Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Озер, Е. Шухуби, Группы эквивалентности для уравнений баланса первого порядка и приложения к электромагнетизму, *ТМФ*, 2003, том 137, номер 2, 271–280

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf271>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 02:24:17

ГРУППЫ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ БАЛАНСА ПЕРВОГО ПОРЯДКА И ПРИЛОЖЕНИЯ К ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМУ

Исследуются группы преобразований эквивалентности для уравнений баланса первого порядка, включающих произвольное число зависимых и независимых переменных. Получены определяющие уравнения и найдены их явные решения. В основе используемого подхода лежит геометрический метод внешних дифференциальных форм Картана. Общие решения уравнений, задающих преобразования эквивалентности для систем первого порядка, применяются к уравнениям электродинамики Максвелла.

Ключевые слова: группы эквивалентности, изовекторный метод, уравнения баланса, уравнения Максвелла.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим общую систему дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, которая имеет вид уравнений баланса

$$\frac{\partial \Sigma^{\alpha i}}{\partial u^{\beta}} u^{\beta}_{,i} + \frac{\partial \Sigma^{\alpha i}}{\partial x^i} + \Sigma^{\alpha} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \alpha = 1, 2, \dots, N, \quad (1)$$

где $\Sigma^{\alpha i} = \Sigma^{\alpha i}(x^j, u^{\beta})$, $\Sigma^{\alpha} = \Sigma^{\alpha}(x^j, u^{\beta})$, через x^i и u^{α} обозначены соответственно независимые и зависимые переменные, а индекс после запятой обозначает частную производную по соответствующей независимой переменной. Такие системы включают в себя широкий класс уравнений математической физики, поэтому их общие решения легко могут быть приложены ко всем системам дифференциальных уравнений первого порядка, если определить $\Sigma^{\alpha i}$ и Σ^{α} подходящим образом.

В настоящей работе получены преобразования эквивалентности для системы вида (1). Мы получаем определяющие уравнения и находим их точные решения. В последнем разделе в качестве приложения исследуются уравнения Максвелла.

*Department of Engineering Sciences, Faculty of Science and Letters, Istanbul Technical University, 80626 Maslak, Istanbul, Turkey. E-mail: ozers@itu.edu.tr

†Department of Mathematics, Yeditepe University, 81120 Kayışdağı, Istanbul, Turkey. E-mail: suhubi@yeditepe.edu.tr

Группы эквивалентности – это группы непрерывных преобразований, которые отображают произвольное уравнение заданного семейства дифференциальных уравнений в другое уравнение того же семейства и преобразуют решение первого уравнения в решение второго:

$$\frac{\partial \Sigma^{\alpha i}(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x^i} + \Sigma^{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0 \longrightarrow \frac{\partial \bar{\Sigma}^{\alpha i}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}})}{\partial \bar{x}^i} + \bar{\Sigma}^{\alpha}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) = 0,$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}) \longrightarrow \bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{x}}).$$

Геометрический метод, основанный на использовании внешних дифференциальных форм Картана [1], применяется для получения инфинитезимальных генераторов этих преобразований. Этот метод был впервые предложен Харрисоном и Эстабруком [2] в 1971 г. и был затем расширен Эделеном [3] и Шухуби [4].

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Пусть $M = \mathbb{R}^n$ обозначает пространство независимых переменных с декартовым координатным покрытием $\{x^i\}$ и $G = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N$ обозначает пространство графика с координатным покрытием $\{x^i, u^{\alpha}\}$. Для построения групп эквивалентности будем рассматривать функции $\Sigma^{\alpha i}$ и Σ^{α} как независимые переменные; чтобы учесть их функциональную зависимость, определим дополнительные переменные

$$s_j^{\alpha i} = \frac{\partial \Sigma^{\alpha i}}{\partial x^j}, \quad \sigma_{\beta}^{\alpha i} = \frac{\partial \Sigma^{\alpha i}}{\partial u^{\beta}}, \quad t_i^{\alpha} = \frac{\partial \Sigma^{\alpha}}{\partial x^i}, \quad \tau_{\beta}^{\alpha} = \frac{\partial \Sigma^{\alpha}}{\partial u^{\beta}}. \quad (2)$$

Рассмотрим расширенное многообразие K с координатным покрытием

$$\{x^i, u^{\alpha}, \Sigma^{\alpha i}, \Sigma^{\alpha}, s_j^{\alpha i}, \sigma_{\beta}^{\alpha i}, t_i^{\alpha}, \tau_{\beta}^{\alpha}\}. \quad (3)$$

Пусть $\Lambda(K)$ – внешняя алгебра на многообразии K . Определим далее контактные 1-формы и балансные n -формы следующим образом:

$$\begin{aligned} \Omega^{\alpha i} &= d\Sigma^{\alpha i} - s_j^{\alpha i} dx^j - \sigma_{\beta}^{\alpha i} du^{\beta}, \\ \Omega^{\alpha} &= d\Sigma^{\alpha} - t_i^{\alpha} dx^i - \tau_{\beta}^{\alpha} du^{\beta}, \\ \omega^{\alpha} &= d\Sigma^{\alpha i} \wedge \mu_i + \Sigma^{\alpha} \mu, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\mu = dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n$ – базисная форма в пространстве форм $\Lambda^n(M)$, $\mu_i = \partial/\partial x^i \rfloor \mu$ – базисные формы в пространстве форм $\Lambda^{n-1}(M)$, символ $\wedge$ обозначает внешнее произведение, а символ $\rfloor$ – внутреннее произведение.

