонами. Находятся θ -инстантонные решения и вычисляется показатель экспоненты подавления для переходов с изменением топологического числа в области относительно низких энергий.

Ключевые слова: электрослабая модель, инстантонные переходы, нарушение фермионных чисел.

1. ВВЕДЕНИЕ

Туннельные переходы, происходящие в электрослабой теории между топологически различными вакуумами, сопровождаются нарушением барионного и лептонного чисел [1] — явлением, которое имеет важные приложения в физике частиц и космологии. При нулевой энергии эти процессы описываются с помощью инстантонов [2] и происходят с экспоненциально малой вероятностью, пропорциональной $e^{-2S^{(1)}} \sim 10^{-170}$, где $S^{(1)} = 8\pi^2/g^2$ — действие инстантона. В работах [3] было показано, что при относительно низких энергиях инклюзивное сечение процессов с изменением топологического числа при столкновении частиц можно найти с помощью теории возмущений на фоне инстантона. Вычисленное таким образом сечение быстро растет с ростом энергии, так что ведущий вклад в инстантонное сечение перестает быть подавленным при энергии, сравнимой с энергией сфалерона $E_{\text{sph}} \sim 10$ ТэВ. Однако дальнейшие исследования [4], [5] (см. также обзоры [6]) показали, что фактическим параметром разложения в теории возмущений над инстантоном является $(E/E_{\text{sph}})^{2/3}$, и, таким образом, наиболее интересная область $E \gtrsim E_{\text{sph}}$ не может быть проанализирована с помощью аналитических методов. При энергиях $E \ll E_{\text{sph}}$ результаты анализа с помощью теории возмущений

---

*Институт ядерных исследований РАН, Москва, Россия.
E-mail: fedor@ms2.inr.ac.ru; levkov@ms2.inr.ac.ru

приводят к экспоненциальному виду сечения:

$$\sigma_0(E) \propto \exp \left\{ \frac{1}{g^2} F_0 \left(\frac{E}{E_{\text{sph}}} \right) \right\}, \quad (1)$$

где g – константа связи слабого взаимодействия, а показатель экспоненты $F_0(E/E_{\text{sph}})$ отрицателен и растет с увеличением энергии. В ведущем порядке теории возмущений около инстантона

$$F_0 = -16\pi^2 + 3 \left[\frac{3g^4 E^4}{8\pi^2 v^4} \right]^{1/3} + O \left(g^2 \frac{E^2}{v^2} \right),$$

где v – вакуумное ожидание поля Хиггса.

Характерная экспоненциальная форма выражения (1) наводит на мысль, что должна существовать квазиклассическая процедура, позволяющая вычислить показатель экспоненты подавления $F_0(E/E_{\text{sph}})$ при любых энергиях. Основной трудностью при создании такой процедуры является то, что начальное состояние процесса столкновения частиц содержит лишь две высокоэнергичные частицы и не может быть описано квазиклассически. Способ, позволяющий обойти это затруднение, был предложен в работе [7]. Основная идея заключается в изучении процессов инстантонного типа с параметрически большой энергией и начальным числом частиц: $E = \tilde{E}/g^2$, $N = \tilde{N}/g^2$. В этом случае оправданно использование квазиклассических методов для нахождения полуинклюзивного сечения $\sigma(E, N)$: многочастичные процессы с изменением топологического числа в пределе слабой связи $g^2 \rightarrow 0$ описываются θ -инстантонами – решениями определенной классической граничной задачи, а показатель экспоненты подавления многочастичного сечения $F(\tilde{E}, \tilde{N})$ вычисляется как значение модифицированного соответствующим образом функционала действия на этих решениях [7]. Граничная задача, которой удовлетворяют θ -инстантоны, будет описана в разделе 2.

