Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Орлов, Гипергеометрические функции, связанные с Q -многочленами Шу-
ра, и уравнение ВКП, *ТМФ*, 2003, том 137, номер 2, 253–270

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf270>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 16:58:44

© 2003 г.

А. Ю. Орлов*

ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ, СВЯЗАННЫЕ С Q -МНОГОЧЛЕНАМИ ШУРА, И УРАВНЕНИЕ ВКП

Вводятся гипергеометрические функции, связанные с проективными функциями Шура Q_λ , и описываются их свойства. Получены линейные уравнения, интегральные представления и представления Пфаффа. Эти гипергеометрические функции являются вакуумными средними свободных фермионных полей и поэтому представляют собой тау-функции так называемой иерархии ВКП интегрируемых уравнений.

Ключевые слова: проективные функции Шура, гипергеометрические функции, теория солитонов.

1. ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ

Иерархия Кадомцева–Петвиашвили типа B (ВКП) была изобретена в работах [1], [2] как некоторое обобщение иерархии КП интегрируемых уравнений [1], [3]. В статье [4] (см. также [5]) объяснена роль проективных функций Шура [6] как рациональных решений иерархии ВКП. В данной работе гипергеометрические функции, связанные с проективными функциями Шура, строятся как некоторые тау-функции однокомпонентной иерархии ВКП. Настоящая работа является продолжением исследований [7], [8]. Заметим, что в работе [9] построена другая иерархия КП, связанная с решеткой корневого типа B ; мы не рассматриваем здесь этот случай.

2. НЕЙТРАЛЬНЫЕ СВОБОДНЫЕ ФЕРМИОНЫ И ИЕРАРХИЯ ВКП

Рассмотрим нейтральные фермионы $\{\phi_n, n \in \mathbb{Z}\}$, удовлетворяющие каноническим антикоммутационным соотношениям

$$[\phi_m, \phi_n]_+ = (-1)^m \delta_{m, -n}, \quad (2.1)$$

где $[a, b]_+ = ab + ba$. В частности, $\phi_0^2 = 1/2$.

Имеются соответствующие правый и левый вакуумные векторы $|0\rangle$ и $\langle 0|$ со свойствами

$$\phi_m |0\rangle = 0, \quad m < 0, \quad \langle 0| \phi_m = 0, \quad m > 0, \quad (2.2)$$

*Институт океанологии РАН, Нахимовский просп. 36, Москва 117851, Россия. E-mail: orlovs@wave.sio.rssi.ru

а также правое и левое пространства Фока, линейно порожденные соответственно правым и левым вакуумными векторами и правыми и левыми векторами

$$\phi_{n_1} \dots \phi_{n_k} |0\rangle, \quad \langle 0 | \phi_{-n_k} \dots \phi_{-n_1}, \quad (2.3)$$

где $k = 1, 2, \dots$ и мы полагаем $n_1 > \dots > n_k \geq 0$. Следуя [1], [2], введем операторы (гамильтонианы), занумерованные нечетными числами $n \in 2\mathbb{Z} + 1$:

$$H_n = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k+1} \phi_k \phi_{-k-n}. \quad (2.4)$$

Можно проверить, что операторы H_n удовлетворяют соотношениям алгебры Гейзенберга

$$[H_n, H_m] = \frac{n}{2} \delta_{m+n, 0}, \quad (2.5)$$

где $[a, b] := ab - ba$ — коммутатор.

Используя (2.1), получаем

$$[H_n, \phi_m] = \phi_{m-n}. \quad (2.6)$$

Отметим также, что

$$H_n |0\rangle = H_n \phi_0 |0\rangle = 0, \quad \langle 0 | H_{-n} = \langle 0 | \phi_0 H_{-n} = 0, \quad n > 0. \quad (2.7)$$

Для пары наборов независимых переменных (так называемых высших времен иерархии ВКП, номера которых мы всегда выбираем нечетными)

$$\mathbf{t} = (t_1, t_3, t_5, \dots), \quad \mathbf{t}^* = (t_1^*, t_3^*, t_5^*, \dots) \quad (2.8)$$

положим

$$H(\mathbf{t}) = \sum_{n=1,3,\dots}^{+\infty} t_n H_n, \quad H^*(\mathbf{t}^*) = \sum_{n=1,3,\dots}^{+\infty} t_n^* H_{-n}. \quad (2.9)$$

Удобно ввести фермионное поле

$$\phi(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} z^k \phi_k, \quad (2.10)$$

которое зависит от комплексного параметра z . Для фермионных полей (2.10) антикоммутационное соотношение (2.1) принимает вид

$$[\phi(z), \phi(z')]_+ = \delta(-z, z') = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{-z}{z'} \right)^n, \quad (2.11)$$

где символ δ обозначает δ -функцию Дирака на единичной окружности с определяющим свойством

$$\frac{1}{2\pi i} \oint f(z) \delta\left(\frac{-z}{z'}\right) \frac{dz}{z} = f(-z').$$

Соотношение (2.5) приводит к

$$[H_n, \phi(z)] = z^n \phi(z), \quad (2.12)$$

что, в свою очередь, дает

$$e^{H(\mathbf{t})} \phi(z) e^{-H(\mathbf{t})} = \phi(z) e^{\xi(\mathbf{t}, z)}, \quad \xi(\mathbf{t}, z) = \sum_{n=1,3,\dots} z^n t_n. \quad (2.13)$$

Формулы

$$\begin{aligned} \langle 0 | \phi(z) e^{H(\mathbf{t})} &= \langle 0 | \phi_0 e^{H(\mathbf{t} - \epsilon(z^{-1}))}, \\ \sqrt{2} \langle 0 | \phi_0 \phi(z) e^{H(\mathbf{t})} &= \langle 0 | e^{H(\mathbf{t} - \epsilon(z^{-1}))}, \end{aligned}$$

где

$$\epsilon(z^{-1}) = \left(\frac{2}{z}, \frac{2}{3z^3}, \frac{2}{5z^5}, \dots \right),$$

называются формулами бозонизации [2], [4]. Более того, при заданном $N > 1$ получаем соотношения бозонизации

$$\langle 0 | e^{H(\mathbf{t}(\mathbf{x}^N))} = \begin{cases} 2^{N/2} \frac{\langle 0 | \phi(1/x_N) \dots \phi(1/x_1)}{\Delta(\mathbf{x}^N)}, & N \text{ четное,} \\ 2^{(N+1)/2} \frac{\langle 0 | \phi_0 \phi(1/x_N) \dots \phi(1/x_1)}{\Delta(\mathbf{x}^N)}, & N \text{ нечетное,} \end{cases} \quad (2.14)$$

где

$$\Delta(\mathbf{x}^N) = \frac{\prod_{i < j}^N (1 - x_j x_i^{-1})}{\prod_{i < j}^N (1 + x_j x_i^{-1})} = \frac{\prod_{i < j}^N (x_i - x_j)}{\prod_{i < j}^N (x_i + x_j)}. \quad (2.15)$$

Типичным примером тау-функции иерархии ВКП является функция

$$\tau(\mathbf{t}) = \langle 0 | e^{H(\mathbf{t})} g | 0 \rangle, \quad g = \prod_{k=1}^{2K} \Phi_k \exp \left(\sum_{n,m} b_{n,m} : \phi_n \phi_{-m} : \right), \quad (2.16)$$

где каждое Φ_k является линейной комбинацией нейтральных фермионов ϕ_k и существует такое N , что $b_{n,m} = 0$ при $|n - m| > N$. Символ $: \dots :$ обозначает нормальное упорядочение, т.е. $: \phi_n \phi_{-m} : = \phi_n \phi_{-m} - \langle 0 | \phi_n \phi_{-m} | 0 \rangle$. Числа b_n , которые мы рассматриваем, удовлетворяют равенствам $b_{n,m} + b_{-m,-n} = 0$.