Замкнутый идеал I на расширенном многообразии K порождается формами $\Omega^{\alpha i}$, Ω^{α} , ω^{α} , $d\Omega^{\alpha i}$, $d\Omega^{\alpha}$ и $d\omega^{\alpha}$.

3. НАХОЖДЕНИЕ ИЗОВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

3.1. Характеристические уравнения. Общее векторное поле $V \in T(K)$ может быть записано в виде

$$V = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} + U^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + S^{\alpha i} \frac{\partial}{\partial \Sigma^{\alpha i}} + T^\alpha \frac{\partial}{\partial \Sigma^\alpha} + S_j^{\alpha i} \frac{\partial}{\partial s_j^{\alpha i}} + S_\beta^{\alpha i} \frac{\partial}{\partial \sigma_\beta^{\alpha i}} + T_i^\alpha \frac{\partial}{\partial t_i^\alpha} + T_\beta^\alpha \frac{\partial}{\partial \tau_\beta^\alpha}. \quad (5)$$

Для того чтобы V было изовекторным полем, необходимо и достаточно выполнение следующего условия:

$$\alpha \in I \Rightarrow \mathcal{L}_V \alpha \in I.$$

Другими словами, производные Ли генераторов идеала I должны оставаться в этом же идеале: определенные формулами (4) 1-формы и балансные n -формы должны удовлетворять условиям

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_V \Omega^{\alpha i} &= L_{\beta j}^{\alpha i} \Omega^{\beta j} + L_\beta^{\alpha i} \Omega^\beta, \\ \mathcal{L}_V \Omega^\alpha &= M_{\beta i}^\alpha \Omega^{\beta i} + M_\beta^\alpha \Omega^\beta, \\ \mathcal{L}_V \omega^\alpha &= \nu_\beta^\alpha \omega^\beta + \Omega^{\beta i} \wedge C_{\beta i}^\alpha + d\Omega^{\beta i} \wedge D_{\beta i}^\alpha + \Omega^\beta \wedge C_\beta^\alpha + d\Omega^\beta \wedge D_\beta^\alpha \end{aligned} \quad (6)$$

с коэффициентами

$$L_{\beta j}^{\alpha i}, L_\beta^{\alpha i}, M_{\beta i}^\alpha, M_\beta^\alpha, \nu_\beta^\alpha \in \Lambda^0(K), \quad C_{\beta i}^\alpha, C_\beta^\alpha \in \Lambda^{n-1}(K), \quad D_{\beta i}^\alpha, D_\beta^\alpha \in \Lambda^{n-2}(K).$$

Поскольку $\mathcal{L}_V d\alpha = d\mathcal{L}_V \alpha$, то нет необходимости вычислять $\mathcal{L}_V d\Omega^{\alpha i}$, $\mathcal{L}_V d\Omega^\alpha$ или $\mathcal{L}_V d\omega^\alpha$.

Производная Ли контактной 1-формы $\Omega^{\alpha i}$ может быть получена в виде

$$\mathcal{L}_V \Omega^{\alpha i} = dF^{\alpha i} - S_j^{\alpha i} dx_j + X^j ds_j^{\alpha i} - S_\beta^{\alpha i} du_\beta + U^\beta d\sigma_\beta^{\alpha i}, \quad (7)$$

где мы обозначили

$$F^{\alpha i} = S^{\alpha i} - X^j s_j^{\alpha i} - U^\beta \sigma_\beta^{\alpha i} \quad (8)$$

и использовали известную формулу $\mathcal{L}_V \alpha = d(V \lrcorner \alpha) + V \lrcorner d\alpha$ дифференцирования Ли. Сравнивая обе части (7) и первое уравнение в (6), получаем

$$L_{\beta j}^{\alpha i} = \frac{\partial F^{\alpha i}}{\partial \Sigma^{\beta j}}, \quad L_\beta^{\alpha i} = \frac{\partial F^{\alpha i}}{\partial \Sigma^\beta}, \quad \frac{\partial F^{\alpha i}}{\partial t_j^\beta} = \frac{\partial F^{\alpha i}}{\partial \tau_\gamma^\beta} = 0, \quad (9)$$

$$S_\beta^{\alpha i} = \frac{\partial F^{\alpha i}}{\partial u^\beta} + \frac{\partial F^{\alpha i}}{\partial \Sigma^{\gamma j}} \sigma_\beta^{\gamma j} + \frac{\partial F^{\alpha i}}{\partial \Sigma^\gamma} \tau_\beta^\gamma, \quad S_j^{\alpha i} = \frac{\partial F^{\alpha i}}{\partial x^j} + \frac{\partial F^{\alpha i}}{\partial \Sigma^{\gamma k}} s_j^{\gamma k} + \frac{\partial F^{\alpha i}}{\partial \Sigma^\beta} t_j^\beta, \quad (10)$$

$$X^j \delta_\beta^\alpha \delta_k^i + \frac{\partial F^{\alpha i}}{\partial s_j^{\beta k}} = 0, \quad U^\beta \delta_\gamma^\alpha \delta_j^i + \frac{\partial F^{\alpha i}}{\partial \sigma_\beta^{\gamma j}} = 0. \quad (11)$$