В работах [8] была выдвинута гипотеза, что экспонента подавления двухчастичного сечения восстанавливается из многочастичной экспоненты в пределе исчезающе малого числа частиц:

$$F_0(\tilde{E}) = \lim_{\tilde{N} \rightarrow 0} F(\tilde{E}, \tilde{N}). \quad (2)$$

Эта гипотеза проверена в работе [9] явным вычислением в квантовой механике. Таким образом, мы заключаем, что метод θ -инстантонов вместе с предельным переходом (2) позволяет определить экспоненту подавления двухчастичного сечения при любых энергиях.

В работе [7] показано, что при низких энергиях θ -инстантон может быть приближен цепочкой соответствующим образом модифицированных инстантонов и антиинстантонов, расположенных в определенных местах на евклидовой оси времени. Несмотря на то что это приближение оправданно только при $E \ll E_{\text{sph}}$, такой вид приближенных решений дает общее представление о форме θ -инстантонов во всей области $E < E_{\text{sph}}$. В разделе 3 мы исследуем свойства θ -инстантонов при низких энергиях в теории с калибровочной группой $SU(2)$ и механизмом Хиггса, являющейся близким аналогом стандартной модели. Мы показываем, что приближение цепочкой инстантонов позволяет

найти показатель экспоненты подавления многочастичного сечения $F(\tilde{E}, \tilde{N})$ с точностью до поправок порядка $O(\tilde{E}^2)$. В пределе малого числа частиц наш результат для $F(\tilde{E}, \tilde{N})$ совпадает с результатами вычислений функции $F_0(\tilde{E})$ по теории возмущений, полученными в работах [4], [10]. Таким образом, наши результаты подтверждают, что соотношение (2) действительно выполняется. Мы обнаруживаем, однако, что разложение показателя многочастичной экспоненты подавления при малых N содержит не зависящий от энергии член $N \ln N$ и, следовательно, производная $\partial F / \partial E$ имеет регулярное поведение при $N \rightarrow 0$.

В течение последнего десятилетия были развиты сложные численные методы нахождения θ -инстантонов при высоких энергиях [11], [12]. Приближенные θ -инстантонные решения, найденные в этой статье, могут быть использованы для проверки правильности работы численных методов. В разделе 3 мы проводим такую проверку для модели с калибровочной группой $SU(2)$ и механизмом Хиггса: после экстраполяции в область низких энергий численные результаты работ [12], [13] совпадают с нашими аналитическими результатами.

2. T/θ -ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА

Граничная задача для нахождения θ -инстантонов [7] требует введения двух множителей Лагранжа, T и θ , с помощью которых фиксируются значения энергии и начального числа частиц. Задача естественным образом формулируется на контуре $ABCD$ в плоскости комплексного времени (см. рис. 1) таким, что мнимая часть начального момента времени равна $T/2$. Мы обозначим поля, составляющие θ -инстантон, единым символом $\varphi(\mathbf{x}, t)$.

Рис. 1. Контур в комплексной плоскости времени.

Во внутренних точках контура эти поля удовлетворяют классическим уравнениям поля

$$\frac{\delta S}{\delta \varphi} = 0. \quad (3a)$$

В асимптотическом будущем (часть D контура) поля действительны и описывают эволюцию системы после топологического перехода:

$$\text{Im } \varphi(\mathbf{x}, t)|_D = 0. \quad (3b)$$

В асимптотическом прошлом (часть A контура) поля должны находиться в линейном режиме и удовлетворять линеаризованным уравнениям поля. Следовательно,

$$\varphi(\mathbf{x}, t)|_A = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} [f_{\mathbf{k}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}}(t-iT/2)+i\mathbf{k}\mathbf{x}} + g_{\mathbf{k}}^* e^{i\omega_{\mathbf{k}}(t-iT/2)-i\mathbf{k}\mathbf{x}}].$$

Граничные условия в асимптотическом прошлом связывают положительно-частотные и отрицательно-частотные компоненты решения:

$$f_{\mathbf{k}} = e^{-\theta} g_{\mathbf{k}}. \quad (3в)$$

Заметим, что при $\theta \rightarrow +\infty$ граничные условия (3в) переходят в условия Фейнмана, так что соответствующее θ -инстантонное решение описывает переход из состояния с исчезающе малым количеством частиц. При конечном θ уравнение (3в) можно рассматривать как деформацию фейнмановских граничных условий. Заметим, что вследствие уравнения (3в) θ -инстантонное решение *неизбежно комплексное*. Исключение составляет частный случай $\theta = 0$, когда решение носит название периодического инстантона [14].