Напомним определения [6], которые потребуются нам в дальнейшем. Набор невозрастающих положительных чисел $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k \geq 0$ называется *разбиением* числа $n = |\lambda| = n_1 + \dots + n_k$ и обозначается как $\lambda = (n_1, n_2, \dots, n_k)$. Если $n_k > 0$, то k называется *длиной разбиения* λ и обозначается как $\ell(\lambda)$. Число $|\lambda|$ называется *весом разбиения* λ . Числа $n_1, n_2, \dots$ называются *частями разбиения* λ . Разбиение нуля (т.е. $n_1 = 0$) обозначается как $\lambda = 0$. Множество всех разбиений обычно обозначается как P .

Диаграмму разбиения λ (или диаграмму Юнга λ) можно определить как множество точек (узлов) $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$ таких, что $1 \leq j \leq n_i$. Сопряженное разбиение λ' , диаграмма которого является транспонированной по отношению к диаграмме λ , т.е. получена отражением относительно главной диагонали.

Имеется и иная система обозначений для разбиений (обозначения Фробениуса). Мы предполагаем, что главная диагональ диаграммы λ состоит из r узлов (i, i) , $1 \leq i \leq r$. Пусть $\alpha_i = n_i - i$, $1 \leq i \leq r$, — число узлов в i -й строке диаграммы λ справа от (i, i) и $\beta_i = n'_i - i$ — число узлов в i -м столбце диаграммы λ ниже (i, i) . Имеем $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_r \geq 0$ и $\beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_r \geq 0$. Запишем тогда разбиение $\lambda = (n_1, n_2, \dots, n_k)$ как

$$\lambda = (\alpha_1, \dots, \alpha_r | \beta_1, \dots, \beta_r) = (\alpha | \beta).$$

При заданном множестве переменных $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3, \dots)$ и заданном разбиении $\lambda = (n_1, \dots, n_k)$, $n_k > 0$, соответствующая *функция Шура* определяется как

$$s_\lambda(\mathbf{t}) = \det h_{n_i - i + j}(\mathbf{t})|_{i,j=1,\dots,k}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} z^k h_k(\mathbf{t}) := \exp \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} z^m t_m \right\}. \quad (2.17)$$

Ниже нам потребуются только те множества переменных $\mathbf{t}$, для которых все переменные с четными номерами обращаются в нуль: $\mathbf{t} = (t_1, 0, t_3, 0, t_5, \dots)$. Имея это в виду, запишем $\mathbf{t} = (t_1, t_3, t_5, \dots)$, как в (2.8). (Ниже мы будем использовать проективные функции Шура, которые определяются как многочлены по переменным $\mathbf{t} = (t_1, t_3, t_5, \dots)$.)

Набор строго убывающих положительных чисел $\lambda = n_1 > n_2 > \dots > n_k \geq 0$ называется *разбиением с несовпадающими частями* или *строгим разбиением*. Множество всех строгих разбиений обозначается как DP .

Мы видим, что векторы (2.3) занумерованы строгими разбиениями. Нулевое разбиение $\lambda = 0$ связано с вакуумными векторами $\langle 0 |$ и $| 0 \rangle$.

Если $\lambda = (n_1, n_2, \dots, n_k) \in DP$ и $n_k \neq 0$, то получаем так называемый дубль λ , который является разбиением $\tilde{\lambda} = (n_1, \dots, n_k | n_1 - 1, \dots, n_k - 1) \in P$ в обозначениях Фробениуса.

ЛЕММА 1 [4]. Пусть $n_1 > n_2 > \dots > n_k \geq 0$, где k четное. Если $n_k = 0$, полагаем $\lambda = (n_1, n_2, \dots, n_{k-1})$, а если $n_k > 0$, полагаем $\lambda = (n_1, n_2, \dots, n_k)$. Тогда

$$\langle 0 | e^{H(\mathbf{t})} \phi_{n_1} \dots \phi_{n_k} | 0 \rangle = 2^{-k/2} Q_\lambda \left(\frac{\mathbf{t}}{2} \right),$$

где $Q_\lambda(\mathbf{t}/2)$ — многочлен по переменным $t_1, t_3, t_5, \dots$, который называется проективной функцией Шура и может быть представлен через обычную функцию Шура s_λ как

$$2^{-k/2} Q_\lambda \left(\frac{\mathbf{t}}{2} \right) = \sqrt{s_{\tilde{\lambda}}(\mathbf{t})}. \quad (2.18)$$

Здесь $s_{\tilde{\lambda}}(\mathbf{t})$ – функция Шура, а разбиение $\tilde{\lambda} \in P$ является дублем строгого разбиения λ . Заметим, что $Q_{\lambda}(\mathbf{t}/2) = Q_{\lambda}(t_1/2, t_3/2, t_5/2, \dots)$, тогда как $s_{\tilde{\lambda}}(\mathbf{t}) = s_{\tilde{\lambda}}(t_1, 0, t_3, 0, t_5, 0, \dots)$.

Для набора чисел $x_1, \dots, x_N$ мы будем использовать обозначение $\mathbf{x}^N = (x_1, \dots, x_N)$. Мы также будем использовать специальный выбор времен $\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{x}^N)$, $\mathbf{t}^* = \mathbf{t}^*(\mathbf{y}^{N^*})$:

$$mt_m = \sum_{k=1}^N (x_k^m - (-x_k)^m), \quad mt_m^* = \sum_{k=1}^{N^*} (y_k^m - (-y_k)^m). \quad (2.19)$$

Везде, где это не приводит к недоразумениям, мы будем опускать верхние индексы N и N^* и будем рассматривать главным образом случай $N^* = N$.

При записи $Q_{\lambda}(x)$ в виде функции переменных x она принимает вид хорошо известной симметрической функции, которая была изобретена Шуром в конструкции проективных представлений симметрических групп [10].

Нам также понадобится так называемое произведение длин крюков сдвинутой диаграммы [6], которое обобщает понятие факториала на строгие разбиения; будем записывать его как $H_{\tilde{\lambda}}^*$:

$$H_{\tilde{\lambda}}^* = \left(\prod_{i=1}^k n_i! \right) \prod_{i < j} \frac{n_i + n_j}{n_i - n_j} = 2^{-k/2} \sqrt{H_{\tilde{\lambda}}}, \quad (2.20)$$

$$\frac{1}{\sqrt{H_{\tilde{\lambda}}}} = \sqrt{s_{\tilde{\lambda}}(\mathbf{t}_{\infty})} = 2^{-k/2} Q_{\lambda}\left(\frac{\mathbf{t}_{\infty}}{2}\right),$$

где $\mathbf{t}_{\infty}/2 = (1/2, 0, 0, 0, \dots)$, n_i – части разбиения λ , а $H_{\tilde{\lambda}}$ – произведение длин крюков диаграммы [6] для дубля разбиения λ . Самое последнее равенство в (2.20) следует из (2.18); другие равенства в (2.20) взяты из [6]. Величина $|\lambda|! Q_{\lambda}(\mathbf{t}_{\infty}/2)$ имеет комбинаторный смысл: она считает число сдвинутых стандартных диаграмм заданной формы (см. [6]).

3. ТАУ-ФУНКЦИЯ ИЕРАРХИИ ВКП ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ТИПА И ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СИММЕТРИИ

Рассмотрим множество коммутирующих фермионных операторов

$$B_k = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \phi_n \phi_{k-n} r(n) r(n-1) \dots r(n-k+1), \quad k = 1, 3, \dots \quad (3.1)$$

Эти операторы определяются функцией r , удовлетворяющей соотношениям

$$r(n) = r(1-n). \quad (3.2)$$

Поэтому достаточно определить r только для положительных n .