Аналогичные вычисления для 1-формы Ω^α дают

$$M_{\beta i}^\alpha = \frac{\partial G^\alpha}{\partial \Sigma^{\beta i}}, \quad M_\beta^\alpha = \frac{\partial G^\alpha}{\partial \Sigma^\beta}, \quad \frac{\partial G^\alpha}{\partial s_j^{\beta i}} = \frac{\partial G^\alpha}{\partial \sigma_\gamma^{\beta i}} = 0, \quad (12)$$

$$T_i^\alpha = \frac{\partial G^\alpha}{\partial x^i} + \frac{\partial G^\alpha}{\partial \Sigma^{\beta j}} s_i^{\beta j} + \frac{\partial G^\alpha}{\partial \Sigma^\beta} t_i^\beta, \quad T_\beta^\alpha = \frac{\partial G^\alpha}{\partial u^\beta} + \frac{\partial G^\alpha}{\partial \Sigma^{\gamma i}} \sigma_\beta^{\gamma i} + \frac{\partial G^\alpha}{\partial \Sigma^\gamma} \tau_\beta^\gamma, \quad (13)$$

$$X^i \delta_\beta^\alpha + \frac{\partial G^\alpha}{\partial t_i^\beta} = 0, \quad U^\beta \delta_\gamma^\alpha + \frac{\partial G^\alpha}{\partial \tau_\beta^\gamma} = 0, \quad (14)$$

где введено обозначение

$$G^\alpha = T^\alpha - X^i t_i^\alpha - U^\beta \tau_\beta^\alpha. \quad (15)$$

Уравнения (11) и (14) приводят к суженным формам

$$X^i = X^i(x^j, u^\beta, \Sigma^{\beta j}, \Sigma^\beta), \quad U^\alpha = U^\alpha(x^j, u^\beta, \Sigma^{\beta j}, \Sigma^\beta), \quad (16)$$

$$S^{\alpha i} = S^{\alpha i}(x^j, u^\beta, \Sigma^{\beta j}, \Sigma^\beta), \quad T^\alpha = T^\alpha(x^i, u^\beta, \Sigma^{\beta i}, \Sigma^\beta). \quad (17)$$

Рассмотрим, наконец, балансную n -форму ω^α . Производная Ли этой формы может быть легко получена в виде

$$\mathcal{L}_V \omega^\alpha = T^\alpha \mu + (dS^{\alpha i} + \Sigma^\alpha dX^i) \wedge \mu_i - dX^j \wedge d\Sigma^{\alpha i} \wedge \mu_{ji}. \quad (18)$$

Чтобы вычислить выражение (18), нужно сначала, принимая во внимание соотношения (16), (17), вычислить дифференциалы dX^i и $dS^{\alpha i}$, а затем заменить формы $d\Sigma^{\alpha i}$, $d\Sigma^\alpha$ на соответственно $\Omega^{\alpha i}$, Ω^α , используя тождества (4). В итоге, собирая аналогичные формы в обеих частях (18) и в третьем уравнении (6), мы сразу находим $D_{\beta i}^\alpha = 0$ и $D_\beta^\alpha = 0$, в то время как остальные члены принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} & [A^\alpha - \nu_\beta^\alpha (\Sigma^\beta + s_i^{\beta i})] \mu + (G_\beta^{\alpha i} + A_\gamma^{\alpha i} \tau_\beta^\gamma - \nu_\gamma^\alpha \sigma_\beta^{\gamma i}) du^\beta \wedge \mu_i A_{\beta \gamma}^{\alpha i j} du^\beta \wedge du^\gamma \wedge \mu_{ji} + \\ & + \Omega^{\beta j} \wedge \left[(A_{\beta j}^{\alpha i} - \nu_\beta^\alpha \delta_j^i) \mu_i - C_{\beta j}^\alpha - \frac{\partial X^k}{\partial \Sigma^{\beta k}} \Omega^{\alpha i} \wedge \mu_{ji} + A_{\gamma \beta}^{\alpha i} du^\gamma \wedge \mu_{ji} \right] + \\ & + \Omega^\beta \wedge \left[A_\beta^{\alpha i} \mu_i - C_\beta^\alpha - \frac{\partial X^j}{\partial \Sigma^\beta} \Omega^{\alpha i} \wedge \mu_{ji} - \frac{\partial X^j}{\partial \Sigma^\beta} \sigma_\gamma^{\alpha i} du^\gamma \wedge \mu_{ji} \right] = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Функции A^α , $A_\beta^{\alpha i}$, $G_\beta^{\alpha i}$, $A_{\beta j}^{\alpha i}$, $A_{\beta \gamma}^{\alpha i}$ и $A_{\beta \gamma}^{\alpha i j}$ в (19) определяются на основе компонент изо-