Решая уравнения (3а)–(3в), получаем θ -инстантонное решение для любых заданных наперед значений лагранжевых множителей T и θ . Показатель экспоненты подавления дается значением следующего функционала, вычисленного на этом решении:

$$\frac{1}{g^2} F(E, N) = ET + N\theta - 2 \operatorname{Im} S_{ABCD}, \quad (4)$$

где S_{ABCD} – действие вдоль контура $ABCD$. Экстремизация экспоненты подавления относительно множителей Лагранжа приводит к уравнениям, позволяющим определить значения T и θ :

$$E = 2 \frac{\partial}{\partial T} \operatorname{Im} S_{ABCD}, \quad (5а)$$

$$N = 2 \frac{\partial}{\partial \theta} \operatorname{Im} S_{ABCD}. \quad (5б)$$

Можно показать, что E и N равны классической энергии и числу частиц в начальном состоянии, вычисленным на θ -инстантонном решении:

$$E = \int d\mathbf{k} \omega_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}},$$

$$N = \int d\mathbf{k} f_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}.$$

3. θ -ИНСТАНТОНЫ ПРИ НИЗКИХ ЭНЕРГИЯХ

Рассмотрим теорию с калибровочной группой $SU(2)$ и полем Хиггса в фундаментальном представлении. Эта теория совпадает с бозонным сектором электрослабой теории с нулевым углом смешивания. В модели присутствуют локализованные инстантоны и антиинстантоны, которые являются решениями евклидовых уравнений движения с дополнительным условием связи, фиксирующим размер ρ локализованного (анти)инстантона. В сингулярной калибровке эти решения имеют вид [2], [15]

$$A_{\mu}^{a(I)} = \frac{2\rho^2}{g} \frac{\bar{\eta}_{\mu\nu}^a x_{\nu}}{x^2(x^2 + \rho^2)},$$

$$A_{\mu}^{a(A)} = \frac{2\rho^2}{g} \frac{\eta_{\mu\nu}^a x_{\nu}}{x^2(x^2 + \rho^2)},$$

где суммирование по индексу ν происходит с евклидовой метрикой, а соответственно $x^0 \equiv \tau = it$ – евклидово время.

Рис. 2. а) θ -инстантон при низкой энергии; б) инстантон-антиинстантонная пара.

Мы конструируем θ -инстантонное решение, располагая инстантоны и антиинстантоны вдоль мнимой оси времени, как показано на рис. 2а, и домножая их на факторы $e^{-\theta|n|}$:

$$A_{\mu}^{a(\theta)}(\mathbf{x}, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\theta|n|} [A_{\mu}^{a(I)}(\mathbf{x}, \tau + T_1 + nT) + A_{\mu}^{a(A)}(\mathbf{x}, \tau - T_1 + nT)]. \quad (6)$$

Таким образом, инстантоны (подавленные множителями $e^{-\theta|n|}$) находятся в точках $\text{Im } t = -\tau = T_1 + nT$, а антиинстантоны — в точках $\text{Im } t = -\tau = -T_1 + nT$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. В дальнейшем мы убедимся, что при низких энергиях размер инстантонов мал по сравнению с расстоянием между ними: $\rho \ll T$, $\rho \ll T_1$, и $T, T_1 \ll 1/(gv)$. Это основная причина, по которой работает приближение решения суммой полей инстантонов и антиинстантонов.