Покажем, что $[B_m, B_k] = 0$ для всех m, k . Легко проверить, что

$$\langle 0 | B_k = 0. \quad (3.3)$$

Заметим, что операторы B_n можно переписать в виде

$$B_k = -\frac{1}{4\pi\sqrt{-1}} \oint \frac{dz}{z} \phi(-z) \left(\frac{1}{z} r(D) \right)^k \phi(z), \quad D := z \frac{d}{dz},$$

где оператор $r(D)$ действует на все функции от z справа согласно правилу $r(D) \cdot z^k = r(k)z^k$.

Для набора независимых переменных $\mathbf{t}^* = (t_1^*, t_3^*, \dots)$ определим функцию

$$B(\mathbf{t}^*) = \sum_{n=1,3,\dots} t_n^* B_n. \quad (3.4)$$

Для разбиения $\lambda = (n_1, \dots, n_k)$ и для функции одной переменной r введем обозначение

$$r_\lambda = \prod_{i=1}^k r(1)r(2) \dots r(n_i). \quad (3.5)$$

Положим $r_0(M) = 1$. Имеем следующую лемму.

ЛЕММА 2. *При выполнении условий леммы 1 имеет место формула*

$$\langle 0 | \phi_{-n_k} \dots \phi_{-n_1} e^{-B(\mathbf{t}^*)} | 0 \rangle = 2^{-k/2} r_\lambda Q_\lambda \left(\frac{\mathbf{t}^*}{2} \right).$$

Рассмотрим теперь тау-функцию (см. (2.16)) иерархии ВКП

$$\tau_r(\mathbf{t}, \mathbf{t}^*) := \langle 0 | e^{H(\mathbf{t})} e^{-B(\mathbf{t}^*)} | 0 \rangle. \quad (3.6)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Здесь операторы B_k порождают потоки симметрии иерархии ВКП (подобно *дополнительным симметриям КП* [11]). Симметрии действуют на вакуумное решение, а параметры t_k^* играют роль групповых времен.

Разлагая $e^H = 1 + H + \dots$ в ряд Тейлора и используя лемму 2, легко получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Имеется разложение*

$$\tau_r(\mathbf{t}, \mathbf{t}^*) = 1 + \sum_{\lambda \in DP} 2^{-\ell(\lambda)} r_\lambda Q_\lambda \left(\frac{\mathbf{t}}{2} \right) Q_\lambda \left(\frac{\mathbf{t}^*}{2} \right), \quad (3.7)$$

где суммирование ведется по всем ненулевым строгим разбиениям (разбиения с несовпадающими частями DP), а $\ell(\lambda)$ — длина разбиения λ .

Очевидно, получаем

$$\tau_r(\mathbf{t}, \mathbf{t}^*) = \tau_r(\mathbf{t}^*, \mathbf{t}). \quad (3.8)$$

Более того, при $a \in \mathbb{C}$ тау-функция $\tau_r(\mathbf{t}, \mathbf{t}^*)$ инвариантна относительно преобразований $t_m \rightarrow a^m t_m$, $t_m^* \rightarrow a^{-m} t_m^*$, $m = 1, 3, \dots$, и $t_m \rightarrow a^m t_m$, $m = 1, 3, \dots$, $r(n) \rightarrow a^{-1} r(n)$.

Для $\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{x}^N)$ и $\mathbf{t}^* = \mathbf{t}^*(\mathbf{y}^{N^*})$ (см. (2.19)) сумма (3.7) ограничена суммой по разбиениям длины $\ell(\lambda) \leq \min(N, N^*)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Недавно [12] был доказан некоторый аналог теоремы Гесселя, относящийся к сумме (3.7) с очень специальным выбором r : $r(n) = 1, n < M$ и $r(n) = 0, n \geq M$. (Этот случай описывает некоторые рациональные решения иерархии ВКП.)

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если существует такая функция $\rho(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, что

$$r(n) = \rho(-n)\rho(n-1), \quad (3.9)$$

т.е. выполнено условие (3.2), то легко проверить, что

$$r_\lambda = \rho_{\tilde{\lambda}}^{\text{КП}}(0), \quad (3.10)$$

где $\rho_{\tilde{\lambda}}^{\text{КП}}(k)$ — функция, использовавшаяся при построении гипергеометрических функций, связанных с функциями Шура в рамках теории КП [8]. Она имеет вид

$$\rho_{\tilde{\lambda}}^{\text{КП}}(k) := \prod_{i,j \in \tilde{\lambda}} \rho(k+j-i), \quad (3.11)$$

где произведение берется по всем узлам диаграммы Юнга $\tilde{\lambda}$, а разбиение $\tilde{\lambda}$ является дублем строгого разбиения $\lambda \in DP$. В этом случае

$$\begin{aligned} \langle 0 | \phi_{-n_k} \dots \phi_{-n_1} e^{-B(\mathbf{t}^*)} | 0 \rangle &= 2^{-k/2} r_\lambda Q_\lambda \left(\frac{\mathbf{t}^*}{2} \right) = \rho_{\tilde{\lambda}}^{\text{КП}}(0) \sqrt{s_{\tilde{\lambda}}(\mathbf{t}^*)}, \\ \tau_r(\mathbf{t}, \mathbf{t}^*) &= 1 + \sum_{\lambda \in DP} 2^{-\ell(\lambda)} r_\lambda Q_\lambda \left(\frac{\mathbf{t}}{2} \right) Q_\lambda \left(\frac{\mathbf{t}^*}{2} \right) = \\ &= 1 + \sum_{\lambda \in DP} \rho_{\tilde{\lambda}}^{\text{КП}}(0) \sqrt{s_{\tilde{\lambda}}(\mathbf{t}) s_{\tilde{\lambda}}(\mathbf{t}^*)}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

где сумма берется по всем ненулевым строгим разбиениям (разбиения с несовпадающими частями DP), $r(n) = \rho(-n)\rho(n-1)$, разбиение $\tilde{\lambda} \in P$ является дублем строгого разбиения $\lambda \in DP$, $\rho_{\tilde{\lambda}}^{\text{КП}}(0)$ имеет вид (3.11), r_λ имеет вид (3.5), а $\ell(\lambda)$ является длиной разбиения λ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Рассмотрим тау-функцию иерархии КП гипергеометрического типа $\tau_r(n, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*)$ [7], [8], которая в данной работе обозначается как $\tau_r^{\text{КП}}(n, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*)$, а обозначение $\tau_r(\mathbf{t}, \mathbf{t}^*)$ соответствует тау-функции иерархии ВКП (3.6). При $r(n) = r(1-n)$ имеем

$$\tau_r^{\text{КП}}(0, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*) = \tau_r^2(\mathbf{t}, \mathbf{t}^*), \quad (3.13)$$

или

$$\left(1 + \sum_{\lambda \in DP} 2^{-\ell(\lambda)} r_\lambda Q_\lambda \left(\frac{\mathbf{t}}{2} \right) Q_\lambda \left(\frac{\mathbf{t}^*}{2} \right) \right)^2 = 1 + \sum_{\lambda \in P} r_\lambda^{\text{КП}}(0) s_\lambda(\mathbf{t}) s_\lambda(\mathbf{t}^*), \quad (3.14)$$

где r_λ и $r_\lambda^{\text{КП}}(0)$ имеют вид (3.5) и (3.11), соответственно. Сумма в левой части берется по всем ненулевым разбиениям с несовпадающими частями, а сумма в правой части берется по всем ненулевым разбиениям.