векторного поля следующим образом:

$$\begin{aligned}
A^\alpha &= T^\alpha + \frac{\partial S^{\alpha i}}{\partial x^i} + \Sigma^\alpha \frac{\partial X^i}{\partial x^i} + \left(\frac{\partial S^{\alpha i}}{\partial \Sigma^{\beta j}} + \Sigma^\alpha \frac{\partial X^i}{\partial \Sigma^{\beta j}} + \frac{\partial X^k}{\partial x^k} \delta_\beta^\alpha \delta_j^i - \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \delta_\beta^\alpha \right) s_i^{\beta j} + \\
&\quad + \left(\frac{\partial S^{\alpha i}}{\partial \Sigma^\beta} + \Sigma^\alpha \frac{\partial X^i}{\partial \Sigma^\beta} \right) t_i^\beta - \frac{\partial X^j}{\partial \Sigma^{\beta k}} (s_i^{\beta k} s_j^{\alpha i} - s_j^{\beta k} s_i^{\alpha i}) - \frac{\partial X^j}{\partial \Sigma^\beta} (t_i^\beta s_j^{\alpha i} - t_j^\beta s_i^{\alpha i}), \\
A_\beta^{\alpha i} &= \frac{\partial S^{\alpha i}}{\partial \Sigma^\beta} + \Sigma^\alpha \frac{\partial X^i}{\partial \Sigma^\beta} - \frac{\partial X^j}{\partial \Sigma^\beta} (s_j^{\alpha i} - s_k^{\beta k} \delta_j^i), \\
G_\beta^{\alpha i} &= \frac{\partial S^{\alpha i}}{\partial u^\beta} + \Sigma^\alpha \frac{\partial X^i}{\partial u^\beta} + \left(\frac{\partial S^{\alpha i}}{\partial \Sigma^{\gamma j}} + \Sigma^\alpha \frac{\partial X^i}{\partial \Sigma^{\gamma j}} + \frac{\partial X^k}{\partial x^k} \delta_\gamma^\alpha \delta_j^i - \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \delta_\gamma^\alpha \right) \sigma_\beta^{\gamma j} - \\
&\quad - \frac{\partial X^j}{\partial u^\beta} (s_j^{\alpha i} - s_k^{\alpha k} \delta_j^i) - \frac{\partial X^i}{\partial \Sigma^{\gamma k}} (\sigma_\beta^{\alpha j} s_j^{\gamma k} - \sigma_\beta^{\gamma k} s_j^{\alpha j}) + \\
&\quad + \frac{\partial X^j}{\partial \Sigma^{\gamma k}} (\sigma_\beta^{\alpha i} s_j^{\gamma k} - \sigma_\beta^{\gamma k} s_j^{\alpha i}) + \frac{\partial X^j}{\partial \Sigma^\gamma} (t_j^\gamma \sigma_\beta^{\alpha i} - t_k^\gamma \sigma_\beta^{\alpha k} \delta_j^i), \\
A_{\beta j}^{\alpha i} &= \frac{\partial S^{\alpha i}}{\partial \Sigma^{\beta j}} + \Sigma^\alpha \frac{\partial X^i}{\partial \Sigma^{\beta j}} - \frac{\partial X^k}{\partial x^l} (\delta_k^i \delta_j^l - \delta_j^i \delta_k^l \delta_j^i) \delta_\beta^\alpha - \frac{\partial X^k}{\partial \Sigma^{\beta j}} (s_k^{\alpha i} - s_m^{\alpha m} \delta_k^j) + \\
&\quad + \left(\frac{\partial X^l}{\partial \Sigma^{\gamma k}} s_l^{\gamma k} \delta_j^i - \frac{\partial X^i}{\partial \Sigma^{\gamma k}} s_j^{\gamma k} + \frac{\partial X^k}{\partial \Sigma^\gamma} t_k^\gamma \delta_j^i - \frac{\partial X^i}{\partial \Sigma^\gamma} t_j^\gamma \right) \delta_\beta^\alpha, \\
A_{\beta \gamma}^{\alpha i} &= -\frac{\partial X^i}{\partial \Sigma^{\gamma k}} \sigma_\beta^{\alpha k} - \left(\frac{\partial X^j}{\partial \Sigma^{\eta k}} \sigma_\beta^{\eta k} + \frac{\partial X^i}{\partial \Sigma^\eta} \tau_\beta^\eta + \frac{\partial X^i}{\partial u^\beta} \right) \delta_\gamma^\alpha, \\
A_{\beta \gamma}^{\alpha i j} &= -\frac{\partial X^j}{\partial u^\beta} \sigma_\gamma^{\alpha i} + \left(\frac{\partial X^j}{\partial \Sigma^{\eta k}} \sigma_\gamma^{\eta k} + \frac{\partial X^j}{\partial \Sigma^\eta} \tau_\gamma^\eta \right) \sigma_\beta^{\alpha i}.
\end{aligned} \tag{20}$$