Покажем, что решение (6) удовлетворяет уравнениям поля (3а) на контуре $ABCD$ и граничным условиям (3а) и (3б) в асимптотических областях A и D , соответственно. Для этого удобно произвести фурье-преобразование инстантонного поля:

$$A_\mu^{a(1)}(\mathbf{k}, \tau) = \int \frac{d\mathbf{x}}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} A_\mu^{a(1)}(\mathbf{x}, \tau),$$

где

$$A_0^{a(1)}(\mathbf{k}, \tau) = -\frac{2i\rho^2}{g} \frac{\partial}{\partial k_a} \Phi(k, \tau), \quad (7a)$$

$$A_i^{a(1)}(\mathbf{k}, \tau) = -\frac{2\rho^2}{g} \left(\delta_{ia}\tau + i\epsilon_{ija} \frac{\partial}{\partial k_j} \right) \Phi(k, \tau), \quad (7б)$$

а $k = |\mathbf{k}|$ и

$$\Phi(\mathbf{k}, \tau) = \frac{\sqrt{2\pi}}{4|\tau|} e^{-k|\tau|} + O\left(\frac{\rho^2}{\tau^3}\right). \quad (7в)$$

На контуре $ABCD$ (рис. 1) приближенное решение (6) имеет вид суперпозиции “главного инстантона”, находящегося в точке $\text{Im } t = -\tau = T_1$, и малых вкладов от линеаризованных асимптотик остальных инстантонов и антиинстантонов. Так как вне центрального ядра инстантона поля, составляющие инстантон, имеют малый импульс $k \lesssim 1/T$ (см. (7в)), то их взаимодействие с ядром другого инстантона подавлено степенями величины ρ^2/T^2 . Следовательно, с точностью до поправок порядка $O(\rho^2/T^2)$ линейная комбинация (6) удовлетворяет уравнениям поля (3а).

В асимптотических областях A и D можно просуммировать вклады от всех инстантонов и антиинстантонов. После перехода в калибровку $A_0^a = 0$ получаем

$$A_i^{a(\theta)}(\mathbf{k}, t)|_A = \frac{\rho^2 \sqrt{2\pi}}{g[1 - e^{-kT-\theta}]} (e^{ikt} + e^{-ikt-kT-\theta}) \times \\ \times \left\{ \text{sh}(kT_1) \left(\delta_{ia} - \frac{k_i k_a}{k^2} \right) + i\epsilon_{ija} \frac{k_j}{k} \text{ch}(kT_1) \right\}, \quad (8a)$$

$$A_i^{a(\theta)}(\mathbf{k}, t)|_D = -\frac{\rho^2 \sqrt{2\pi} \cos(kt)}{g[1 - e^{-kT-\theta}]} \times \left\{ \left(\delta_{ia} - \frac{k_i k_a}{k^2} \right) (e^{-kT_1} - e^{kT_1-kT-\theta}) - \right. \\ \left. - i\epsilon_{ija} \frac{k_j}{k} (e^{-kT_1} + e^{kT_1-kT-\theta}) \right\}. \quad (8б)$$

Отсюда можно заключить, что граничные условия (3б) и (3в) действительно выполняются.

Перед тем как вычислять экспоненту подавления (4) на приближенном решении (6), полезно сначала рассмотреть вклад от одной инстантон-антиинстантонной пары в минимальную часть действия на контуре $ABCD$ (см. рис. 2б). Так как на этом контуре антиинстантон комплексно-сопряжен к инстантону, $A^{(A)}(\mathbf{x}, t) = [A^{(I)}(\mathbf{x}, t)]^*$, то инстантон-антиинстантонная конфигурация C -симметрична и

$$2 \operatorname{Im} S_{ABCD}^{(\text{IA})} = S_{ABCD}^{(\text{IA})} - (S_{ABCD}^{(\text{IA})})^* = S_{ABCD}^{(\text{IA})} + S_{D'C'B'A'}^{(\text{IA})} = S_{\text{E}}^{(\text{IA})}, \quad (9)$$