Рассмотрим дополнительное множество коммутирующих операторов $\tilde{B}_k$:

$$\begin{aligned}\tilde{B}_k &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n+1} \phi_n \phi_{-k-n} \tilde{r}(n+1) \tilde{r}(n+2) \dots \tilde{r}(n+k), \quad k = 1, 3, \dots, \\ \tilde{B}(\mathbf{t}^*) &= \sum_{k=1,3,\dots} \tilde{B}_k t_k^*.\end{aligned}\tag{3.15}$$

Эти операторы можно переписать в виде

$$\tilde{B}_n = -\frac{1}{4\pi\sqrt{-1}} \oint \frac{dz}{z} \phi(-z) (\tilde{r}(D)z)^n \phi(z), \quad D := z \frac{d}{dz},$$

где оператор $r(D)$ действует справа на все функции от z .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Имеем*

$$\langle 0 | e^{\tilde{B}(\mathbf{t})} e^{-B(\mathbf{t}^*)} | 0 \rangle = \sum_{\lambda \in DP} (\tilde{r}r)_\lambda 2^{-\ell(\lambda)} Q_\lambda \left(\frac{\mathbf{t}}{2} \right) Q_\lambda \left(\frac{\mathbf{t}^*}{2} \right).\tag{3.16}$$

Взяв $\tilde{r}r = 1$, получаем полезное соотношение

$$\exp \left(\sum_{n=1,3,\dots} \frac{1}{2} n t_n t_n^* \right) = \sum_{\lambda \in DP} 2^{-\ell(\lambda)} Q_\lambda \left(\frac{\mathbf{t}}{2} \right) Q_\lambda \left(\frac{\mathbf{t}^*}{2} \right),\tag{3.17}$$

где левая часть – результат вычисления вакуумного среднего $\langle 0 | e^{H(\mathbf{t})} e^{H(\mathbf{t}^*)} | 0 \rangle$ с использованием (2.5) и (2.7). Формула (3.17) дает так называемую вакуумную тау-функцию и используется в данной статье независимо от смысла символов t_k и t_k^* .

Формулы (2.1), (2.10) и (3.1) приводят к выражению

$$[B_n, \phi(z)] = - \left(\frac{1}{z} r(D) \right)^n \cdot \phi(z).\tag{3.18}$$

Разлагая экспоненты в ряды Тейлора, получаем

$$e^{B(\mathbf{t}^*)} \phi(z) e^{-B(\mathbf{t}^*)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi_n w(n, z) = e^{-\xi_r(\mathbf{t}^*, z^{-1})} \cdot \phi(z),\tag{3.19}$$

где операторы

$$\xi_r(\mathbf{t}^*, z^{-1}) = \sum_{m=1,3,\dots} t_m \left(\frac{1}{z} r(D) \right)^m, \quad D := z \frac{d}{dz},\tag{3.20}$$

действуют справа на все функции от z и

$$w(n, z) = z^n \sum_{m=0}^{\infty} z^{-m} h_m(-\mathbf{t}^*) r(n) \dots r(n-m) = e^{-\xi_r(\mathbf{t}^*, z^{-1})} \cdot z^n.$$

Формула (3.19) представляет собой обобщение соотношения (2.13). В (3.19) ξ_r являются операторами, действующими на переменную z в $\phi(z)$.

4. $H_0(T)$, ФЕРМИОНЫ $\phi(T, z)$ И ПРАВИЛА БОЗОНИЗАЦИИ

Введем множество переменных $T = \{T_n, n \in \mathbb{Z}; T_n = -T_{-n}\}$. Положим $:\phi_m \phi_n: = \phi_m \phi_n - \langle 0 | \phi_m \phi_n | 0 \rangle$. Рассмотрим операторы

$$H_0(T) = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^{n+1} T_n : \phi_n \phi_{-n} : = \sum_{n > 0} (-1)^{n+1} T_n \phi_n \phi_{-n}. \quad (4.1)$$

Замечая, что $e^{(-1)^{n+1} T_n \phi_n \phi_{-n}} = 1 + (-1)^n \phi_n \phi_{-n} (e^{-T_n} - 1)$, получаем

$$e^{H_0(T)} \phi_n e^{-H_0(T)} = e^{-T_n} \phi_n.$$

При $r \neq 0$ положим

$$r(n) = e^{T_{n-1} - T_n}. \quad (4.2)$$

Видим, что $r(n) = r(1 - n)$. Тогда

$$e^{-H_0(T)} B(\mathbf{t}^*) e^{H_0(T)} = -H^*(\mathbf{t}^*). \quad (4.3)$$

Пусть $r \neq 0$. Удобно рассматривать фермионные операторы

$$\phi(T, z) := e^{H_0(T)} \phi(z) e^{-H_0(T)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-T_n} z^n \phi_n. \quad (4.4)$$

При заданном N используем (2.19) для вывода следующих правил бозонизации аналогично [1]:

$$e^{-B(\mathbf{t}^*(\mathbf{y}^N))} |0\rangle = \begin{cases} 2^{N/2} \frac{\phi(T, -y_1) \dots \phi(T, -y_N) |0\rangle}{\Delta(\mathbf{y}^N)}, & N \text{ четное,} \\ 2^{(N+1)/2} \frac{\phi(T, -y_1) \dots \phi(T, -y_N) \phi_0 |0\rangle}{\Delta(\mathbf{y}^N)}, & N \text{ нечетное,} \end{cases} \quad (4.5)$$

где $\Delta(\mathbf{x}^N)$ имеет вид (2.15), и положим $\Delta(\mathbf{x}^N) = 1$ при $N = 1$. Тогда, используя (2.14), можно записать формулы бозонизации в переменных x и y (см. (2.19)) как

$$\begin{aligned} \tau_r(\mathbf{t}(\mathbf{x}^N), \mathbf{t}^*(\mathbf{y}^{N*})) &= \langle 0 | e^{H(\mathbf{t}(\mathbf{x}^N))} e^{-B(\mathbf{t}^*(\mathbf{y}^{N*}))} | 0 \rangle = \\ &= \begin{cases} 2^{(N+N^*)/2} \frac{\langle 0 | \phi(1/x_N) \dots \phi(1/x_1) \phi(T, -y_1) \dots \phi(T, -y_{N*}) | 0 \rangle}{\Delta(\mathbf{x}^N) \Delta(\mathbf{y}^{N*})}, & N + N^* \text{ четное;} \\ 2^{(N+N^*+1)/2} \frac{\langle 0 | \phi_0 \phi(1/x_N) \dots \phi(1/x_1) \phi(T, -y_1) \dots \phi(T, -y_{N*}) | 0 \rangle}{\Delta(\mathbf{x}^N) \Delta(\mathbf{y}^{N*})}, & N + N^* \text{ нечетное.} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.6)$$

В силу (2.1) и (2.2) имеем

$$\Delta(\mathbf{x}^N) = \begin{cases} 2^{N/2} \langle 0 | \phi\left(\frac{1}{x_N}\right) \dots \phi\left(\frac{1}{x_1}\right) | 0 \rangle, & N \text{ четное,} \\ 2^{(N+1)/2} \langle 0 | \phi_0 \phi\left(\frac{1}{x_N}\right) \dots \phi\left(\frac{1}{x_1}\right) | 0 \rangle, & N \text{ нечетное,} \end{cases} \quad (4.7)$$

где полагаем

$$\Delta(\mathbf{x}^N) = \Delta = \prod_{i < j}^N \frac{1 - x_j x_i^{-1}}{1 + x_j x_i^{-1}}, \quad (4.8)$$

$$\frac{1 - x_j x_i^{-1}}{1 + x_j x_i^{-1}} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{x_j}{x_i}\right)^n.$$

Наконец, рассмотрим другое выражение для тау-функции гипергеометрического типа, получаемое из (4.3). Для ненулевого r имеем

$$\begin{aligned} \tau_r(\mathbf{t}, \mathbf{t}^*) &= \langle 0 | e^{H(\mathbf{t})} \exp\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n+1} T_n : \phi_n \phi_{-n} : \right) e^{H^*(\mathbf{t}^*)} | 0 \rangle = \\ &= 1 + \sum_{\lambda \in DP} 2^{-\ell(\lambda)} e^{-T_{n_1} - T_{n_2} - \dots - T_{n_l}} Q_{\lambda}\left(\frac{\mathbf{t}}{2}\right) Q_{\lambda}\left(\frac{\mathbf{t}^*}{2}\right). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Сумма берется по всем различным строгим разбиениям $\lambda = (n_1, n_2, \dots, n_l)$, $l = 1, 2, 3, \dots$, за исключением разбиения нуля. Тау-функция (4.9) линейна по каждому e^{T_n} . По отношению к ВКП-динамике времена T_n имеют смысл интегралов движения.

