Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Темпеста, Симметрии Ли и слабая трансверсальность, *ТМФ*, 2003, том 137, номер 2, 293–308

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf273>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 15:51:27

© 2003 г.

П. Темпеста*

СИММЕТРИИ ЛИ И СЛАБАЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНОСТЬ

Рассматриваются понятие слабой трансверсальности и некоторые примеры, проясняющие его роль в теории групп Ли. В частности, приводятся новые результаты, касающиеся моделей динамики жидкостей и газов.

Ключевые слова: симметрии Ли, слабая трансверсальность.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние десятилетия возобновился интерес к использованию теории групп Ли при изучении точных решений систем дифференциальных уравнений с частными производными. Множество книг и обзорных статей посвящено классическому методу редукции симметрии, предложенному Ли (см., например, [1]–[5]). В этом методе свойство инвариантности системы дифференциальных уравнений относительно действия некоторой группы G точечных преобразований используется для построения классов решений, инвариантных относительно некоторой подгруппы $G_i \subset G$.

Идеи Ли были положены в основу различных новых методов, которые в принципе обеспечивают альтернативные процедуры редукции. Все эти обобщения теории Ли получены путем ослабления какого-нибудь из предположений, содержащихся в классическом подходе.

По существу эти методы могут быть разделены на два класса: методы, основанные на использовании группы G точечных симметрий Ли заданной системы, и методы, не содержащие точечных преобразований.

Метод частично инвариантных решений, предложенный Овсянниковым в работе [3], относится к первому классу. По существу решение $u(x)$ системы дифференциальных уравнений называется *частично инвариантным* относительно подгруппы $G_i \subset G$ группы точечных преобразований, допускаемых системой, если действие подгруппы G_i на $u(x)$ не сохраняет график Γ решения, а порождает некоторое многообразие, размерность которого лежит где-то в интервале между размерностью Γ и размерностью всего пространства переменных. Группа G_i может порождать как инвариантные, так и частично инвариантные решения.

*Centre de Recherches Mathématiques, Université de Montréal, C.P.6128, succ. Centre-ville, Montréal, Québec H3C 3J7, Canada. E-mail: Tempesta@CRM.UMontreal.ca

Критерии неприводимости для разных классов уравнений были последовательно сформулированы Ондичем [6]. Примеры других применений можно найти в работах [7]–[9].

Недавно в работе Андерсона с соавторами [10] было предложено интересное обобщение метода редукции симметрии, в котором стандартное локальное условие трансверсальности больше не требуется. Это позволило авторам получить новые классы решений важных физических уравнений и объяснить, почему некоторые решения, такие как решение Шварцшильда вакуумного уравнения Эйнштейна или инстантонные и монополярные решения уравнений Янга–Милса, хотя и инвариантны относительно точечных преобразований, не могут быть получены стандартным методом редукции симметрии.

Второй класс методов включает некоторые современные методики, основанные на теории Ли. Группы точечных симметрий Ли больше не используются; вместо них рассматриваются некоторые их обобщения.

В неклассическом подходе, впервые предложенном Блюманом и Колем [11], требуется только, чтобы некоторое множество решений заданной системы было левоинвариантным. Это множество обычно отождествляется с классом решений, инвариантных относительно действия соответствующей точечной симметрии. Как показано в работах [12], этот подход также дает теоретико-групповое объяснение прямого метода, введенного Кларксоном и Крускалом [13]. Интересным обобщением неклассического метода, развитого Цикогной и Гаекой [14], является теория “частных точечных симметрий Ли”.

В последние годы изучались некоторые подходы, целью которых было исследование основ теории нелокальных симметрий (см. [15] и приведенные там ссылки). В некоторых из недавних работ пространство зависимых переменных расширяется введением новых переменных, которые могут быть потенциалами или псевдопотенциалами, связанными с рассматриваемым уравнением. Прямой метод также может быть связан с нелокальными симметриями [16].

Как было отмечено в работах [17] и [18], различные методики, основанные на теории групп Ли, можно включить в единый общий подход, называемый методом дополнительных условий. Действительно, почти каждое частное решение системы дифференциальных уравнений может быть получено путем добавления некоторых специальных условий, имеющих вид вспомогательных уравнений, и последующего решения исходной системы с учетом этих ограничений [18]. Тем не менее применить этот метод довольно трудно из-за его общности.

В работе [19] вводится понятие слабой трансверсальности и предлагается метод получения решений дифференциальных уравнений. Этот подход использует группу точечных симметрий, допускаемых заданной системой дифференциальных уравнений, и в его основе лежит теория, развитая авторами [10].

Цель настоящей работы – показать роль метода слабой трансверсальности в контексте теории групп Ли и при определении точных решений физических моделей. В частности, пользуясь этой техникой, мы получаем новые инвариантные относительно группы решения, а также неприводимые частично инвариантные решения для некоторых уравнений динамики жидкости и газа. Метод слабой трансверсальности можно рассматри-

вать как пример более общего подхода, при котором для решения системы дифференциальных уравнений используются как алгебраические, так и дифференциальные дополнительные условия. Это дает возможность ограничить область применения теории групп Ли некоторой подходящей областью в пространстве независимых и зависимых переменных.

В разделе 2 рассматривается связь между классическим методом редукции, понятием слабой трансверсальности и методом алгебраических и дифференциальных ограничений. В разделе 3 метод слабой трансверсальности используется для получения новых инвариантных решений модели теплопроводности Ландау (которая также известна как уравнения Навье–Стокса–Фурье [20], [21]). Также получена соответствующая $(3 + 1)$ -мерная группа симметрий. В разделе 4 рассматривается несколько примеров, иллюстрирующих связь между частично инвариантными решениями и условиями сильной и слабой трансверсальности. Заключительные замечания приводятся в разделе 5.

2. ИНВАРИАНТНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ГРУППЫ РЕШЕНИЯ И УСЛОВИЕ СЛАБОЙ ТРАНСВЕРСАЛЬНОСТИ

Во-первых, рассмотрим некоторые нужные нам в дальнейшем аспекты теории Ли симметрий систем дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП) [1]–[5].