где $S_{\text{E}}^{(\text{IA})}$ обозначает евклидово действие инстантон-антиинстантонной пары. Отметим, что сингулярности поля (анти)инстантона, отмеченные на рис. 2в пунктирными линиями, не позволяют сдвинуть контур $ABCD$ ни в одну из областей $\tau \rightarrow \pm\infty$, в которых поле (анти)инстантона обращается в нуль. Величина $S_{\text{E}}^{(\text{IA})} = S^{(\text{I})} + S^{(\text{A})} + S_{\text{int}}^{(\text{IA})}$ естественным образом представляется в виде суммы вкладов инстантона и антиинстантона:

$$S^{(\text{I})} = S^{(\text{A})} = \frac{8\pi^2}{g^2} + \pi^2 \rho^2 v^2, \quad (10)$$

где второй член является вкладом поля Хиггса, и вклада взаимодействия между инстантоном и антиинстантоном, вычисленного в работах [16]:

$$S_{\text{int}}^{(\text{IA})} = -\frac{96\pi^2 \rho^4}{g^2 l^4}. \quad (11)$$

Здесь $l = 2T_1$ – расстояние между инстантоном и антиинстантоном. Поправки по степеням величины ρ^2/l^2 в формулах (10) и (11) опущены. Объединяя формулы (10) и (11), окончательно получаем

$$2 \operatorname{Im} S_{ABCD}^{(\text{IA})} = \frac{16\pi^2}{g^2} + 2\pi^2 \rho^2 v^2 - \frac{96\pi^2 \rho^4}{l^4} + O\left(\frac{\rho^6}{l^6}\right). \quad (12)$$

Действие θ -инстантона состоит из суммы действия (10) “главного” инстантона и членов взаимодействия, которые с точностью до поправок порядка $O(\rho^6/T^6)$ квадратичны по (анти)инстантонным полям. Инстантон-инстантонное взаимодействие имеет порядок $O(\rho^6/l^6)$ (см. [16]) и, таким образом, не дает вклада в действие в пределах рассматриваемой точности. Следовательно, вклад взаимодействия в действие θ -инстантона состоит из суммы вкладов от взаимодействия различных инстантон-антиинстантонных пар. Если инстантон и антиинстантон находятся выше (ниже) главного инстантона, то контур $ABCD$ может быть сдвинут в область $\tau \rightarrow \pm\infty$ без пересечения сингулярностей, и вклад в действие от такой пары равен нулю. Описанный ранее аргумент с C -сопряжением показывает, что даже если инстантон и антиинстантон находятся по разные стороны от главного инстантона, то их вклад в действие также равен нулю. Таким образом, ненулевой вклад дает только взаимодействие главного инстантона с различными антиинстантонами. Такие вклады уже были вычислены выше. Их сумма дает

$$\begin{aligned} S_{\text{int}}^{(\theta)} &= -\frac{96\pi^2 \rho^4}{g^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\theta|n|}}{(2T_1 + nT)^4} = \\ &= -\frac{16\pi^2 \rho^4}{g^2} \int_0^\infty \frac{dk k^3}{1 - e^{-kT - \theta}} (e^{-2kT_1} + e^{2kT_1 - kT - \theta}), \end{aligned} \quad (13)$$

где в последнем равенстве было использовано интегральное представление для суммы. Наконец, из выражения (4) получаем ответ для показателя экспоненты подавления:

$$\begin{aligned} \frac{1}{g^2} F = & ET + N\theta - \frac{16\pi^2}{g^2} - 2\pi^2 v^2 \rho^2 + \\ & + \frac{16\pi^2 \rho^4}{g^2} \int_0^\infty \frac{dk k^3}{1 - e^{-kT-\theta}} (e^{-2kT_1} + e^{2kT_1 - kT - \theta}). \end{aligned} \quad (14)$$