5. ВЫРАЖЕНИЯ И ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ТАУ-ФУНКЦИЙ $\tau_r(\mathbf{t}(\mathbf{x}^N), \mathbf{t}^*)$ И $\tau_r(\mathbf{t}(\mathbf{x}^N), \mathbf{t}^*(\mathbf{y}^{N*}))$

Хорошо известно, что тау-функции дают решения билинейных уравнений Хироты [1], [2]. В данном разделе мы выпишем линейные уравнения, которые следуют из формул бозонизации (4.6). Эти уравнения можно рассматривать как связи на полном множестве тау-функций иерархии ВКП, или как определенный вид так называемых струнных уравнений.

Сначала рассмотрим тау-функцию (3.7) как функцию переменных $\mathbf{t}(\mathbf{x})$ (см. (2.19)) и $\mathbf{t}^* = (t_1, t_3, \dots)$. Пусть $r'(n) := r(-n)$. Из (3.20) имеем

$$\xi_{r'}(\mathbf{t}^*, x_i) = \sum_{m=1,3,\dots} t_m (x_i r(D_i))^m, \quad D_i := x_i \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (5.1)$$

Заметим, что $[\xi_{r'}(\mathbf{t}^*, x_n), \xi_{r'}(\mathbf{t}^*, x_m)] = 0$ для всех n, m . Ниже $e^{\xi_{r'}(\mathbf{t}^*, x_k)}$ означает ряд Тейлора $1 + \xi_{r'}(\mathbf{t}^*, x_k) + \dots$.

Используя (3.3), (3.19), (4.5) и (4.7) в случае $\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{x}^N)$, имеем представление

$$\tau_r(\mathbf{t}(\mathbf{x}^N), \mathbf{t}^*) = \Delta^{-1} e^{\xi_{r'}(\mathbf{t}^*, x_1)} \dots e^{\xi_{r'}(\mathbf{t}^*, x_N)} \cdot \Delta, \quad (5.2)$$

где каждый сомножитель в произведении с Δ является бесконечным рядом (4.8). Поэтому действие псевдодифференциальных операторов $r(D_k)$, $D_k = x_k \partial / \partial x_k$, хорошо определено на Δ через действие на каждый моном $\prod_i x_i^{n_i}$, которое имеет вид

$$r(D_k) \prod_i x_i^{n_i} = r(n_k) \prod_i x_i^{n_i}. \quad (5.3)$$

При $N = 1$ выражение (5.2) принимает простой вид:

$$\tau_r(\mathbf{t}(x), \mathbf{t}^*) = 1 + r(1)x h_1(\mathbf{t}^*) + r(1)r(2)x^2 h_2(\mathbf{t}^*) + \dots \quad (5.4)$$

Из (5.2) следует, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_m^*} - \sum_{i=1}^N (x_i r(-D_{x_i}))^m \right) (\Delta \tau_r(\mathbf{t}(\mathbf{x}^N), \mathbf{t}^*)) = 0. \quad (5.5)$$

Рассмотрим теперь случай $\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{x}^N)$, $\mathbf{t}^* = \mathbf{t}^*(\mathbf{y}^{N*})$ (см. (2.19)). Получаем

$$\begin{aligned} \tau_r(\mathbf{t}(\mathbf{x}^N), \mathbf{t}^*(\mathbf{y}^{N*})) &= \sum_{\lambda \in DP} r_\lambda 2^{-\ell(\lambda)} Q_\lambda(\mathbf{x}^N) Q_\lambda(\mathbf{y}^{N*}) = \\ &= \frac{1}{\Delta(\mathbf{x}^N)} \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^{N^*} (1 + y_j x_i r(D_{x_i})) (1 - y_j x_i r(D_{x_i}))^{-1} \Delta(\mathbf{x}^N) = \\ &= \frac{1}{\Delta(\mathbf{y}^{N*})} \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^{N^*} (1 + x_i y_j r(D_{y_j})) (1 - x_i y_j r(D_{y_j}))^{-1} \Delta(\mathbf{y}^{N*}), \end{aligned} \quad (5.6)$$

где $(1 - y_j x_i r(D_{x_i}))^{-1}$ и $(1 - x_i y_j r(D_{y_j}))^{-1}$ являются соответствующими формальными рядами $1 + y_j x_i r(D_{x_i}) + \dots$ и $1 + x_i y_j r(D_{y_j}) + \dots$.

Глядя на (5.6), выводим систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} \left(D_{y_j} - 2 \sum_{i=1}^N \frac{y_j x_i r(D_{x_i})}{1 - (y_j x_i r(D_{x_i}))^2} \right) (\Delta(\mathbf{x}^N) \tau_r(\mathbf{t}(\mathbf{x}^N), \mathbf{t}^*(\mathbf{y}^{N*}))) &= 0, \quad j = 1, \dots, N^*, \\ \left(D_{x_i} - 2 \sum_{j=1}^{N^*} \frac{x_i y_j r(D_{y_j})}{1 - (x_i y_j r(D_{y_j}))^2} \right) (\Delta(\mathbf{y}^{N*}) \tau_r(\mathbf{t}(\mathbf{x}^N), \mathbf{t}^*(\mathbf{y}^{N*}))) &= 0, \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (5.7)$$

где $(1 - (y_j x_i r(D_{x_i}))^2)^{-1}$ и $(1 - (x_i y_j r(D_{y_j}))^2)^{-1}$ являются формальными рядами $1 + (y_j x_i r(D_{x_i}))^2 + \dots$ и $1 + (x_i y_j r(D_{y_j}))^2 + \dots$, соответственно.

Для тау-функции, записанной в переменных $\mathbf{x}^N$ и $\mathbf{y}^{N*}$ (см. (2.19)), имеем также

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^N D_{x_i} \Delta \tau(\mathbf{t}(\mathbf{x}^N), T, \mathbf{t}^*(\mathbf{y}^{N*})) &= \\ &= \frac{1}{\Delta^*} \sum_{i=1}^{N^*} \left(\frac{1}{y_i} D_{y_i} y_i \right) \Delta^* \tau(\mathbf{t}(\mathbf{x}^N), T, \mathbf{t}^*(\mathbf{y}^{N*})), \end{aligned} \quad (5.8)$$

где $\Delta = \Delta(\mathbf{x}^N)$ и $\Delta^* = \Delta(\mathbf{y}^{N*})$. Эту формулу можно получить подстановкой фермионного оператора $\text{res}_z : \phi(-z)z(d/dz)\phi(z)$ в вакуумное среднее (4.9) (как это делалось в [13]). Эти формулы можно также записать в терминах высших времен ВКП, используя действие вершинных операторов (см. раздел 10). Тогда соотношение (5.5) будет инфинитезимальной версией (10.2), а соотношение (5.8) – инфинитезимальной версией (10.3) (см. ниже).

6. ВАКУУМНОЕ СРЕДНЕЕ КАК СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ. РАССМОТРЕНИЕ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ТЕОРИИ СИММЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В теории симметрических функций хорошо известно, что существует скалярное произведение, относительно которого проективные функции Шура являются ортогональными:

$$\langle Q_\mu, Q_\lambda \rangle = 2^{\ell(\lambda)} \delta_{\mu, \lambda} \quad (6.1)$$

(см. гл. 3 в [6]). Заметим, что проективные функции Шура образуют базис (подробнее см. [6]).