Поскольку коэффициенты при независимых формах в уравнении (19) должны обращаться в нуль, то определяющие уравнения могут быть получены в виде

$$\begin{aligned}
A^\alpha &= \nu_\beta^\alpha (\Sigma^\beta + s_i^{\beta i}), \\
G_\beta^{\alpha i} + A_\gamma^{\alpha i} \tau_\beta^\gamma - \nu_\gamma^\alpha \sigma_\beta^{\gamma i} &= 0, \\
A_{[\beta \gamma]}^{\alpha [ij]} &= 0,
\end{aligned} \tag{21}$$

где ν_β^α — произвольные функции, а квадратные скобки в индексах обозначают антисимметризацию по соответствующим индексам.

3.2. Нахождение изовекторных полей в явном виде. Рассмотрим сначала третье определяющее уравнение в (21). Подставляя определения $A_{\beta \gamma}^{\alpha i j}$, заданные шестым выражением в (20), в третье определяющее уравнение (21), в явном виде получаем

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial X^j}{\partial u^\beta} \sigma_\gamma^{\alpha i} + \left(\frac{\partial X^j}{\partial \Sigma^{\eta k}} \sigma_\gamma^{\eta k} + \frac{\partial X^j}{\partial \Sigma^\eta} \tau_\gamma^\eta \right) \sigma_\beta^{\alpha i} + \frac{\partial X^i}{\partial u^\beta} \sigma_\gamma^{\alpha j} - \left(\frac{\partial X^i}{\partial \Sigma^{\eta k}} \sigma_\gamma^{\eta k} + \frac{\partial X^i}{\partial \Sigma^\eta} \tau_\gamma^\eta \right) \sigma_\beta^{\alpha j} + \\
& + \frac{\partial X^j}{\partial u^\gamma} \sigma_\beta^{\alpha i} - \left(\frac{\partial X^j}{\partial \Sigma^{\eta k}} \sigma_\beta^{\eta k} + \frac{\partial X^j}{\partial \Sigma^\eta} \tau_\beta^\eta \right) \sigma_\gamma^{\alpha i} - \\
& - \frac{\partial X^i}{\partial u^\gamma} \sigma_\beta^{\alpha j} - \left(\frac{\partial X^i}{\partial \Sigma^{\eta k}} \sigma_\beta^{\eta k} + \frac{\partial X^i}{\partial \Sigma^\eta} \tau_\beta^\eta \right) \sigma_\gamma^{\alpha j} = 0.
\end{aligned} \tag{22}$$

Поскольку компоненты изовекторного поля X^i не зависят от переменных $\sigma_\beta^{\alpha i}$ и τ_β^α (см. (16)), уравнение (22) является полиномиальным уравнением по переменным $\sigma_\beta^{\alpha i}$ и τ_β^α . Другими словами, коэффициенты при этих переменных должны обращаться в нуль:

$$\frac{\partial X^i}{\partial u^\beta} = 0, \quad \frac{\partial X^i}{\partial \Sigma^{\beta j}} = 0, \quad \frac{\partial X^i}{\partial \Sigma^\beta} = 0,$$

т.е. компоненты изовектора имеют вид

$$X^i = X^i(x^j). \quad (23)$$

Принимая во внимание результат (23) и используя функции A^α , $G_\beta^{\alpha i}$ и $A_\gamma^{\alpha i}$, заданные формулами (20), мы можем выписать первые два определяющих уравнения (21) в явном виде:

$$\begin{aligned} T^\alpha + \frac{\partial S^{\alpha i}}{\partial x^i} + \Sigma^\alpha \frac{\partial X^i}{\partial x^i} + \\ + \left(\frac{\partial S^{\alpha i}}{\partial \Sigma^{\beta j}} + \frac{\partial X^k}{\partial x^k} \delta_\beta^\alpha \delta_j^i - \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \delta_\beta^\alpha \right) s_i^{\beta j} + \frac{\partial S^{\alpha i}}{\partial \Sigma^\beta} t_i^\beta - \nu_\beta^\alpha (\Sigma^\beta + s_i^{\beta i}) = 0, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\frac{\partial S^{\alpha i}}{\partial u^\beta} + \left(\frac{\partial S^{\alpha i}}{\partial \Sigma^{\gamma j}} + \frac{\partial X^k}{\partial x^k} \delta_\gamma^\alpha \delta_j^i - \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \delta_\gamma^\alpha - \nu_\gamma^\alpha \delta_j^i \right) \sigma_\beta^{\gamma j} + \frac{\partial S^{\alpha i}}{\partial \Sigma^\beta} \tau_\beta^\gamma = 0. \quad (25)$$