Рассмотрим систему ДУЧП n -го порядка

$$\Delta_\nu(x, u^{(n)}) = 0, \quad \nu = 1, \dots, m, \quad (1)$$

которая содержит p независимых переменных $x = (x_1, \dots, x_p)$, q зависимых переменных $u = (u_1, \dots, u_q)$ и их производные по x_i вплоть до порядка n . Пусть $M = X \times U$ – пространство независимых и зависимых переменных.

Здесь и всюду в дальнейшем мы будем рассматривать только связные группы преобразований, для того чтобы иметь возможность выразить условия инвариантности через бесконечно малые генераторы действия группы. Дискретные группы симметрий рассматриваться не будут. В локальной системе координат бесконечно малые генераторы r -мерной группы G преобразований симметрии уравнений (1) могут быть представлены векторными полями вида

$$\mathbf{v}_k = \sum_{i=1}^p \xi_i^k(x, u) \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{\alpha=1}^q \varphi_\alpha^k(x, u) \frac{\partial}{\partial u_\alpha}, \quad k = 1, \dots, r. \quad (2)$$

Характеристики, соответствующие таким полям, определяются соотношениями

$$Q_\alpha^k(x, u^{(1)}) = \varphi_\alpha^k(x, u) - \sum_{i=1}^p \xi_i^k(x, u) \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i}, \quad \alpha = 1, \dots, q, \quad k = 1, \dots, r. \quad (3)$$

Символом $X \times U^{(n)}$ будем обозначать пространство струй n -го порядка в пространстве $X \times U$, а именно пространство независимых и зависимых переменных и их производных вплоть до порядка n . Имеет место следующая теорема Софуса Ли.

ТЕОРЕМА. Связная группа G преобразований является группой симметрий системы дифференциальных уравнений (1) тогда и только тогда, когда каждый бесконечно малый генератор $\mathbf{v}$, будучи поднятым до пространства $X \times U^{(n)}$, аннулирует систему (1) на многообразии ее решений, а именно

$$\mathrm{pr}^{(n)} \mathbf{v}(\Delta_\nu)|_{\Delta=0} = 0, \quad \nu = 1, \dots, m. \quad (4)$$

Здесь $\mathrm{pr}^{(n)} \mathbf{v}$ обозначает продолжение векторного поля $\mathbf{v}$ на пространство n -й струи (см. [1], гл. 2.3).

Предположим также, что действие группы G регулярно. Тогда все ее орбиты имеют одинаковую размерность s ; число инвариантов этого действия равно коразмерности $K = p + q - s$ орбит группы G в M .

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ натянута на множества векторных полей, удовлетворяющих соотношениям (4). После того как все подалгебры $\mathfrak{g}_i \subset \mathfrak{g}$ должным образом классифицированы как классы сопряженности относительно действия группы G (см., например, [5] и приведенные там ссылки), нужно найти множество функционально независимых инвариантов для каждой подалгебры $\mathfrak{g}_i \subset \mathfrak{g}$. Эти инварианты являются решениями линейной системы первого порядка

$$\mathbf{v}_l I = 0, \quad l = 1, \dots, r_i = \dim \mathfrak{g}_i. \quad (5)$$

Всюду в дальнейшем символ G будет обозначать какую-либо подгруппу группы симметрий, допускаемых системой (1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Будем говорить, что функция f является G -инвариантной, если ее график $\Gamma = \{x, f(x)\}$ инвариантен относительно действия группы G , т.е. если соотношение

$$g \cdot \Gamma = \Gamma \quad (6)$$

выполняется при каждом $g \in G$.

Можно доказать, что функция f G -инвариантна тогда и только тогда, когда она является решением характеристической системы

$$Q_\alpha^k(x, f^{(1)}) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, q, \quad k = 1, \dots, r = \dim G. \quad (7)$$

Чтобы получить G -инвариантные решения, на подходящем фактор-многообразии M/G строится приведенная система дифференциальных уравнений Δ/G . Условие локальной трансверсальности играет определяющую роль в процедуре редукции. В локальной системе координат оно формулируется следующим образом.

Введем матрицы Ξ_1 и Ξ_2 коэффициентов векторных полей $\{\mathbf{v}_k\}$, на которые натянута алгебра $\mathfrak{g}$, соответствующая группе G , и определим их следующим образом:

$$\begin{aligned} \Xi_1 &= \{\xi_i^k(x, u)\}, & \Xi_1 &\in \mathbb{R}^{p \times r}, \\ \Xi_2 &= \{\xi_i^k(x, u), \varphi_\alpha^k(x, u)\}, & \Xi_2 &\in \mathbb{R}^{(p+q) \times r}, \end{aligned} \quad (8)$$

где i и α нумеруют ряды, а $k = 1, \dots, r$ — столбцы. Если действие группы G регулярно и трансверсально на $M \sim X \times U$, то в каждой точке $(x, u) \in M$

$$\mathrm{rank}\{\xi_i^k(x, u)\} = \mathrm{rank}\{\xi_i^k(x, u), \varphi_\alpha^k(x, u)\}. \quad (9)$$

Этот ранг равен размерности s орбит общего положения группы G на M . Условие (9), налагаемое на ранг, будем называть “условием сильной трансверсальности”.

Предположим, что существует $K = p + q - s$ функционально независимых и глобально определенных инвариантов. Следовательно, якобиан

$$J = \left(\frac{\partial I_j}{\partial x_i}, \frac{\partial I_j}{\partial u_\alpha} \right), \quad i = 1, \dots, p, \quad \alpha = 1, \dots, q, \quad j = 1, \dots, K,$$

всюду имеет ранг $p + q - s$ (см., например, [1], с. 236). Если условие трансверсальности (9) выполняется, по крайней мере локально, при всех $\{x, u\} \in M$, то классический метод редукции можно применять непосредственно. Действительно, можно показать, что в этом случае подматрица $(\partial I_j / \partial u_\alpha)$ всюду имеет ранг q (доказательство можно найти, например, в [1], гл. 3.5).

Если действие группы G на M сохраняет расслоение, то имеется ровно $p - s$ инвариантов $\{\chi_1, \dots, \chi_{p-s}\}$, зависящих только от переменных $x = (x_1, \dots, x_p)$, которые можно принять за новые независимые переменные. Оставшиеся q инвариантов $\{\psi_1, \dots, \psi_q\}$ играют роль новых зависимых переменных. Таким образом, мы получили некоторую редукцию симметрии и можем построить явные решения системы (1).