Кроме множителей Лагранжа T и θ , определяемых уравнениями (5а) и (5б), решение (6) содержит два свободных параметра: размер инстантона ρ и положение “главного” инстантона T_1 . Эти параметры должны быть выбраны так, чтобы обеспечить экстремальность показателя экспоненты подавления F . Экстремизация (14) по отношению к T_1 определяет отношение $t_1 \equiv T_1/T$ как функцию θ . Это отношение удовлетворяет уравнению

$$\int_0^\infty \frac{dq q^4}{1 - e^{-q-\theta}} (e^{2qt_1 - q - \theta} - e^{-2qt_1}) = 0. \quad (15)$$

При $\theta = 0$ (случай периодического инстантона) уравнение (15) имеет решение $t_1 = 1/4$, т.е. антиинстантоны находятся точно посередине между инстантонами. В предельном случае $\theta \rightarrow +\infty$ (что соответствует пределу $N \rightarrow 0$) имеем $t_1 \rightarrow 1/2$, т.е. инстантоны приближаются к соседним антиинстантонам. При изменении θ от 0 до $+\infty$ t_1 гладко меняется между своими предельными значениями (см. рис. 3).

Рис. 3. Отношение $t_1 = T_1/T$ как функция θ .

Удобно выразить седловые значения параметров ρ , T и θ через два интеграла:

$$I_E(\theta) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dq q^4}{(1 - e^{-q-\theta})^2} e^{-q-\theta} \operatorname{ch}[2qt_1(\theta)], \quad (16a)$$

$$I_N(\theta) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dq q^3}{(1 - e^{-q-\theta})^2} e^{-q-\theta} \operatorname{ch}[2qt_1(\theta)]. \quad (16b)$$

Экстремизация выражения (14) по ρ дает

$$\rho^2 = \frac{g^2 v^2 T^4}{16 I_E(\theta)}, \quad (17)$$

а из уравнений (5а) и (5б) следует, что

$$T = \left[\frac{4 E I_E(\theta)}{\pi^2 g^2 v^4} \right]^{1/3}, \quad (18)$$

$$\frac{N}{E^{4/3}} = I_N(\theta) \left[\frac{2}{\pi g v^2 I_E(\theta)} \right]^{2/3}. \quad (19)$$

Уравнение (19) неявно определяет θ как функцию комбинации $N/E^{4/3}$. В терминах интегралов $I_E(\theta)$ и $I_N(\theta)$ показатель экспоненты подавления принимает вид

$$\frac{1}{g^2} F(\theta, E) = -\frac{16\pi^2}{g^2} + \left[\frac{E^4}{16\pi^2 g^2 v^4} \right]^{1/3} \left(3 I_E(\theta)^{1/3} + 4\theta \frac{I_N(\theta)}{I_E(\theta)^{2/3}} \right) + O\left(\frac{\rho^6}{g^2 T^6}\right). \quad (20)$$

Следует сделать ряд замечаний.

1. Отметим, что поправки к экспоненте подавления, найденные в приближении цепочкой инстантонов, имеют порядок $O(\rho^6/T^6)$, где

$$\frac{\rho^6}{T^6} = \frac{E^2 g^2}{256 \pi^4 v^2 I_E(\theta)}. \quad (21)$$

Так как функция $I_E(\theta)$ ограничена, то $(\rho/T)^6 \sim O(E^2 g^2/v^2)$. Следовательно, использованное приближение действительно справедливо при $E^2 \ll v^2/g^2$. Отметим также, что поправки, связанные с хиггсовским полем, также имеют порядок $(\rho/T)^6$.