Из уравнения (24) мы можем получить произвольные функции ν_β^α в виде $\nu_\beta^\alpha = \nu_\beta^\alpha(x^i, u^\gamma, \Sigma^{\gamma i}, \Sigma^\gamma, s_j^{\gamma i}, t_i^\gamma, \tau_\beta^\gamma)$. Ввиду этого уравнение (25) может рассматриваться как полиномиальное уравнение по переменной $\sigma_\beta^{\alpha i}$ и может быть легко представлено в более простом виде:

$$\frac{\partial S^{\alpha i}}{\partial u^\beta} = 0, \quad \frac{\partial S^{\alpha i}}{\partial \Sigma^\beta} = 0, \quad \frac{\partial S^{\alpha i}}{\partial \Sigma^{\gamma j}} + \left(\frac{\partial X^k}{\partial x^k} \delta_j^i - \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \right) \delta_\gamma^\alpha = \nu_\gamma^\alpha \delta_j^i. \quad (26)$$

Из третьего уравнения в (26) ясно, что

$$\nu_\beta^\alpha = \frac{1}{n} \frac{\partial S^{\alpha i}}{\partial \Sigma^{\beta j}} + \frac{n-1}{n} \frac{\partial X^i}{\partial x^i} \delta_\beta^\alpha.$$

Подставляя это выражение в третье уравнение (26) и определяя функцию

$$f_\beta^\alpha = \nu_\beta^\alpha - \frac{\partial X^i}{\partial x^i} \delta_\beta^\alpha,$$

имеем

$$\frac{\partial S^{\alpha i}}{\partial \Sigma^{\beta j}} = f_\beta^\alpha \delta_j^i + \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \delta_\beta^\alpha.$$

Дифференцируя по переменной $\Sigma^{\gamma k}$, в силу симметрии левой части легко можем записать

$$\frac{\partial f_\beta^\alpha}{\partial \Sigma^{\gamma k}} \delta_j^i = \frac{\partial f_\gamma^\alpha}{\partial \Sigma^{\beta j}} \delta_k^i.$$

Сворачивая по индексам i и j , легко получаем $f_\beta^\alpha = f_\beta^\alpha(x_i)$. Следовательно, мы имеем $S^{\alpha i}$ в виде

$$S^{\alpha i} = f_\beta^\alpha(\mathbf{x})\Sigma^{\beta i} + \frac{\partial X^i}{\partial x^j}\Sigma^{\alpha j} + g^{\alpha i}(\mathbf{x}).$$

Последний шаг состоит в получении компонент изовекторного поля из уравнения (24):

$$T^\alpha = f_\beta^\alpha(\mathbf{x})\Sigma^\beta - \frac{\partial f_\beta^\alpha(\mathbf{x})}{\partial x^i}\Sigma^{\beta i} - \frac{\partial^2 X^i}{\partial x^i \partial x^j}\Sigma^{\alpha j} - \frac{\partial g^{\alpha i}(\mathbf{x})}{\partial x^i},$$

где $f_\beta^\alpha(\mathbf{x})$ и $g^{\alpha i}(\mathbf{x})$ являются произвольными функциями своих аргументов. Таким образом, все значимые компоненты изовекторов получены:

$$\begin{aligned} X^i &= X^i(x^i), \\ U^\alpha &= U^\alpha(x^i, u^\alpha, \Sigma^{\alpha i}, \Sigma^\alpha), \\ S^{\alpha i} &= f_\beta^\alpha(x^j)\Sigma^{\beta i} + \frac{\partial X^i}{\partial x^j}\Sigma^{\alpha j} + g^{\alpha i}(x^j), \\ T^\alpha &= f_\beta^\alpha(x^i)\Sigma^\beta - \frac{\partial f_\beta^\alpha(x^j)}{\partial x^i}\Sigma^{\beta i} - \frac{\partial^2 X^i}{\partial x^i \partial x^j}\Sigma^{\alpha j} - \frac{\partial g^{\alpha i}(x^i)}{\partial x^i}. \end{aligned} \quad (27)$$

Группа эквивалентности, порождаемая некоторым конкретным изовекторным полем, может быть теперь найдена посредством интегрирования следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно группового параметра ε :

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}^i}{d\varepsilon} &= X^i(\bar{x}^j), & \frac{d\bar{u}^\alpha}{d\varepsilon} &= U^\alpha(\bar{x}^j, \bar{u}^\beta, \bar{\Sigma}^{\beta j}, \bar{\Sigma}^\beta), \\ \frac{d\bar{\Sigma}^{\alpha i}}{d\varepsilon} &= S^{\alpha i}(\bar{x}^j, \bar{u}^\beta, \bar{\Sigma}^{\beta j}, \bar{\Sigma}^\beta), & \frac{d\bar{\Sigma}^\alpha}{d\varepsilon} &= T^\alpha(\bar{x}^j, \bar{u}^\beta, \bar{\Sigma}^{\beta j}, \bar{\Sigma}^\beta) \end{aligned}$$

с начальными условиями

$$\bar{x}^i(0) = x^i, \quad \bar{u}^\alpha(0) = u^\alpha, \quad \bar{\Sigma}^{\alpha i}(0) = \Sigma^{\alpha i}, \quad \bar{\Sigma}^\alpha(0) = \Sigma^\alpha.$$

Дополнительные компоненты изовектора легко могут быть вычислены из уравнений (10) и (13) с использованием определений (8) и (15). Если функции $\Sigma^{\alpha i}$ и/или Σ^α не зависят от некоторых переменных x^i или u^α , то компоненты изовектора, связанные с этими переменными, также должны обращаться в нуль. Такие ограничения, наложенные на компоненты изовектора, сужают произвол в функциях, входящих в выражения для определенных выше компонент.