Если действие группы G на M не сохраняет расслоения, то у нас нет такого ясного разделения множества инвариантов, и мы можем произвольным образом выбрать $p - s$ инвариантов в качестве независимых переменных и использовать другие q инвариантов в качестве зависимых переменных [1]. В этом случае процедура редукции обычно дает неявные решения системы (1).

В обоих случаях, применяя теорему о неявных функциях, мы можем выразить $p - s$ старых независимых переменных $\{\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{p-s}\}$ через инварианты $\{\chi_1, \dots, \chi_{p-s}\}$, а старые зависимые переменные $\{u_1, \dots, u_q\}$ через инварианты $\{\psi_1, \dots, \psi_q\}$. Эти инварианты параметризуют фактор-многообразие M/G , которое является открытым подмножеством евклидова пространства $\mathbb{R}^{p+q-s}$.

Подставляя новые переменные в исходные уравнения, мы получаем систему дифференциальных уравнений, зависящих от $\{\chi_i, \psi_\alpha, x_m\}$, где $\{x_m\}$ — это s старых независимых переменных ($m = p - s + 1, \dots, p$). Переменные $\{x_m\}$ всегда можно сократить, и мы приходим к приведенной системе Δ/G , содержащей на s меньше независимых переменных, определенных на M/G . Имеется взаимно однозначное соответствие между решениями системы Δ/G и G -инвариантными решениями системы Δ . Точнее, каждое решение приведенной системы Δ/G определяет G -инвариантное решение и, наоборот, каждое G -инвариантное решение системы Δ соответствует решению системы Δ/G .

В соответствии с формулой (7) мы можем характеризовать G -инвариантные решения как решения системы, полученные путем приравнивания нулю всех характеристик, соответствующих генераторам $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$ группы G . Следовательно, можно немедленно сделать вывод, что G -инвариантные решения — это не что иное, как решения переопределенной системы

$$\begin{cases} \Delta_\nu(x, u^{(n)}) = 0, & \nu = 1, \dots, m, \\ Q_k^\alpha(x, u^{(1)}) = 0, & \alpha = 1, \dots, q, \quad k = 1, \dots, r. \end{cases} \quad (10)$$

В работе [10] предложен геометрический метод построения групп инвариантных решений в случае, когда условие (9) не выполняется. Этот подход можно модифицировать и сформулировать в терминах локальных координат, введя понятие “слабой трансверсальности” [19].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Будем говорить, что условие локальной трансверсальности выполняется в слабом смысле, если существует область $M_0 \subset M$, в которой выполняется соотношение

$$\text{rank}\{\xi_i^k(x, u)\}|_{M_0} = \text{rank}\{\xi_i^k(x, u), \varphi_\alpha^k(x, u)\}|_{M_0}. \quad (11)$$

Возможное применение метода “слабой трансверсальности” осуществляется в несколько шагов.

1. Найти в явном виде область M_0 , определяемую функциями $u = f(x)$, при которых уравнение (11) выполняется.

2. Подставить полученные выражения в матрицу характеристик и потребовать, чтобы ранг этой матрицы был равен некоторому целому числу δ . Если требуется получить инвариантные относительно группы решения, то надо положить $\delta = 0$.

3. Подставить условия, полученные таким образом для функций u , в некоторую систему, инвариантную относительно действия рассматриваемой группы G . Таким образом, получаются несколько приведенных уравнений, решения которых, если они существуют, дают или инвариантные относительно группы, или частично инвариантные решения порядка δ исходной системы.

ЗАМЕЧАНИЕ. Важным различием между методом слабой трансверсальности и методом, предложенным в работе [10], является то, что здесь больше не требуется сохранения расслоения действия группы. Следовательно, этот метод можно применить для решения более обширных классов задач.

Отметим, что метод слабой трансверсальности можно рассматривать как пример общего подхода, в котором вводятся как *алгебраические*, так и *дифференциальные ограничения*. При этом подходе в принципе ищутся решения переопределенной системы дифференциальных и алгебраических уравнений. В контексте метода слабой трансверсальности они имеют вид

$$\begin{cases} \Delta_\nu(x, u^{(n)}) = 0, & \nu = 1, \dots, m, \\ Q_k^\alpha(x, u^{(1)}) = 0, & \alpha = 1, \dots, q, \quad k = 1, \dots, r, \\ E_\lambda(x, u) = 0, & \lambda = 1, \dots, l. \end{cases} \quad (12)$$

Дифференциальные ограничения $Q_k^\alpha(x, u^{(1)}) = 0$ являются ДУЧП первого порядка, описывающими характеристики точечных симметрий Ли системы $\Delta_\nu(x, u^{(n)}) = 0$. Кроме того, система $E_\lambda(x, u) = 0$ алгебраических уравнений входит во множество ограничений. В общем случае эти уравнения задают подпространство $M_0 \subset M$, на котором выполняется условие локальной трансверсальности. Следовательно, система $Q_k^\alpha(x, u^{(1)}) = 0$ является алгебраически совместной. При проверке условия трансверсальности для групп симметрий в сильном смысле очевидно, что система $E_\lambda(x, u) = 0$

удовлетворяется тождественно. Следовательно, схема (12) является некоторым обобщением стандартного метода редукции симметрии, так как она позволяет применить его в тех случаях, когда система, описывающая характеристики, разрешима только на подпространстве M_0 , а не на всем пространстве M . Мы приводим несколько примеров решений, полученных этим методом, в работе [19] и в настоящей статье.

Например, можно рассматривать более общую ситуацию, в которой дифференциальные ограничения в схеме (12) являются характеристиками слабых или неклассических симметрий системы $\Delta_\nu(x, u^{(n)}) = 0$, или когда (как в работах [18]) дифференциальные ограничения $Q_k^\alpha(x, u^{(m)}) = 0$ могут зависеть от производных высших порядков.

Подробное обсуждение этого метода выходит за рамки данной статьи. Замечу только, что изначальное ограничение применений теории групп Ли на области, где должны выполняться некоторые особые условия (например, алгебраическая разрешимость системы, описывающей характеристики), по крайней мере в подходе слабой трансверсальности, в принципе расширяет класс точных решений, которые можно построить.

