Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Б. Зенг, Ю. Ж. Шао, В. М. Ху, Позитонные решения уравнения Кортевега–де Фриза с самосогласованными источниками, *ТМФ*, 2003, том 137, номер 2, 309–320

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf274>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 04:52:09

© 2003 г.

Ю. Б. Зенг*, Ю. Ж. Шао*, В. М. Ху†

ПОЗИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ
УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА–ДЕ ФРИЗА С
САМОСОГЛАСОВАННЫМИ ИСТОЧНИКАМИ

Для уравнения Кортевега–де Фриза с самосогласованными источниками построено бинарное преобразование Дарбу с произвольной функцией времени. С помощью этого преобразования получены позитонные решения уравнения Кортевега–де Фриза с самосогласованными источниками. Обсуждаются свойства таких решений.

Ключевые слова: уравнение КдФ с самосогласованными источниками, позитон, бинарное преобразование Дарбу.

1. ВВЕДЕНИЕ

Солитонные уравнения с самосогласованными источниками играют важную роль в физических приложениях (см. [1]–[3]). Например, уравнение Кортевега–де Фриза (КдФ) с самосогласованными источниками (далее для краткости мы называем самосогласованные источники просто источниками) описывает взаимодействие длинных и коротких капиллярно-гравитационных волн. Уравнение КдФ с источниками является бинарной бесконечномерной интегрируемой гамильтоновой системой [4] и может быть решено методом обратной задачи рассеяния [1], [3], [5], [6]. Подобно обычному уравнению КдФ, уравнение КдФ с источниками некоторого типа также обладает N -солитонными решениями; отличие заключается лишь в том, что скорость солитона в последнем случае не пропорциональна его амплитуде.

Было установлено [7], что интегрируемые уравнения типа КдФ обладают позитонными решениями, которые являются дальнодействующими аналогами солитонов и представляют собой медленно убывающие осциллирующие решения. При подходящем выборе данных рассеяния однопозитонные и многопозитонные потенциалы обладают замечательным свойством: соответствующий коэффициент отражения равен нулю, а коэффициент прохождения равен единице. Потенциалы такого типа называются суперпрозрачными или супербезотражательными. Важную роль в нахождении позитонных

*Department of Mathematical Sciences, Tsinghua University, Beijing 100084, China. E-mail: yzeng@math.tsinghua.edu.cn

†Mathematical Department, Hong Kong Baptist University, Hong Kong, China

решений играет преобразование Дарбу (ПД). В работе [7] с использованием так называемого обобщенного ПД для уравнения КдФ были получены однопозитонные, многопозитонные и позитон-солитонные решения и исследованы позитон-позитонное и позитон-солитонное взаимодействия. Как известно, ПД может быть применено повторно, что дает формулы типа Грама для солитонных уравнений. Однако существует альтернативный метод для получения этих результатов, который предполагает замену исходной волновой функции скалярного типа на векторную, как было предложено в работах [8].

Возникает естественный вопрос о том, обладает ли уравнение КдФ с источниками позитонными решениями. Успех в построении N -солитонных решений уравнения КдФ с источниками при помощи бинарного ПД [9] и связь между бинарным ПД и обобщенным ПД [10] побудили нас к нахождению бинарного ПД с произвольной функцией времени. С помощью этого преобразования Беклунда между уравнениями КдФ с источниками различного порядка, не являющегося автопреобразованием, можно получить позитонные решения уравнения КдФ с источниками некоторого вида. В сравнении с однопозитонным решением уравнения КдФ однопозитонное решение уравнения КдФ с источниками имеет аналогичное пространственное поведение в фиксированный момент времени, обладает таким же свойством суперпрозрачности, но имеет другое временное поведение, например асимптотическое поведение при $t \rightarrow \pm\infty$ для фиксированного x , и другую скорость полюса. Многопозитонные и позитон-солитонные решения могут быть получены посредством N -кратного повторения ПД с N произвольными функциями времени.

Настоящая статья организована следующим образом. В разделе 2 мы выводим бинарное ПД с произвольной функцией времени для уравнения КдФ с источниками. Мы обнаруживаем, что это ПД дает общие формулы для солитонных решений уравнения КдФ с источниками и что эти формулы совпадают с формулами, полученными с помощью метода обратной задачи [6]. В разделе 3 мы исследуем некоторые примеры позитонных решений, полученных посредством данного ПД.