4. ПРИМЕНЕНИЕ К УРАВНЕНИЯМ МАКСВЕЛЛА

Рассмотрим уравнения Максвелла в виде

$$\begin{aligned} e_{ijk}E_{k,j} + \dot{B}_i &= 0, & B_{i,i} &= 0, \\ e_{ijk}H_{k,j} - \dot{D}_i - J_i &= 0, & D_{i,i} &= q_f, \end{aligned} \quad (28)$$

где индексы i, j и k нумеруют пространственные координаты, e_{ijk} — абсолютно антисимметричный тензор, индекс после запятой обозначает частную производную по соответствующей пространственной координате и точка означает дифференцирование по времени. Здесь E_i , H_i , D_i и B_i являются соответственно компонентами векторов напряженности электрического поля, напряженности магнитного поля, электрической индукции и магнитной индукции, J_i — компоненты вектора плотности электрического тока и q_f — плотность свободного заряда. Система (28) содержит 15 неизвестных и только восемь уравнений. Следовательно, эта система является недоопределенной и должна быть дополнена уравнениями состояния, которые описывают физические свойства материальной среды. В рамках настоящей работы мы рассматриваем несколько упрощенные строго нелинейные однородные уравнения состояния

$$D_i = D_i(E_j), \quad B_i = B_i(H_j), \quad J_i = J_i(E_j), \quad q_f = q_f(x_i, t). \quad (29)$$

Для того чтобы представить уравнения Максвелла (28) в виде уравнений баланса (1), подставим в качестве независимых переменных x^i переменные $\{x_i, t\}$, $i = 1, 2, 3$, в качестве зависимых переменных u^α — переменные $\{u_\alpha = E_\alpha, u_a = H_{(a-3)}\}$, $\alpha = 1, 2, 3$, $a = 4, 5, 6$, и определим

$$\begin{aligned} \Sigma_{\alpha j} &= e_{\alpha j k} E_k, & \Sigma_{\alpha 4} &= \delta_{\alpha j} B_j, & \Sigma_\alpha &= 0, \\ \Sigma_{a j} &= e_{(a-3) j k} H_k, & \Sigma_{a 4} &= -\delta_{(a-3) j} D_j, & \Sigma_a &= -\delta_{(a-3) j} J_j, \\ \Sigma_{7 j} &= B_j, & \Sigma_{7 4} &= 0, & \Sigma_7 &= 0, \\ \Sigma_{8 j} &= D_j, & \Sigma_{8 4} &= 0, & \Sigma_8 &= -q_f. \end{aligned} \quad (30)$$

Согласно уравнениям состояния (29) некоторые из дополнительных переменных, задаваемых формулами (2), обращаются в нуль:

$$\begin{aligned} s_{\alpha j i} &= s_{\alpha j 4} = s_{\alpha 4 i} = s_{\alpha 4 4} = s_{a j i} = s_{a j 4} = s_{a 4 i} = s_{a 4 4} = s_{7 j i} = s_{7 j 4} = s_{8 j i} = s_{8 j 4} = 0, \\ \sigma_{\alpha j n} &= \sigma_{\alpha 4 n} = \sigma_{a j m} = \sigma_{a 4 n} = \sigma_{7 j m} = \sigma_{8 j n} = 0, \\ t_{\alpha i} &= t_{\alpha 4} = t_{7 i} = t_{7 4} = t_{a i} = t_{a 4} = 0, \\ \tau_{\alpha m} &= \tau_{\alpha n} = \tau_{a n} = \tau_{7 m} = \tau_{7 n} = \tau_{8 m} = \tau_{8 n} = 0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha j m} &= e_{\alpha j m}, & \sigma_{a j n} &= e_{(a-3) j n}, \\ \sigma_{\alpha 4 n} &= \delta_{\alpha i} \sigma_{7 i m}, & \sigma_{a 4 m} &= -\delta_{(a-3) i} \sigma_{8 i m}. \end{aligned}$$

Здесь нижний индекс m обозначает частные производные по компонентам вектора напряженности электрического поля, а нижний индекс n — частные производные по компонентам вектора напряженности магнитного поля. Компоненты изовекторов, соответствующих обращающимся в нуль переменным, также должны обращаться в нуль:

$$\begin{aligned} S_{\alpha ji} &= S_{\alpha j4} = S_{\alpha 4i} = S_{\alpha 44} = S_{aji} = S_{aj4} = S_{a4i} = S_{a44} = \\ &= S_{7ji} = S_{7j4} = S_{8ji} = S_{8j4} = 0, \\ S_{\alpha jm} &= S_{\alpha jn} = S_{\alpha 4m} = S_{ajm} = S_{ajn} = S_{a4n} = S_{7jm} = S_{8jn} = 0, \\ T_{\alpha i} &= T_{\alpha 4} = T_{7i} = T_{74} = T_{ai} = T_{a4} = 0, \\ T_{\alpha m} &= T_{\alpha n} = T_{an} = T_{7m} = T_{7n} = T_{8m} = T_{8n} = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Определения (30) требуют рассмотрения следующих соотношений между компонентами изовекторов:

$$\begin{aligned} T_{\alpha} &= T_7 = S_{74} = S_{84} = 0, \\ \mathcal{E}_k &= \frac{1}{2} e_{\alpha jk} S_{\alpha j}, \quad \mathcal{H}_k = \frac{1}{2} e_{(a-3)jk} S_{aj}, \\ \mathcal{B}_i &= S_{7i} = \delta_{\alpha i} S_{\alpha 4}, \quad \mathcal{D}_i = S_{8i} = -\delta_{(a-3)i} S_{a4}, \\ T_a &= -\delta_{(a-3)i} \mathcal{J}_i, \quad T_8 = -Q, \end{aligned} \quad (32)$$

где $\mathcal{E}_i$, $\mathcal{H}_i$, $\mathcal{B}_i$, $\mathcal{D}_i$, $\mathcal{J}_i$ и Q обозначают компоненты изовекторного поля, отвечающие E_i , H_i , B_i , D_i , J_i и q_f , соответственно. Все компоненты изовекторного поля могут быть легко получены при помощи формул (27) с учетом соотношений (32). Произвольные функции, при обозначении которых в (27) использованы буквы f и g , определяются с использованием ограничений (31) и первого уравнения в (32).

В качестве простого примера мы рассмотрим эффект, к которому приводит обращение в нуль компоненты $S_{\alpha 4m}$. Из первого уравнения в (10) следует, что

$$S_{\alpha 4m} = \frac{\partial F_{\alpha 4}}{\partial E_m} + \frac{\partial F_{\alpha 4}}{\partial \Sigma_{\beta j}} e_{\beta jm} + \frac{\partial F_{\alpha 4}}{\partial \Sigma_{a4}} \sigma_{a4m} + \frac{\partial F_{\alpha 4}}{\partial \Sigma_{8i}} \sigma_{8im} + \frac{\partial F_{\alpha 4}}{\partial \Sigma_a} \tau_{am} = 0. \quad (33)$$

Здесь, как ясно из (8), $F_{\alpha 4} = S_{\alpha 4} - \mathcal{H}_n \sigma_{\alpha 4n}$. Если подставить выражения для $\mathcal{H}_n$ из (32) и $S_{\alpha 4}$ из (27) и ввести второе ограничение из (31), то обращающиеся в нуль компоненты (33) порождают следующие ограничения:

$$\begin{aligned} T_{,j} &= 0, & f_{\alpha a} &= 0, \\ e_{(a-3)jn} (f_{a8} \delta_{ij} - \dot{\phi}_j \delta_{(a-3)i}) &= 0, & f_{a\alpha} &= 0, \end{aligned}$$

где ϕ_i — компоненты изовектора по переменной x_i , а T — компонента изовектора по времени.

Аналогично, используя все ограничения (31) и первое уравнение в (32), находим в конечном счете значимые компоненты изовекторного поля в виде

$$\begin{aligned} T &= \alpha_1 t + \alpha_2, & \phi_i &= a_{ij} x_j + a_i, \\ \mathcal{B}_i &= b_{ij} B_j + b_i, & \mathcal{D}_i &= d_{ij} D_j + d_i, \\ \mathcal{E}_i &= \epsilon_{ij} E_j + \epsilon_i, & \mathcal{H}_i &= h_{ij} H_j + h_i, \\ \mathcal{J}_i &= n_{ij} J_j, & Q &= -\alpha q_f, \end{aligned} \tag{34}$$

где все тензорные и векторные коэффициенты постоянны и должны удовлетворять соотношениям

$$\begin{aligned} e_{ijk} \epsilon_{km} + e_{ijm} \alpha_1 - e_{ikm} a_{jk} - e_{kjm} b_{ik} &= 0, \\ e_{kjm} d_{ik} - e_{ijk} h_{km} - e_{ijm} \alpha_1 + e_{ikm} a_{jk} &= 0, \\ \alpha \delta_{ij} = d_{ij} - a_{ij}, & \quad e_{jik} (n_{ij} + a_{ji}) = 0. \end{aligned}$$

Список литературы

- [1] Э. Картан. Внешние дифференциальные формы и их геометрические приложения. М.: Изд-во МГУ, 1962.
- [2] B. K. Harrison, F. B. Estabrook. J. Math. Phys. 1971. V. 12. P. 653.
- [3] D. G. B. Edelen. Applied Exterior Calculus. New York: Wiley, 1985; Isovector Methods for Equations of Balance. Alphen aan den Rijn: Noordhoff, 1980.
- [4] E. S. Shuhubi. Internat. J. Engrg. Sci. 1991. V. 29. P. 133; 1999. V. 37. P. 1901; 2000. V. 38. P. 715.