В разделах 3 и 4 будут рассмотрены некоторые новые случаи применения метода слабой трансверсальности.

3. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СЛАБОЙ ТРАНСВЕРСАЛЬНОСТИ: МОДЕЛЬ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ЛАНДАУ

Уравнения, описывающие поток теплопроводящей вязкой жидкости, были предложены Ландау [22]; они также носят название уравнений Навье–Стокса–Фурье [23]. Эти уравнения имеют вид

$$\vec{u}_t + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} + \nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) - \nu \nabla^2 \vec{u} = 0, \quad (13)$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad (14)$$

$$T_t + \vec{u} \cdot \nabla T = k_H \nabla^2 T + \frac{\eta}{\rho C_p} \sum_{i,j} (\partial_i u_j + \partial_j u_i)^2, \quad (15)$$

где $\vec{u} = (u_1(x, y, z, t), u_2(x, y, z, t), u_3(x, y, z, t))$ – поле скоростей, $T = T(x, y, z, t)$ – температура, p – давление жидкости, ρ – плотность жидкости, η – динамическая вязкость, $\nu = \eta/\rho$ – кинематическая вязкость, C_p – теплоемкость, κ – теплопроводность, $k_H = \kappa/(\rho C_p)$ – температуропроводность и $\partial_i \equiv \partial/\partial x_i$ ($x_1 \equiv x$, $x_2 \equiv y$, $x_3 \equiv z$).

Одной из отличительных черт модели (13)–(15) является то, что ρ постоянна. Хотя это предположение кажется слишком идеальным для описания физической ситуации, тем не менее уравнения (13)–(15) (при $\rho = \text{const}$) представляют довольно интересную модель, являющуюся исходной точкой для изучения таких систем, как модели Рэлея и Лоренца, в которых тепловые явления играют весьма существенную роль [23]. Уравнение эволюции температуры (15) содержит нелинейный член сложного вида, который описывает возникающую из-за вязких эффектов диссипацию энергии.

Симметрии двумерной относительно пространственных переменных модели (13)–(15) изучались в работе [20], а некоторые феноменологические аспекты трехмерной модели

обсуждались в [21]. В настоящей работе основное внимание уделяется свойствам симметрии модели (13)–(15), размерность которой равна $(3+1)$. Эти свойства используются в контексте метода слабой трансверсальности. Применяя теорему и проводя длительные вычисления, мы видим, что уравнения (13)–(15) инвариантны относительно потока, порождаемого следующими векторными полями:

$$B_1 = \alpha \partial_x + \dot{\alpha} \partial_{u_1} - \ddot{\alpha} x \partial_p, \quad (16)$$

$$B_2 = \beta \partial_y + \dot{\beta} \partial_{u_2} - \ddot{\beta} y \partial_p, \quad (17)$$

$$B_3 = \gamma \partial_z + \dot{\gamma} \partial_{u_3} - \ddot{\gamma} z \partial_p, \quad (18)$$

$$P_0 = \partial_t, \quad (19)$$

$$Q = \delta \partial_p, \quad (20)$$

$$D = x \partial_x + y \partial_y + z \partial_z + 2t \partial_t - u_1 \partial_{u_1} - u_2 \partial_{u_2} - u_3 \partial_{u_3} - 2p \partial_p - 2T \partial_T, \quad (21)$$

$$L_1 = z \partial_y - y \partial_z + u_3 \partial_{u_2} - u_2 \partial_{u_3}, \quad (22)$$

$$L_2 = x \partial_z - z \partial_x + u_1 \partial_{u_3} - u_3 \partial_{u_1}, \quad (23)$$

$$L_3 = y \partial_x - x \partial_y + u_2 \partial_{u_1} - u_1 \partial_{u_2}, \quad (24)$$

$$T = \partial_T, \quad (25)$$

где α, β, γ и δ – произвольные функции времени. Физический и геометрический смысл операторов (16)–(25) вполне очевиден. Если функции α, β и γ постоянны или линейны по времени, то операторы B_j порождают соответственно пространственные сдвиги и подъемы Галилея. Операторы P_0 и Q порождают сдвиги по времени и давлению, D – масштабные преобразования и L_1, L_2, L_3 – группу вращений в пространстве координат и скоростей, соответствующих данной модели.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим подалгебру, порожденную L_1, L_2 и L_3 . Матрицы коэффициентов $\Xi_1 = (\xi_i^k(x, u))$ и $\Xi_2 = (\xi_i^k(x, u), \phi_\alpha^k(x, u))$ имеют вид

$$\Xi_1 = \begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix}, \quad \Xi_2 = \begin{pmatrix} 0 & z & -y & 0 & u_3 & -u_2 \\ -z & 0 & x & -u_3 & 0 & u_1 \\ y & -x & 0 & u_2 & -u_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (26)$$

В общем случае ранги этих матриц не равны друг другу, и классический метод редукции в принципе не может быть применен. Однако можно потребовать, чтобы трансверсальность имела место в слабом смысле, а именно на некотором подпространстве M_0 пространства независимых и зависимых переменных. В этом случае мы получаем

$$u_1 = f(x, y, z, t)x, \quad u_2 = f(x, y, z, t)y, \quad u_3 = f(x, y, z, t)z, \quad (27)$$

тогда как p и T остаются произвольными. Решая характеристическую систему $Q_\alpha^k(x, u^{(1)}) = 0$ на M_0 , мы получаем дополнительные ограничения (связи)

$$f = f(r, t), \quad p = p(r, t), \quad (28)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Подставляя эти выражения для $\vec{u}$ и p в уравнения (13)–(15), получаем

$$\vec{u} = \frac{a(t)}{r^3} \vec{x}, \quad p = \rho \frac{\dot{a}}{r} - \rho \frac{a^2}{2r^4} + b \quad (29)$$

и уравнение для поля температуры

$$T_t - \frac{k}{\rho C_p} (T_{xx} + T_{yy} + T_{zz}) + \frac{a(t)}{r^{3/2}} (xT_x + yT_y + zT_z) - \frac{12\eta a^2}{\rho C_p r^3} = 0. \quad (30)$$

Формула (29) совпадает с решением уравнений Эйлера, которое получил Андерсон с соавторами в работе [10], применив геометрический подход. Преобразование (27) использовалось также в работах [9] для нахождения частично инвариантных решений уравнений, описывающих $(3+1)$ -мерный нестационарный изэнтропический поток идеальной сжимаемой жидкости.