2. ПД С ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФУНКЦИЕЙ ВРЕМЕНИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КДФ С САМОСОГЛАСОВАННЫМИ ИСТОЧНИКАМИ

Уравнение КдФ с источниками порядка n — это система уравнений с $n + 1$ неизвестными $u(x, t), \varphi_1(x, t), \dots, \varphi_n(x, t)$ вида [1], [3]–[5]

$$\begin{aligned} u_t + 6uu_x + u_{xxx} + 4 \sum_{j=1}^n \varphi_j \varphi_{j,x} &= 0, \\ \varphi_{j,xx} + (\lambda_j + u)\varphi_j &= 0, \quad j = 1, \dots, n, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где λ_j — различные константы. Пусть $\Phi_n = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$. Тогда вспомогательная линейная система имеет вид [9]

$$\phi_{xx} + (\lambda + u)\phi = 0, \tag{2.2a}$$

$$\phi_t = A_n(\lambda, u, \Phi_n)\phi, \tag{2.2b}$$

где

$$A_n(\lambda, u, \Phi_n)\phi = u_x\phi + (4\lambda - 2u)\phi_x + \sum_{j=1}^n \frac{\varphi_j}{\lambda_j - \lambda} W(\varphi_j, \phi),$$

$W(\varphi_j, \phi) \equiv \varphi_j\phi_x - \varphi_{j,x}\phi$ — обычный определитель Вронского. Известно, что классическое ПД для уравнения КДФ может быть перенесено на уравнение КДФ с источниками [9]. Пусть f — решение системы (2.2) с $\lambda = \xi$, т.е.

$$f_{xx} + (\xi + u)f = 0, \quad (2.3a)$$

$$f_t = A_n(\xi, u, \Phi_n)f. \quad (2.3b)$$

Тогда система (2.2) ковариантна по отношению к действию ПД, определенному следующим образом [9]:

$$\tilde{\phi} = \frac{W(f, \phi)}{f}, \quad (2.4a)$$

$$\tilde{u} = u + 2\partial_x^2 \ln f, \quad (2.4b)$$

$$\tilde{\varphi}_j = \frac{1}{\sqrt{\lambda_j - \xi}} \frac{W(f, \varphi_j)}{f}, \quad (2.4b)$$

т.е. $\tilde{\phi}$, $\tilde{u}$ и $\tilde{\Phi}_n = (\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_n)$ удовлетворяют системе

$$\tilde{\phi}_{xx} + (\lambda + \tilde{u})\tilde{\phi} = 0, \quad (2.5a)$$

$$\tilde{\phi}_t = A_n(\lambda, \tilde{u}, \tilde{\Phi}_n)\tilde{\phi}, \quad (2.5b)$$

и $\tilde{u}$, $\tilde{\Phi}_n$ представляют собой новое решение системы (2.1). С помощью этого ПД мы получим два линейно независимых решения системы (2.5) с $\lambda = \xi$, каждое из которых выражается только через f . Прежде всего, пусть f_1 — другое решение системы (2.2) с $\lambda = \xi$ и пусть f и f_1 линейно независимы, т.е. $W(f, f_1) \neq 0$. Формула (2.4a) дает решение (2.5) с $\lambda = \xi$:

$$\tilde{f}_1 = \frac{W(f, f_1)}{f}. \quad (2.6)$$

Прямое вычисление показывает, что $\partial_x W(f, f_1) \equiv 0$ и $\partial_t W(f, f_1) \equiv 0$; это означает, что $W(f, f_1)$ — константа. Функцию f_1 можно выбрать таким образом, что $W(f, f_1) = 1$ и, следовательно, $\tilde{f}_1 = f^{-1}$.

Далее, пусть g — решение системы (2.2) с $\lambda = \eta$. Если $\xi \neq \eta$, то определим

$$\omega(f, g) = \frac{W(f, g)}{\xi - \eta}.$$

В силу (2.4a) функция

$$\tilde{g} = \frac{1}{\xi - \eta} \frac{W(f, g)}{f} = \frac{1}{f} \omega(f, g)$$

является решением системы (2.5) с $\lambda = \eta$. Мы находим, что если функция $f = f(\xi)$ аналитична по ξ и если положить $g = f(\eta)$, то

$$\omega(f, f) \equiv \lim_{\eta \rightarrow \xi} \frac{W(f(\xi), f(\eta))}{\xi - \eta} = -W(f, \partial_\xi f).$$

Поэтому $\tilde{f} \equiv \omega(f, f)/f$ есть другое решение системы (2.5) с $\lambda = \xi$.