Следующую реализацию этого скалярного произведения можно получить, если функции Q_λ записать как функции переменных $\mathbf{t} = (t_1, t_3, \dots)$ (в дальнейшем иногда будет удобно использовать обозначение γ вместо t). Для функций $Q_\lambda(\gamma/2)$ (более того, для любых функций $f = f(\gamma/2)$ и $g = g(\gamma/2)$) имеем реализацию скалярного произведения

$$\langle Q_\mu, Q_\lambda \rangle = \left(Q_\mu \left(\frac{\tilde{\partial}}{2} \right) \cdot Q_\lambda \left(\frac{\gamma}{2} \right) \right) \Big|_{\gamma=0}, \quad \langle f, g \rangle = \left(f \left(\frac{\tilde{\partial}}{2} \right) \cdot g \left(\frac{\gamma}{2} \right) \right) \Big|_{\gamma=0}, \quad (6.2)$$

где

$$\frac{\gamma}{2} = \left(\frac{\gamma_1}{2}, \frac{\gamma_3}{2}, \frac{\gamma_5}{2}, \dots \right), \quad \frac{\tilde{\partial}}{2} = \left(\partial_{\gamma_1}, \frac{1}{3} \partial_{\gamma_3}, \dots, \frac{1}{2n-1} \partial_{\gamma_{2n-1}}, \dots \right). \quad (6.3)$$

В частности, имеем $\langle \gamma_n, \gamma_m \rangle = \langle 2(\gamma_n/2), 2(\gamma_m/2) \rangle = 2\delta_{n,m}/n$.

Деформируем соотношение (6.1) как

$$\langle Q_\mu, Q_\lambda \rangle_r = 2^{\ell(\lambda)} r_\lambda \delta_{\mu, \lambda}. \quad (6.4)$$

Из (3.17) и (6.4) находим, что τ_r в выражении (3.7) является скалярным произведением функций переменных γ :

$$\tau_r(\mathbf{t}, \mathbf{t}^*) = \left\langle \exp \left(\sum_{m=1,3,\dots} \frac{1}{2} m t_m \gamma_m \right), \exp \left(\sum_{m=1,3,\dots} \frac{1}{2} m t_m^* \gamma_m \right) \right\rangle_r. \quad (6.5)$$

Заметим, что переменные $\mathbf{t}, \mathbf{t}^*$ здесь играют роль параметров.

Покажем теперь, что скалярное произведение (6.2) равно приведенному ниже (см. (6.6)) вакуумному среднему.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Для функций $f = f(\gamma/2)$ и $g = g(\gamma/2)$ имеем

$$\langle f, g \rangle = \left\langle 0 \left| f\left(\frac{\mathbf{H}}{2}\right) g\left(\frac{\mathbf{H}^*}{2}\right) \right| 0 \right\rangle, \quad (6.6)$$

где

$$\frac{\mathbf{H}}{2} = \left(\frac{H_1}{1}, \frac{H_3}{3}, \dots, \frac{H_{2n-1}}{2n-1}, \dots \right), \quad \frac{\mathbf{H}^*}{2} = \left(\frac{H_{-1}}{1}, \frac{H_{-3}}{3}, \dots, \frac{H_{-2n+1}}{2n-1}, \dots \right). \quad (6.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из сравнения формул (2.5), (2.7) и (6.2).

Имеем также следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Для функций $f = f(\gamma/2)$ и $g = g(\gamma/2)$ имеем

$$\langle f, g \rangle_r = \left\langle 0 \left| f\left(\frac{\mathbf{H}}{2}\right) g\left(\frac{\mathbf{B}}{2}\right) \right| 0 \right\rangle, \quad (6.8)$$

где $\mathbf{H}/2$ определено в (6.7), а

$$\frac{\mathbf{B}}{2} = \left(B_1, \frac{B_3}{3}, \dots, \frac{B_{2m-1}}{2m-1}, \dots \right). \quad (6.9)$$

7. ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Предположим, что все параметры b_k являются неотрицательными целыми числами. Обозначим $(1, 0, 0, 0, \dots)$ как $\mathbf{t}_\infty$. Пусть

$$r(n) = \frac{\prod_{i=1}^p (a_i + n - 1)}{\prod_{i=1}^s (b_i + n - 1)}, \quad n > 0, \quad \mathbf{t}^* = \mathbf{t}_\infty. \quad (7.1)$$

Имеем (см. (2.20) и (3.7))

$$\tau_r(\mathbf{t}, \mathbf{t}^*) = 1 + \sum_{\lambda \in DP} 2^{-\ell(\lambda)} Q_\lambda \left(\frac{\mathbf{t}}{2} \right) \frac{1}{H_\lambda^*} \frac{\prod_{k=1}^p (a_k)_\lambda}{\prod_{k=1}^s (b_k)_\lambda}, \quad (7.2)$$

где $(a)_\lambda$ является вариантом символа Похгаммера, связанного с разбиением:

$$(a)_\lambda := \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} (a)_{n_i}, \quad (a)_{n_i} := a(a+1) \dots (a+n_i-1). \quad (7.3)$$

Если взять $\mathbf{t} = (2x, 2x^3/3, 2x^5/5, \dots)$, то сумма берется только по разбиениям длины $\ell(\lambda) = 1$. В этом случае $Q_{(n)} = 2x^n$, $n > 0$, $Q_0 = 1$ и $H_{(n)}^* = n!$. Таким образом, получаем обыкновенную обобщенную гипергеометрическую функцию одной переменной

$$\tau_r(\mathbf{t}, \mathbf{t}^*) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{k=1}^p (a_k)_n}{\prod_{k=1}^s (b_k)_n} \frac{x^n}{n!} = {}_pF_s(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_s; x). \quad (7.4)$$

Далее мы рассмотрим связанный с Q -функциями Шура гипергеометрический ряд, обладающий следующим свойством: его квадрат является некоторой гипергеометрической функцией, связанной с функциями Шура s_λ [7] посредством формулы (3.14). Чтобы обеспечить это свойство, следует взять рациональную функцию r , удовлетворяющую условию (3.2). Будем предполагать, что параметры β_k не являются полужелыми. Возьмем

$$r(n) = \frac{\prod_{k=1}^p ((n-1/2)^2 - \alpha_k^2)}{\prod_{k=1}^s ((n-1/2)^2 - \beta_k^2)}, \quad \rho(n) = \sqrt{-1} \left(\alpha - \frac{1}{2} - n \right). \quad (7.5)$$

Получаем гипергеометрическую функцию

$$\tau_r(\mathbf{t}, \mathbf{t}^*) = 1 + \sum_{\lambda \in DP} \frac{2^{-\ell(\lambda)}}{H_\lambda^*} \frac{\prod_{k=1}^p (\alpha_k + 1/2)_\lambda (-\alpha_k + 1/2)_\lambda}{\prod_{k=1}^s (\beta_k + 1/2)_\lambda (-\beta_k + 1/2)_\lambda} Q_\lambda \left(\frac{\mathbf{t}}{2} \right). \quad (7.6)$$

8. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ $\langle \cdot, \cdot \rangle_r$

Рассмотрим функцию μ_r одной переменной со свойствами

$$\iint_{\Gamma} \mu_r(z z^*) z^n dz dz^* = \iint_{\Gamma} \mu_r(z z^*) z^{*n} dz dz^* = \delta_{n,0}, \quad (8.1)$$

а также

$$\iint_{\Gamma} \mu_r(z z^*) z^n z^{*m} dz dz^* = 2\delta_{n,m} r(1)r(2) \dots r(n). \quad (8.2)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Способ найти подходящую функцию μ_r состоит в решении уравнения

$$\left(z^* - \frac{1}{z} r(-D) \right) \cdot \mu_r(z z^*) = 0, \quad D = z \frac{d}{dz}, \quad r(k) = r(1-k), \quad (8.3)$$