Уравнения (29) также представляют собой решение уравнений Навье–Стокса, так как все компоненты вектора $\vec{u}$ в уравнении (29) являются гармоническими функциями. Это не удивительно, так как решения, инвариантные относительно преобразований симметрии, обычно соответствуют физическим ситуациям, в которых вязкость фактически не играет никакой роли и которые характеризуются очень малыми числами Рэлея или Тейлора.

Рассмотрим случай стационарных решений. Предполагая, что $T = T(r)$, и полагая $a(t) = A = \text{const}$, получим следующее решение уравнения (30):

$$T(r) = c_1 k_H \exp \left[-\frac{A}{k_H r} \right] - \frac{24k_H^2 \eta_H}{Ar} + \frac{12k_H \eta_H}{r^2} - \frac{4A\eta_H}{r^3} + c_2, \quad (31)$$

где $\eta_H = \eta/(\rho C_p)$, а c_1 и c_2 – константы.

ПРИМЕР 2. Здесь мы рассмотрим подалгебру, порождаемую двумя подъемами и вращением:

$$\alpha \partial_x + \dot{\alpha} \partial_{u_1} - \ddot{\alpha} x \partial_p, \quad (32)$$

$$\alpha \partial_y + \dot{\alpha} \partial_{u_2} - \ddot{\alpha} y \partial_p, \quad (33)$$

$$y \partial_x - x \partial_y + u_2 \partial_{u_1} - u_1 \partial_{u_2}, \quad (34)$$

где $\alpha = \alpha(t)$ – произвольная функция времени. Условие локальной трансверсальности не выполняется в сильном смысле, но может выполняться в слабом. Теперь матрица Ξ_2 имеет вид

$$\Xi_2 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & \dot{\alpha} & 0 & 0 & -\ddot{\alpha} x \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & \dot{\alpha} & 0 & -\ddot{\alpha} y \\ y & -x & 0 & 0 & u_2 & -u_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (35)$$

Условие слабой трансверсальности эквивалентно условиям

$$u_1 = x \frac{\dot{\alpha}}{\alpha}, \quad u_2 = y \frac{\dot{\alpha}}{\alpha}, \quad (36)$$

$$u_3 = u_3(x, y, z, t), \quad p = p(x, y, z, t), \quad T = T(x, y, z, t). \quad (37)$$

Чтобы получить инвариантные решения, удовлетворяющие условию слабой трансверсальности, будем решать характеристическую систему $Q_\alpha^k(x, u^{(1)}) = 0$ в области, определяемой уравнениями (36), (37). Мы получим условия

$$u_3 = u_3(z, t), \quad p = -\frac{1}{2}\rho(x^2 + y^2)\frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} + P_1(z, t), \quad T = T(z, t). \quad (38)$$

Алгебра симметрий уравнений Навье–Стокса для (3+1)-мерной вязкой несжимаемой жидкости (13), (14) была определена в работе [24] и изучалась многими авторами (см., например, [25] и приведенные там ссылки). Эти уравнения инвариантны относительно подгруппы, порождаемой векторными полями (32)–(34). Подставляя формулы (36) и (38) в систему (13), (14), получим решение (при $\rho = 1$)

$$u_1 = x\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}, \quad u_2 = y\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}, \quad (39)$$

$$u_3 = -2\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}z + f(t), \quad (40)$$

$$p = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 - 2z^2)\frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} - 3z^2\left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\right)^2 + 2z\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}f(t) - \dot{f}(t)z + g(t), \quad (41)$$

которое также является решением уравнений Эйлера. При $\alpha = kt$ решение (39)–(41) представляет собой центрированную волну, являющуюся типичным примером простой волны [26].

В случае, когда $\alpha = e^{\lambda t}$ и $f(t) = 0$, уравнение (15) дает интересное решение

$$T = e^{-t\omega} \left\{ a_1 F_1 \left(\frac{\omega}{4\lambda}, \frac{1}{2}, -\lambda \frac{z^2}{k_H} \right) + bz_1 F_1 \left(\frac{1}{2} + \frac{\omega}{4\lambda}, \frac{3}{2}, -\lambda \frac{z^2}{k_H} \right) \right\} + T_p,$$

где

$$T_p = c \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{\lambda}{k_H}} z \right) - 6 \frac{\lambda^2 z^2 \eta}{k} {}_2F_2 \left[(1, 1), \left(\frac{3}{2}, 2 \right), -\lambda \frac{z^2}{k_H} \right], \quad (42)$$

$a, b, c, \omega \in \mathbb{R}$ ($\omega > 0$), и ${}_pF_q$ – обобщенная гипергеометрическая функция [27]. Формула (42) описывает долговременное поведение решения. Изотермичные поверхности – это плоскости, ортогональные оси z .

4. УСЛОВИЕ ЛОКАЛЬНОЙ ТРАНСВЕРСАЛЬНОСТИ И ЧАСТИЧНО ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ

В этом разделе мы будем изучать условие локальной трансверсальности (и, в частности, понятие слабой трансверсальности) в связи с теорией частично инвариантных решений. Во-первых, полезно вспомнить понятие дефекта δ для k -мерного многообразия M относительно группы Ли G [3]. Предполагается, что действие группы G регулярно и группа имеет s -мерные орбиты. Пусть $\Gamma \subseteq M$ – p -мерное подмногообразие $\Gamma \subseteq M$. Оно отождествляется с графиком Γ_f функции $u = f(x)$. Орбита, порождаемая группой G , – это подмножество $G(\Gamma_f) \subset M$, которое не обязательно является подмногообразием. Если f – инвариантная функция, тогда, конечно, это условие выполняется, так

как $G(\Gamma_f) = \Gamma_f$. В общем случае, если пересечение орбиты O группы G с графиком Γ_f имеет постоянную в окрестности N некоторой точки графика Γ_f размерность, то существует такая окрестность $\tilde{G}$ единичного элемента группы G , что подмножество $\tilde{G}(N \cap \Gamma_f)$ является подмногообразием [6].