Пусть C – некоторая произвольная константа. Тогда функция вида

$$\tilde{h} \equiv \tilde{f} + C\tilde{f}_1 = \frac{1}{f}[C + \omega(f, f)] \quad (2.7)$$

также является решением системы (2.5) с $\lambda = \xi$. Используя f и $\tilde{h}$ последовательно, применим ПД (2.4) дважды и получим

$$\begin{aligned} \bar{\phi} &= \frac{1}{\lambda - \xi} \frac{W(\tilde{h}, \tilde{\phi})}{\tilde{h}} = \phi - \frac{f}{C + \omega(f, f)} \omega(f, \phi), \\ \bar{u} &= \tilde{u} + 2\partial_x^2 \ln \tilde{h} = u + 2\partial_x^2 \ln[C + \omega(f, f)], \\ \bar{\varphi}_j &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_j - \xi}} \frac{W(\tilde{h}, \tilde{\varphi}_j)}{\tilde{h}} = \varphi_j - \frac{f}{C + \omega(f, f)} \omega(f, \varphi_j), \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Мы называем такое ПД бинарным ПД. Как можно видеть, система (2.2) ковариантна относительно действия бинарного ПД, т.е. $\bar{\phi}$, $\bar{u}$ и $\bar{\Phi}_n \equiv (\bar{\varphi}_1, \dots, \bar{\varphi}_n)$, определенные формулами (2.8), удовлетворяют системе

$$\bar{\phi}_{xx} + (\lambda + \bar{u})\bar{\phi} = 0, \quad (2.9a)$$

$$\bar{\phi}_t = A_n(\lambda, \bar{u}, \bar{\Phi}_n)\bar{\phi} \quad (2.9b)$$

и $\bar{u}$, $\bar{\Phi}_n$ удовлетворяют уравнению (2.1). Отметим, что $\partial_x \omega(f, f) = f^2$, $\partial_x \omega(f, \phi) = f\phi$ и $\partial_x \omega(f, \varphi_j) = f\varphi_j$. Если наложить условия интегрируемости функций f^2 , $f\phi$ и $f\varphi_j$ в точке $x = -\infty$, то величины $\omega(f, f)$, $\omega(f, \phi)$ и $\omega(f, \varphi_j)$ можно заменить соответственно на $\int_{-\infty}^x f^2 dx$, $\int_{-\infty}^x f\phi dx$ и $\int_{-\infty}^x f\varphi_j dx$. В этом случае бинарное ПД (2.8) сведется к исходному бинарному ПД из работы [9].

Подстановка (2.8) в (2.9b) дает

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_t &= \left[\phi - \frac{f}{C + \omega(f, f)} \omega(f, \phi) \right]_t = \\ &= \phi_t - \frac{f_t \omega(f, \phi)}{C + \omega(f, f)} + \frac{f \partial_t \omega(f, f)}{[C + \omega(f, f)]^2} \omega(f, \phi) - \frac{f \partial_t \omega(f, \phi)}{C + \omega(f, f)} = \\ &= A_n(\lambda, \bar{u}, \bar{\Phi}_n)\bar{\phi}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

При подстановке (2.8) в выражение для $A_n(\lambda, \bar{u}, \bar{\Phi}_n)\bar{\phi}$ последнее равенство выполнено для любой константы C . Выражение для $A_n(\lambda, u, \Phi_n)\phi$ не содержит производных по времени t . Легко видеть, что последнее равенство остается справедливым при замене константы C на произвольную функцию времени $e(t)$. Имеем следующую лемму.

ЛЕММА 1. Пусть u, Φ_n – решение уравнения (2.1). Если f – решение системы (2.2), то последнее равенство в (2.10) имеет место для $C = e(t)$.

Система (2.2) не является более ковариантной относительно действия ПД, определенных формулами (2.8), в которых константа C заменена на функцию $e(t)$ такую, что $e'(t) \equiv de(t)/dt \neq 0$. Однако такая замена приводит к преобразованию Беклунда, не являющемуся автопреобразованием Беклунда, которое превращает старую систему с источниками порядка n в некоторую новую систему с источниками порядка $n + 1$.