и в таком выборе области интегрирования Γ , чтобы оператор $z^{-1}r(D)$, $D = z d/dz$, был сопряженным к оператору $z^{-1}r(-D)$ на функциях $z^n \mu_r(z)$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

С помощью соотношения

$$\begin{aligned} \frac{1}{M!} \int \dots \int \phi(z_M) \dots \phi(z_1) |0\rangle \langle 0| \phi(z_1^*) \dots \phi(z_M^*) \prod_{i=1}^M \mu_r(z_i z_i^*) dz_i dz_i^* = \\ = \sum_{\lambda \in DP, \ell(\lambda) \leq M} 2^{\ell(\lambda)} |\lambda\rangle_r \langle \lambda| \end{aligned} \quad (8.4)$$

для разбиений λ и μ (с длинами $\ell(\lambda), \ell(\mu) \leq M$) получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{M!} \int \dots \int \Delta(z) \Delta(z^*) Q_\lambda(z) Q_\mu(z^*) \prod_{k=1}^M \mu_r(z_k z_k^*) dz_k dz_k^* = \\ = 2^{\ell(\lambda)} r_\lambda \delta_{\lambda\mu} = \langle Q_\lambda, Q_\mu \rangle_r, \end{aligned} \quad (8.5)$$

где

$$\Delta(z) = \prod_{i < j}^M \frac{z_i - z_j}{z_i + z_j}, \quad \Delta(z^*) = \prod_{i < j}^M \frac{z_i^* - z_j^*}{z_i^* + z_j^*}. \quad (8.6)$$

Используя равенства

$$\begin{aligned} \exp\left(\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{k=1}^M z_k^n t_n\right) &= \sum_{\lambda \in DP, \ell(\lambda) \leq M} 2^{-\ell(\lambda)} Q_{\lambda}(\mathbf{z}^M) Q_{\lambda}(\mathbf{t}), \\ \exp\left(\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{k=1}^M z_k^{*n} t_n^*\right) &= \sum_{\lambda \in DP, \ell(\lambda) \leq M} 2^{-\ell(\lambda)} Q_{\lambda}(\mathbf{z}^{*M}) Q_{\lambda}(\mathbf{t}^*), \end{aligned} \quad (8.7)$$

вычислим интеграл

$$\begin{aligned} I_r(M, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*) &= \frac{1}{M!} \int \cdots \int \Delta(z) \Delta(z^*) \times \\ &\times \prod_{k=1}^M \exp\left(\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} (z_k^n t_n + z_k^{*n} t_n^*)\right) \mu_r(z_k z_k^*) dz_k dz_k^*. \end{aligned} \quad (8.8)$$

Окончательно получаем

$$I_r(M, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*) = 1 + \sum_{\lambda \in DP, \ell(\lambda) \leq M} 2^{-\ell(\lambda)} r_{\lambda} Q_{\lambda}\left(\frac{\mathbf{t}}{2}\right) Q_{\lambda}\left(\frac{\mathbf{t}^*}{2}\right). \quad (8.9)$$

Ограничение $\ell(\lambda) \leq M$ составляет различие между правой частью (8.9) и $\tau_r(\mathbf{t}, \mathbf{t}^*)$. Однако в случае, когда по крайней мере одно из множеств $\mathbf{t}$ и $\mathbf{t}^*$ имеет вид (2.19) при N или N^* , не превышающем M , интеграл $I_r(M, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*)$ является тау-функцией $\tau_r(\mathbf{t}, \mathbf{t}^*)$ иерархии ВКП. В этом случае интеграл $I_r(M, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*)$ следовало бы интерпретировать как аналог борелевской суммы расходящегося ряда τ_r , как это было сделано в [14].

Может представлять интерес применение этого подхода к матричным моделям [15] и к статистическим моделям, где статсумма редуцируется к интегралу схожего типа (см. [16], [17], где приведены примеры подобных интегралов).

9. ПФАФФИАННЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ТАУ-ФУНКЦИЙ $\tau_r(\mathbf{t}(\mathbf{x}), \mathbf{t}^*)$ И $\tau_r(\mathbf{t}(\mathbf{x}), \mathbf{t}^*(\mathbf{y}))$

Сначала напомним, что пфаффиан косимметричной $(2N \times 2N)$ -матрицы S (обозначаемый здесь как $\text{Pfaff}(S)$) определяется как квадратный корень из ее определителя. Пронумеруем все нейтральные фермионы в (4.6) слева направо как Φ_k , $k = 1, 2, \dots, 2N$, в соответствии со следующей записью:

$$\langle 0 | \phi\left(\frac{1}{x_N}\right) \cdots \phi\left(\frac{1}{x_1}\right) \phi(T, -y_1) \cdots \phi(T, -y_N) | 0 \rangle = \langle 0 | \Phi_1 \Phi_2 \cdots \Phi_{2N-1} \Phi_{2N} | 0 \rangle,$$

где $\phi(1/x_N) = \Phi_1, \dots, \phi(T, -y_N) = \Phi_{2N}$. Согласно теореме Вика (см., например, [2]) получим

$$\langle 0 | \Phi_1 \Phi_2 \dots \Phi_{2N-1} \Phi_{2N} | 0 \rangle = \text{Pfaff}(S), \quad S_{km} = \langle 0 | \Phi_k \Phi_m | 0 \rangle.$$

Матрица S_{nm} состоит из четырех $(N \times N)$ -блоков

$$S_{km} = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{x_m - x_k}{x_m + x_k}, & 1 \leq k, m \leq N, \\ \frac{1}{2} \frac{y_m - y_k}{y_m + y_k}, & N+1 \leq k, m \leq 2N, \end{cases} \quad (9.1)$$

и

$$S_{km} = -S_{mk} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-T_n} x_k^n y_m^n, \quad 1 \leq k \leq N, \quad N+1 \leq m \leq 2N, \quad (9.2)$$

где $e^{T_{n-1}-T_n} = r(n)$. В случае, когда $\mathbf{t} = \mathbf{t}(x)$ и $\mathbf{t}^* = \mathbf{t}^*(y)$, получаем пфаффианную формулу для тау-функции (3.7).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. При $r \neq 0$ и для $\mathbf{t}(\mathbf{x}^N)$ и $\mathbf{t}^*(\mathbf{y}^N)$, определенных в (2.19), имеем

$$\tau_r(\mathbf{t}(\mathbf{x}^N), \mathbf{t}^*(\mathbf{y}^N)) = \frac{\text{Pfaff}(S)}{\Delta(\mathbf{x}^N)\Delta(\mathbf{y}^N)}, \quad (9.3)$$

где $\Delta(\mathbf{x}^N)$ имеет вид (4.8). Матрица S_{km} определяется в (9.1) и (9.2).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. При четном N имеем

$$\tau_r(\mathbf{t}(\mathbf{x}^N), \mathbf{t}^*) = \frac{\text{Pfaff}(R)_{i,k=1}^N}{\Delta(\mathbf{x}^N)}, \quad (9.4)$$

$$R_{ik} = \frac{1}{2} \frac{x_i - x_k}{x_i + x_k} \tau_r(\mathbf{t}(x_i, x_k), \mathbf{t}^*), \quad t_m(x_i, x_k) = \frac{2x_i^m}{m} + \frac{2x_k^m}{m},$$

где

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{x_i - x_k}{x_i + x_k} \tau_r(\mathbf{t}(x_i, x_k), \mathbf{t}^*) &= \left\langle 0 \left| \phi\left(\frac{1}{x_i}\right) \phi\left(\frac{1}{x_k}\right) e^{-B(\mathbf{t}^*)} \right| 0 \right\rangle = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n_k > n_i \geq 0} (x_k^{n_k} x_i^{n_i} - x_k^{n_i} x_i^{n_k}) r_{(n_k, n_i)} Q_{(n_k, n_i)}\left(\frac{\mathbf{t}^*}{2}\right). \end{aligned} \quad (9.5)$$

Для нечетного N формула почти такая же, только к матрице R следует добавить дополнительные $(N+1)$ -е строку и столбец:

$$\tau_r(\mathbf{t}(\mathbf{x}^N), \mathbf{t}^*) = \frac{\text{Pfaff}(R)_{i,k=1}^{N+1}}{\Delta(\mathbf{x}^N)}, \quad (9.6)$$

$$R_{i,N+1} = -R_{N+1,i} = \tau_r(\mathbf{t}(x_i), \mathbf{t}^*), \quad t_m(x_i) = \frac{2x_i^m}{m}$$

(явное выражение для $\tau_r(\mathbf{t}(x_i), \mathbf{t}^*)$ приведено в (5.4)).