В последующем анализе $G(\Gamma_f)$ будет считаться подмногообразием. Число

$$\delta = \dim G(\Gamma_f) - \dim \Gamma_f \quad (43)$$

называется *дефектом* δ функции f относительно G . При $\delta = 0$ функция f G -инвариантна. Функция называется *генерической*, если $\delta = m_0 = \min\{s, k-p\}$. При $0 < \delta < m_0$ функция f называется *частично инвариантной* [3].

Пусть G – группа симметрий системы дифференциальных уравнений $\Delta_\nu(x, u^{(n)}) = 0$, действующая на $(p+q)$ -мерном пространстве $M = X \times U$. Пусть $\mathfrak{g}_i$ – подалгебра алгебры симметрий $\mathfrak{g}$ системы Δ . Функция $u = f(x)$ является частично инвариантным решением системы Δ с дефектом δ относительно $\mathfrak{g}_i$ тогда и только тогда, когда [3], [6]

$$\text{rank}(Q(x, u^{(1)})) = \delta, \quad (44)$$

где $Q = \{Q_\alpha^k\}$ представляет собой матрицу характеристик, соответствующую множеству генераторов подалгебры $\mathfrak{g}_i$. Решая расширенную систему, состоящую из уравнений (1) и (44), получаем частично инвариантные решения системы Δ .

Пусть $u_0 = u_0(x_0)$ – решение системы Δ . Если условие

$$\text{rank}(\xi_i^k(x_0, u_0)) < \text{rank}(\xi_i^k(x_0, u_0), \phi_\alpha^k(x_0, u_0)) \quad (45)$$

выполнено, то u_0 не является решением, инвариантным относительно группы. Действительно, из неравенства (45) следует, что характеристическая система не является алгебраически совместной на этом решении. Следовательно, u_0 является либо частично инвариантным решением системы Δ , либо генерическим решением (общего положения).

Тем не менее нарушение условия трансверсальности *не* является необходимым условием для существования частично инвариантных решений системы $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$. Это объясняется тем, что могут существовать решения системы Δ , которые не будут решениями характеристической системы, даже если она является совместной алгебраической системой. В случае, когда выполняется условие сильной трансверсальности, группа симметрий может порождать как инвариантные, так и частично инвариантные решения.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим уравнения Эйлера, описывающие $(3+1)$ -мерную несжимаемую невязкую жидкость:

$$\vec{u}_t + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} + \nabla p = 0, \quad (46)$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0. \quad (47)$$

Подгруппа преобразований Галилея порождается операторами

$$K_1 = t\partial_x + \partial_{u_1}, \quad K_2 = t\partial_y + \partial_{u_2}, \quad K_3 = t\partial_z + \partial_{u_3}. \quad (48)$$

Здесь условие трансверсальности выполняется в сильном смысле, и инвариантное решение действительно имеет вид

$$u_1 = \frac{x}{t} + F_1(t), \quad u_2 = \frac{y}{t} + F_2(t), \quad u_3 = \frac{z}{t} + F_3(t), \quad p = P(t). \quad (49)$$

Чтобы построить частично инвариантные относительно группы преобразований Галилея решения системы (46), (47), мы предположим, что rank $Q = \delta = 2$. Тогда

$$u_1 = \frac{x}{t} - \mu\lambda\frac{z}{t} + \mu\lambda u_3 + h_1(t), \quad (50)$$

$$u_2 = \mu u_3 + \frac{y}{t} - \mu\frac{z}{t} + h_2(t), \quad (51)$$

где $u_3 = u_3(x, y, z, t)$ и $p = p(x, y, z, t)$ – произвольные функции. Подставляя соотношения (50), (51) в уравнения Эйлера и для простоты полагая $h_1 = h_2 = 0$, мы получаем следующее решение (представленное в работе [19]):

$$u_1 = \frac{1}{t[\mu^2(1 + \lambda^2) + 1]} \{x[\mu^2(1 - 2\lambda^2) + 1] - 3\lambda\mu(\mu y + z)\} + \lambda\mu t^2 F\left(\frac{\lambda y - x}{t}, \frac{\lambda\mu z - x}{t}\right), \quad (52)$$

$$u_2 = \frac{1}{t[\mu^2(1 + \lambda^2) + 1]} \{y[\mu^2(\lambda^2 - 2) + 1] - 3\mu(\lambda\mu x + z)\} + \mu t^2 F\left(\frac{\lambda y - x}{t}, \frac{\lambda\mu z - x}{t}\right), \quad (53)$$

$$u_3 = \frac{1}{t[\mu^2(1 + \lambda^2) + 1]} \{z[\mu^2(1 + \lambda^2) - 2] - 3(\lambda x + y)\} + t^2 F\left(\frac{\lambda y - x}{t}, \frac{\lambda\mu z - x}{t}\right), \quad (54)$$

$$p = -\frac{3\mu^2}{t^2(\lambda^2\mu^2 + \mu^2 + 1)} \left(\lambda x + y + \frac{z}{\mu}\right)^2 + p(t), \quad (55)$$

где λ, μ – константы, F – произвольная функция своих аргументов и p – произвольная функция t . Если F остается произвольной функцией, то это решение является *неприводимым*, а именно не является инвариантным относительно любой подгруппы группы симметрий. Ее дефект равен $\delta = 2$. Если

$$F = \left(\frac{\lambda y - x}{t}\right)^{(3a+2b)/a} \Phi\left(\frac{\lambda y - x}{\lambda\mu z - x}\right), \quad a, b \in \mathbb{R},$$

где Φ – произвольная функция своих аргументов, то решение (52)–(55) является *приводимым*: действительно, оно инвариантно относительно подгруппы, порождаемой $aD_1 + bD_2$, где D_1 и D_2 имеют вид

$$D_1 = x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z + t\partial_t, \quad (56)$$

$$D_2 = t\partial_t - u_1\partial_{u_1} - u_2\partial_{u_2} - u_3\partial_{u_3} - 2p\partial_p. \quad (57)$$

Можно ввести новый класс решений, имеющих свойство частичной инвариантности относительно подгруппы G , удовлетворяющей условию слабой, а не сильной трансверсальности. Действительно, наложение условия локальной трансверсальности на множество M_0 пространства независимых и зависимых переменных, конечно, не является достаточным для гарантии того, что ранг матрицы Q будет равен нулю на этой области. Следовательно, как частично инвариантные, так и инвариантные относительно группы решения в принципе могут быть найдены на M_0 . Этот факт можно легко описать в терминах схемы (12). Теперь алгебраические ограничения определяют множество M_0 , и условие $\text{rank } Q \neq 0$ следует из дифференциальных ограничений. В следующем примере мы покажем, как с помощью этого подхода непосредственно можно простым путем получить классы решений гидродинамических систем.