2. Несмотря на то что уравнение (19) не поддается аналитическому анализу при конечных $\theta \in [0; +\infty)$, довольно просто найти асимптотику его решения при больших θ (или, что то же самое, малых N). Действуя таким образом, получаем

$$\frac{1}{g^2} F = -\frac{16\pi^2}{g^2} + f \left\{ 3 - 5x \ln x + 5x + \frac{5}{3}x^2 - \frac{35}{27}x^3 + O(x^4) \right\}, \quad (22)$$

где

$$f \equiv \left[\frac{3E^4}{8\pi^2 g^2 v^4} \right]^{1/3}, \quad (23)$$

$$x \equiv \frac{N}{f}. \quad (24)$$

Заметим, что, хотя предел $N \rightarrow 0$ сингулярен, член $N \ln N$ не зависит от энергии (по крайней мере, в первом порядке разложения). Следовательно, “период” $T(E, N)$ является регулярной функцией при $N = 0$:

$$T = \frac{4f}{E} \left\{ 1 + \frac{5}{3}x - \frac{5}{9}x^2 + \frac{70}{81}x^3 + O(x^4) \right\}. \quad (25)$$

Рис. 4. Период T в зависимости от x и его линейная асимптотика при малых x (сплошная линия – численное решение, пунктирная – линейная асимптотика).

Это оправдывает полиномиальную экстраполяцию периода T в область малых N в работах [13]. Период T как функция $x = N/f$ при фиксированной энергии, а также его линейная асимптотика для малых N изображены на рис. 4.

3. В предельных случаях $N = 0$ (двухчастичные столкновения) и $\theta = 0$ (периодический инстантон) ведущие члены порядка $(g^2 E)^{4/3}$ в показателе экспоненты подавления были найдены в работах [4] и [14], соответственно. Из уравнений (20), (22) получаем

$$\begin{aligned} \left. \frac{1}{g^2} F \right|_{\theta=0} &= -\frac{16\pi^2}{g^2} + \frac{3}{2} \left[\frac{\pi^2 E^4}{g^2 v^4} \right]^{1/3} + O\left(\frac{E^2}{v^2}\right), \\ \left. \frac{1}{g^2} F \right|_{N=0} &= -\frac{16\pi^2}{g^2} + 3 \left[\frac{3E^4}{8\pi^2 g^2 v^4} \right]^{1/3} + O\left(\frac{E^2}{v^2}\right). \end{aligned}$$

Эти выражения совпадают с результатами работ [4], [14].

4. T/θ -граничная задача, описанная в разделе 2, может быть решена численно. В работах [12], [13] такой численный анализ был проведен для калибровочной модели с группой $SU(2)$ и хиггсовским дублетом. Можно провести непосредственное сравнение полученных в этих работах численных результатов с приведенным здесь аналитическим результатом. Так как последний применим только при низких энергиях, необходимо проэкстраполировать численные результаты в область $E \rightarrow 0$. Заметим, что в соответствии с уравнениями (19), (20) величина

$$W \equiv \frac{F + 16\pi^2}{fg^2}$$

зависит только от комбинации $x \propto N/E^{4/3}$ (с точностью до поправок $O(g^2 E^2/v^2)$).

На рис. 5 мы изобразили функции $W(x)$, найденные с использованием численных результатов работ [12], [13], для различных значений энергии и наше аналитическое предсказание, которое работает в пределе низких энергий. Видно, что для энергий, близких к энергии сфалерона ($Eg\sqrt{2}/(4\pi v) = 2.4$), численный и аналитический результаты

Рис. 5. Универсальная функция $W(x)$ (сплошная линия), численные результаты (решения T/θ -граничной задачи) для величины $(F + 16\pi^2/g^2)/f$ при различных значениях энергии (пунктирные линии; числа рядом с графиками дают значения безразмерной величины $Eg\sqrt{2}/(4\pi v)$) и результат полиномиальной экстраполяции численных данных ($\odot$ – линейной, $\blacksquare$ – квадратичной) к нулевой энергии $E = 0$. Величины f и x определяются уравнениями (23) и (24): $f \propto E^{4/3}$, $x \propto N/E^{4/3}$.

различаются довольно сильно, в то время как при нулевой энергии экстраполяция численных данных совпадает с аналитическим предсказанием.

Благодарности. Авторы благодарны В. А. Рубакову за многочисленные ценные обсуждения и критику. Данная работа была выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 02-02-17398), Американского фонда гражданских исследований и разработок (CRDF) (грант № RP1-2364-MO-02), гранта SSF 7SUPJ062239 и гранта президента Российской Федерации НШ-2184.2003.2.