10. ДЕЙСТВИЕ ВЕРШИННЫХ ОПЕРАТОРОВ И ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Вершинные операторы $Z(z)$ действуют на пространстве $C[t_1, t_3, t_5, \dots]$ многочленов от бесконечного числа переменных и определяются формулой

$$Z(z) = e^{\xi(\mathbf{t}, z)} e^{-2\xi(\tilde{\partial}, z^{-1})}, \quad (10.1)$$

где

$$\xi(\mathbf{t}, z) = z t_1 + z^3 t_3 + z^5 t_5 + \dots, \quad \tilde{\partial} := \left(\frac{\partial}{\partial t_1}, \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial t_3}, \frac{1}{5} \frac{\partial}{\partial t_5}, \dots \right).$$

Введем операторы (генераторы дополнительных симметрий), действующие на функциях от переменных $\mathbf{t}$:

$$\Omega_r(\mathbf{t}^*) := -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint Z(-z + \epsilon) \xi_r(\mathbf{t}^*, z) Z(z) \frac{dz}{z}$$

(параметры t_k^* играют здесь роль групповых времен; определение $\xi_r(\mathbf{t}^*, z)$ дано в (3.20)). Например,

$$\Omega_{r=1}(\mathbf{t}^*) = 2 \sum_{n>0} (2n+1) t_{2n+1} t_{2n+1}^*.$$

Рассмотрим также операторы

$$Z_{nn} = -\frac{1}{4\pi^2} \oint \frac{z^n}{(-z^*)^n} Z(-z^*) Z(z) \frac{dz dz^*}{zz^*}.$$

Имея в виду (4.2), удобно ввести второе обозначение для рассматриваемой тау-функции: $\tau(\mathbf{t}, T, \mathbf{t}^*) := \tau_r(\mathbf{t}, \mathbf{t}^*)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. *Имеются формулы для сдвига аргумента*

$$e^{\Omega_r(\gamma)} \cdot \tau_r(\mathbf{t}, \mathbf{t}^*) = \tau_r(\mathbf{t}, \mathbf{t}^* + \gamma) \quad (10.2)$$

и

$$\exp\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n Z_{nn}\right) \tau(\mathbf{t}, T, \mathbf{t}^*) = \tau(\mathbf{t}, T + \gamma, \mathbf{t}^*). \quad (10.3)$$

В частности,

$$e^{\Omega_r(\mathbf{t}^*)} \cdot 1 = \tau_r(\mathbf{t}, \mathbf{t}^*),$$

$$\exp\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} T_n Z_{nn}\right) \exp\left(2 \sum_{n=1,3,\dots} n t_n t_n^*\right) = \tau(\mathbf{t}, T, \mathbf{t}^*).$$

Благодарности. Работа была выполнена главным образом во время посещения автором Университета Киото в 1999–2001 гг. Автор благодарен А. Кириллову, Дж. Дж. К. Ниммо, И. Луценко и особенно Т. Шиоте за обсуждения. Автор также благодарит Т. Шиоту за указание на работу [12]. Работа поддержана РФФИ (грант № 02-02-17382а) и LDRD (проект № 20020006ER).

Список литературы

- [1] *E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara, T. Miwa.* Transformation groups for soliton equations. In: *Nonlinear Integrable Systems: Classical Theory and Quantum Theory. Proc. of RIMS Symp.* (Kyoto, Japan, 13–16 May, 1981). Eds. M. Jimbo, T. Miwa. Singapore: World Scientific, 1983. P. 39–120.
- [2] *E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara, T. Miwa.* Phys. D. 1982. V. 4. P. 343–365.
- [3] *В. Е. Захаров, А. Б. Шабат.* Функци. анализ и его прилож. 1974. Т. 3. № 3. С. 43–53.
- [4] *Y. You.* Polynomial solutions of the BKP hierarchy and projective representations of symmetric groups. In: *Infinite-Dimensional Lie Algebras and Groups. Adv. Ser. Math. Phys.* V. 7. Ed. V. G. Kac. Teaneck, NJ: World Scientific, 1989. P. 449–464.
- [5] *J. J. C. Nimmö.* J. Phys. A. 1990. V. 23. P. 751–760.
- [6] *I. G. Macdonald.* Symmetric Functions and Hall Polynomials. Oxford: Clarendon, 1995.
- [7] *A. Yu. Orlov, D. M. Scherbin.* Phys. D. 2001. V. 152–153. P. 51–65; math-ph/0003011.
- [8] *A. Yu. Orlov, D. Scherbin.* J. Phys. A. 2001. V. 34. P. 2295–2310; *А. Ю. Орлов, Д. М. Щербин.* ТМФ. 2001. Т. 128. № 1. С. 84–108.
- [9] *V. G. Kac, J. van de Leur.* The geometry of spinors and the multicomponent BKP and DKP hierarchies. In: *The Bispectral Problem. Proc. of the CRM Workshop (Montréal, Canada, March 1997)* CMR Proc. Lect. Notes. V. 14. Eds. J. Harnad, A. Kasman. Providence, RI: AMS, 1998. P. 159–202.
- [10] *I. Schur.* J. Reine Angew. Math. 1911. V. 139. P. 155–250.
- [11] *A. Yu. Orlov.* Vertex operators, ∂ bar problem, symmetries, Hamiltonian and Lagrangian formalism of (2+1) dimensional integrable systems. In: *Plasma Theory and Nonlinear and Turbulent Processes in Physics. Proc. 3rd Intl. Workshop, 1987.* V. 1. Eds. V. G. Baryakhtar et al. Singapore: World Scientific, 1988. P. 116–134.
- [12] *C. A. Tracy, H. Widom.* A limit theorem for shifted Schur measures. math.PR/0210255.
- [13] *A. Yu. Orlov, D. M. Scherbin.* Fermionic representation for basic hypergeometric functions related to Schur polynomials. nlin.SI/0001001.
- [14] *J. Harnad, A. Yu. Orlov.* Matrix integrals as Borel sums of Schur function expansions. In: *Symmetry and Perturbation Theory. Proc. Intl. Conf. SPT 2002.* Eds. S. Abenda, G. Gaeta, S. Walcher. Singapore: World Scientific, 2003; nlin.SI/0209035.
- [15] *P. van Moerbeke.* Integrable lattices: Random matrices and random permutations. In: *Random Matrices and Their Applications. MSRI Publ. 40.* Eds. P. Bleher, A. Its. New York: Cambridge Univ. Press, 2001; math.CO/0010135.
- [16] *I. K. Kostov.* Nucl. Phys. Proc. Suppl. A. 1996. V. 45. P. 13–28; hep-th/9509124.
- [17] *I. Loutsenko, V. Spiridonov.* Nucl. Phys. B. 1998. V. 538. P. 731–751; solv-int/9909022.