ПРИМЕР 4. В примере 2 изучалась алгебра (32)–(34), являющаяся подалгеброй алгебры симметрий как уравнений Эйлера, так и уравнений Навье–Стокса. Из условия слабой трансверсальности следует, что

$$u_1 = x \frac{\dot{\alpha}}{\alpha}, \quad u_2 = y \frac{\dot{\alpha}}{\alpha}, \quad (58)$$

$$u_3 = u_3(x, y, z, t), \quad p = p(x, y, z, t). \quad (59)$$

Эти формулы определяют класс функций, которые являются частично инвариантными и имеют дефект $\delta = 2$ относительно подалгебры (32)–(34). На этой стадии можно строить либо инвариантные относительно группы решения, либо частично инвариантные. Действительно, вместо наложения условия, что класс функций (58), (59) является решением характеристической системы, можно подставить формулы (58), (59) непосредственно в уравнения Эйлера (46), (47) или в уравнения Навье–Стокса (13), (14), не требуя выполнения других инвариантных свойств. В случае уравнений Эйлера мы получаем следующие ограничения:

$$p_x + \frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} x = 0, \quad (60)$$

$$p_y + \frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} y = 0, \quad (61)$$

$$u_{3z} + 2 \frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} = 0, \quad (62)$$

$$u_{3t} + u_3 u_{3z} + \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} (x u_{3x} + y u_{3y}) + p_z = 0. \quad (63)$$

Решая эту систему, приходим к решению уравнений Эйлера, частично инвариантному относительно алгебры (32)–(34):

$$u_1 = x \frac{\dot{\alpha}}{\alpha}, \quad u_2 = y \frac{\dot{\alpha}}{\alpha}, \quad (64)$$

$$u_3 = -2 \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} z + x^2 F\left(\frac{y}{x}, \ln \frac{\alpha}{x}\right), \quad (65)$$

$$p = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 - 2z^2) \frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} - 3z^2 \left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\right)^2 + f(t), \quad (66)$$

где α , f и F — произвольные функции своих аргументов. Это решение является неприводимым для генерических F . Оно приводимо, когда функция $F = F(\xi, \ln \chi)$ удовлетворяет линейному уравнению

$$[c_1 \chi \xi - c_2 \chi + c_4(1 - \xi^2)]F_\xi - (c_3 + c_4 \xi + c_1 \chi)\chi F_\chi + (2c_1 \chi + 2c_4 \xi + c_3)F = 0,$$

где $\xi = y/x$, $\chi = \alpha/x$. В этом случае решение (64)–(66) инвариантно относительно потока, порождаемого полем

$$\mathbf{w} = c_1 B_1 + c_2 B_2 + c_3(D_1 - D_2) + c_4 L_3,$$

где α , γ и δ — произвольные функции t , $f(t) = 0$ и $c_1, \dots, c_4 \in \mathbb{R}$.

Аналогичная процедура может применяться для решения уравнений Навье–Стокса. Получается следующий класс решений:

$$u_1 = x \frac{\dot{\alpha}}{\alpha}, \quad u_2 = y \frac{\dot{\alpha}}{\alpha}, \quad (67)$$

$$u_3 = -2 \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} z + \psi(x, y, t) \quad (68)$$

$$p = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 - 2z^2) \frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} - 3z^2 \left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \right)^2 + f(t), \quad (69)$$

где функция $\psi(x, y, t)$ удовлетворяет линейному уравнению

$$\psi_t + \frac{\dot{\alpha}}{\alpha}(x\psi_x + y\psi_y - 2\psi) - \nu(\psi_{xx} + \psi_{yy}) = 0 \quad (70)$$

при произвольном α . Простое (инвариантное относительно вращения) решение уравнения (70) при $\alpha = e^{\lambda t}$, которое быстро затухает, если $\lambda < 0$, существует при условии

$$\psi = \exp \left[\frac{3\lambda}{\nu} t + \frac{\lambda}{4\nu}(x^2 + y^2) \right] \left(\gamma_1 I_0 \left[\frac{\lambda}{4\nu}(x^2 + y^2) \right] + \gamma_2 K_0 \left[-\frac{\lambda}{4\nu}(x^2 + y^2) \right] \right), \quad (71)$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \lambda \in \mathbb{R}$, а I_0 и K_0 — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода, соответственно [27].

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой статье мы обсудили некоторые альтернативные возможности использования групп точечных преобразований, допускаемых системой дифференциальных уравнений с частными производными. Действительно, как только получена наибольшая группа инвариантности G и проведена ее классификация, сразу возникает несколько возможностей.

Если условие трансверсальности (9) выполняется в строгом смысле, то применим метод классической редукции. Если условие сильной трансверсальности не выполняется, то мы все же можем получить инвариантные относительно G_0 решения, если потребуем,

чтобы они удовлетворяли условию “слабой трансверсальности”. Это показано в разделе 3, где с помощью теории групп проанализирована модель теплопроводности Ландау и получены новые точные решения.

Если условие трансверсальности не выполняется в слабом смысле, то характеристическая система $Q_k^\alpha(x, u^{(1)}) = 0$ не является алгебраически совместной. В этом случае все же можно получить частично инвариантные решения как решения “частично приведенной” системы, в которой только $q' < q$ зависимых переменных можно выразить через инварианты. Оставшиеся $q - q'$ переменных u_α рассматриваются как функции всех первоначальных переменных $\{x_1, \dots, x_p\}$. Некоторые решения этого вида приводятся в работах [8], [19] и в настоящей статье.