Список литературы

- [1] *G. 't Hooft*. Phys. Rev. D. 1976. V. 14. P. 3432; Erratum. 1978. V. 18. P. 2199.
- [2] *A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. S. Shvarts, Y. S. Tyupkin*. Phys. Lett. B. 1975. V. 59. P. 85.
- [3] *A. Ringwald*. Nucl. Phys. B. 1990. V. 330. P. 1; *O. Espinosa*. Nucl. Phys. B. 1990. V. 343. P. 310.
- [4] *S. Y. Khlebnikov, V. A. Rubakov, P. G. Tinyakov*. Nucl. Phys. B. 1991. V. 350. P. 441.

- [5] *A. H. Mueller*. Nucl. Phys. B. 1991. V. 364. P. 109; *V. V. Khoze, A. Ringwald*. Nucl. Phys. B. 1991. V. 355. P. 351; *P. B. Arnold, M. P. Mattis*. Phys. Rev. Lett. 1991. V. 66. P. 13.
- [6] *M. P. Mattis*. Phys. Rep. 1992. V. 214. P. 159; *P. G. Tinyakov*. Int. J. Mod. Phys. A. 1993. V. 8. P. 1823.
- [7] *V. A. Rubakov, D. T. Son, P. G. Tinyakov*. Phys. Lett. B. 1992. V. 287. P. 342.
- [8] *P. G. Tinyakov*. Phys. Lett. B. 1992. V. 284. P. 410; *A. H. Mueller*. Nucl. Phys. B. 1993. V. 401. P. 93.
- [9] *G. F. Bonini, A. G. Cohen, C. Rebbi, V. A. Rubakov*. Phys. Rev. D. 1999. V. 60. P. 076004; hep-ph/9901226.
- [10] *V. I. Zakharov*. Nucl. Phys. B. 1992. V. 371. P. 637; *M. Porrati*. Nucl. Phys. B. 1990. V. 347. P. 371.
- [11] *A. N. Kuznetsov, P. G. Tinyakov*. Mod. Phys. Lett. A. 1996. V. 11. P. 479; hep-ph/9510310; Phys. Lett. B. 1997. V. 406. P. 76; hep-ph/9704242; *F. Bezrukov, D. Levkov*. Transmission through a potential barrier in quantum mechanics of multiple degrees of freedom: complex way to the top. quant-ph/0301022.
- [12] *F. Bezrukov, C. Rebbi, V. Rubakov, P. Tinyakov*. Instanton-like processes in particle collisions: A numerical study of the $SU(2)$ -Higgs theory below the sphaleron energy. In: Proc. XI-th Int. School "Particles and Cosmology", Baksan Valley, Russia, April 18–24, 2001. Eds. E. N. Alexeev, V. A. Matveev, K. S. Nirov, V. A. Rubakov. Moscow: INR, 2003. P. 248; hep-ph/0110109.
- [13] *F. Bezrukov, D. Levkov, C. Rebbi, V. Rubakov, P. Tinyakov*. Phys. Rev. D. 2003. V. 68. P. 036005; hep-ph/0304180; Phys. Lett. B. 2003. V. 574. P. 75; hep-ph/0305300.
- [14] *S. Y. Khlebnikov, V. A. Rubakov, P. G. Tinyakov*. Nucl. Phys. B. 1991. V. 367. P. 334.
- [15] *I. Affleck*. Nucl. Phys. B. 1981. V. 191. P. 429.
- [16] *D. Forster*. Phys. Lett. B. 1977. V. 66. P. 279; *J. Callan, G. Curtis, R. F. Dashen, D. J. Gross*. Phys. Rev. D. 1978. V. 17. P. 2717; *D. Diakonov, V. Y. Petrov*. Nucl. Phys. B. 1984. V. 245. P. 259.

Поступила в редакцию 2.IV.2003 г.