Помимо инвариантных решений можно получить частично инвариантные, налагая сначала условие слабой трансверсальности (если это возможно), а затем условие $\text{rank } Q = \delta \neq 0$ (см. пример 4). Другими словами, обе группы инвариантных и частично инвариантных решений могут быть получены в некотором подходящем подпространстве $M_0 \subset M$.

Конечно, этими случаями не исчерпываются все возможные ситуации: иные методы, не основанные на точечных преобразованиях, также могут применяться [13]–[16].

Как уже отмечалось, можно дополнить метод дифференциальных ограничений некоторыми подходящими алгебраическими условиями с тем, чтобы обеспечить возможность применения методов теории групп на конкретных подпространствах пространств переменных. Например, метод слабой трансверсальности легко переформулировать (как для инвариантных относительно группы решений, так и для частично инвариантных) в терминах переопределенной системы алгебраических и дифференциальных ограничений, как это показано в разделе 2. Было бы интересно рассмотреть другие примеры решений (не обязательно инвариантных относительно группы или частично инвариантных), полученных в рамках общего подхода.

Задача изучения того, как связаны между собой многочисленные методы, обобщающие теорию Ли, остается открытой. Мы называем *неприводимыми* все решения системы дифференциальных уравнений с частными производными, которые не могут быть получены с помощью стандартных методов редукции. Эти решения не являются инвариантными относительно какой-либо подгруппы максимальной группы точечных преобразований, допускаемых системой. В разделе 4 мы рассматриваем несколько примеров неприводимых решений в контексте метода слабой трансверсальности.

Благодарности. Автор выражает благодарность профессорам А. М. Грюндланду, Р. А. Лео, Г. Солиани и П. Винтерницу за полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] П. Олвер. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.
- [2] G. W. Bluman, S. Kumei. Symmetries and Differential Equations. New York: Springer, 1989.
- [3] Л. В. Овсянников. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
- [4] Н. Х. Ибрагимов. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983; G. Gaeta. Nonlinear Symmetries and Nonlinear Equations. Dordrecht: Kluwer, 1994.
- [5] P. Winternitz. Group theory and exact solutions of partially integrable differential systems. In: Partially Integrable Evolution Equations in Physics. Eds. R. Conte, N. Boccara. Amsterdam:

- Kluwer, 1990. P. 515; Lie Groups and solutions of nonlinear partial differential equations. In: Integrable Systems, Quantum Groups and Quantum Field Theory. Eds. A. Ibort, M. A. Rodriguez. Dordrecht: Kluwer, 1993. P. 429.
- [6] *J. Ondich.* Eur. J. Appl. Math. 1995. V. 6. P. 329; P. 631.
- [7] *Н. Х. Ибрагимов.* ДАН СССР. 1968. Т. 178. С. 27; Т. 187. С. 25; *Л. В. Овсянников.* ДАН СССР. 1969. Т. 186. С. 22; *C. C. A. 'Sastri, K. A. Dunn, D. R. K. S. Rao.* J. Math. Phys. 1987. V. 28. P. 1473.
- [8] *L. Martina, P. Winternitz.* J. Math. Phys. 1992. V. 33. P. 2718; *L. Martina, G. Soliani, P. Winternitz.* J. Phys. A. 1992. V. 25. P. 4425.
- [9] *A. M. Grundland, L. Lalague.* J. Phys. A. 1996. V. 29. P. 1723; Can. J. Phys. 1994. V. 72. P. 362.
- [10] *I. M. Anderson, M. E. Fels, C. G. Torre.* Commun. Math. Phys. 2000. V. 212. P. 653; math-ph/0101012.
- [11] *G. W. Bluman, J. D. Cole.* J. Math. Mech. 1969. V. 18. P. 1025.
- [12] *E. Pucci.* J. Phys. A. 1992. V. 25. P. 2631; *D. Levi, P. Winternitz.* J. Phys. A. 1989. V. 22. P. 2915.
- [13] *P. Clarkson, M. Kruskal.* J. Math. Phys. 1989. V. 30. P. 2201; *P. Clarkson, E. Mansfield.* SIAM J. Appl. Math. 1994. V. 54. P. 1693.
- [14] *G. Cicogna, G. Gaeta.* J. Phys. A. 2001. V. 34. P. 491.
- [15] *G. W. Bluman, G. J. Reid, S. Kumei.* J. Math. Phys. 1988. V. 29. P. 806; *I. S. Krasil'shchik, A. M. Vinogradov.* Acta Appl. Math. 1989. V. 15. P. 161; *M. Leo, R. A. Leo, G. Soliani, P. Tempesta.* Progr. Theor. Phys. 2001. V. 105. P. 77; *P. J. Olver, J. Sanders, J. P. Wang.* J. Nonlinear Math. Phys. 2002. V. 9. P. 164.
- [16] *G. Saccomandi.* J. Phys. A. 1997. V. 30. P. 2211.
- [17] *А. Ф. Сидоров, В. П. Шапеев, Н. Н. Яненко.* Метод дифференциальных ограничений и его применение в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 1984.
- [18] *P. J. Olver, P. Rosenau.* Phys. Lett. A. 1986. V. 114. P. 107; SIAM J. Appl. Math. 1987. V. 47. P. 263.
- [19] *A. M. Grundland, P. Tempesta, P. Winternitz.* J. Math. Phys. 2003. V. 44. P. 2704.
- [20] *V. Grassi, R. A. Leo, G. Soliani, P. Tempesta.* Physica A. 2001. V. 293. P. 421.
- [21] *V. Grassi, R. A. Leo, G. Soliani, P. Tempesta.* Physica A. 2002. V. 305. P. 371.
- [22] *Л. Д. Ландау, Е. М. Луфшиц.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
- [23] *G. Gallavotti.* Foundations of Fluid Dynamics. Berlin: Springer, 2002; <http://ipparco.roma1.infn.it/pagine/libri.html>.
- [24] *S. P. Lloyd.* Acta Mech. 1981. V. 38. P. 85.
- [25] *V. Grassi, R. A. Leo, G. Soliani, P. Tempesta.* Physica A. 2000. V. 286. P. 79.
- [26] *Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко.* Системы квазилинейных уравнений и их применения в газовой динамике. М.: Наука, 1978.
- [27] Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. Ред. М. А. Абрамовиц, И. А. Стиган. М.: Мир, 1979.