ЛЕММА 2. Пусть u, Φ_n – решение уравнения (2.1). Если f – решение линейной системы (2.2) с $\lambda = \lambda_{n+1}$, то ПД, определенное формулами

$$\bar{\phi} = \phi - \frac{f}{e(t) + \omega(f, f)} \omega(f, \phi), \quad (2.11a)$$

$$\bar{u} = u + 2\partial_x^2 \ln[e(t) + \omega(f, f)], \quad (2.11b)$$

$$\bar{\varphi}_j = \varphi_j - \frac{f}{e(t) + \omega(f, f)} \omega(f, \varphi_j), \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.11b)$$

$$\bar{\varphi}_{n+1} = \frac{\sqrt{e'(t)}f}{e(t) + \omega(f, f)}, \quad (2.11r)$$

переводит систему (2.2) в систему

$$\bar{\phi}_{xx} + (\lambda + \bar{u})\bar{\phi} = 0, \quad (2.12a)$$

$$\bar{\phi}_t = A_{n+1}(\lambda, \bar{u}, \bar{\Phi}_{n+1})\bar{\phi}, \quad (2.12b)$$

$u, \bar{u}, \bar{\Phi}_{n+1} \equiv (\bar{\varphi}_1, \dots, \bar{\varphi}_{n+1})$ есть решение уравнения КДФ с источниками порядка $n + 1$:

$$\bar{u}_t + 6\bar{u}\bar{u}_x + \bar{u}_{xxx} + 4 \sum_{j=1}^{n+1} \bar{\varphi}_j \bar{\varphi}_{j,x} = 0, \quad (2.13a)$$

$$\bar{\varphi}_{j,xx} + (\lambda_j + \bar{u})\bar{\varphi}_j = 0, \quad j = 1, \dots, n + 1. \quad (2.13b)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что если величины u, f и ϕ удовлетворяют (2.2a) и (2.3a), то имеет место (2.5a). Хотя функция $\tilde{h}$, определенная выражением (2.7), в котором константа C заменена функцией $e(t)$, не обязана быть решением системы (2.5) при $e'(t) \neq 0$, она по-прежнему удовлетворяет уравнению (2.5a). Путем аналогичного рассуждения убеждаемся, что имеют место уравнения (2.12a) и (2.13b) с $\bar{\phi}, \bar{u}$ и $\bar{\Phi}_n$, которые определены формулами (2.11). Чтобы доказать (2.12b), подставим (2.11a) в левую часть (2.12b) и получим

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_t &= \left[\phi - \frac{f}{C + \omega(f, f)} \omega(f, \phi) \right]_t = \\ &= \phi_t - \frac{f_t \omega(f, \phi)}{e(t) + \omega(f, f)} + \frac{f[e'(t) + \partial_t \omega(f, f)]}{[e(t) + \omega(f, f)]^2} \omega(f, \phi) - \frac{f \partial_t \omega(f, \phi)}{e(t) + \omega(f, f)} = \\ &= A_n(\lambda, \bar{u}, \bar{\Phi}_n) \bar{\phi} + \frac{e'(t) \omega(f, \phi) f}{[e(t) + \omega(f, f)]^2}. \end{aligned}$$

Последнее равенство следует из леммы 1. С другой стороны, имеем

$$\frac{W(\bar{\varphi}_{n+1}, \bar{\phi})}{\lambda_{n+1} - \lambda} = \frac{\sqrt{e'(t)}\omega(f, \phi)}{e(t) + \omega(f, f)}.$$

Следовательно,

$$\bar{\phi}_t = A_n(\lambda, \bar{u}, \bar{\Phi}_n)\bar{\phi} + \frac{\bar{\varphi}_{n+1}W(\bar{\varphi}_{n+1}, \bar{\phi})}{\lambda_{n+1} - \lambda} = A_{n+1}(\lambda, \bar{u}, \bar{\Phi}_{n+1})\bar{\phi}.$$

Уравнение (2.13a) выполнено, поскольку оно является условием совместности для системы (2.12). Это завершает доказательство леммы.

ПД, определенное формулами (2.11), зависит от произвольной функции времени t , и мы называем его бинарным ПД с произвольной функцией времени. В том случае, если $e(t) \equiv C$, это преобразование, очевидно, сводится к бинарному ПД, определенному формулами (2.8). Однако свобода в выборе функций $e(t)$ и f позволяет построить новые решения уравнения КдФ с источниками, которые не могут быть построены при помощи исходного бинарного ПД.

ПРИМЕР 1: ОДНОСОЛИТОННОЕ РЕШЕНИЕ. Начнем с уравнения (2.1) при $n = 0$ и возьмем $u = 0$ в качестве начального решения. Пусть $\lambda_1 = -\kappa^2$, $\kappa > 0$, $f = e^{\kappa x - 4\kappa^3 t}$ и $e(t) = e^{2\beta(t)}$, где $\beta(t)$ — произвольная функция от t . Тогда формулы (2.11б) и (2.11г) дают односолитонное решение уравнения (2.1) с $n = 1$:

$$\begin{aligned}\bar{u} &= 2\kappa^2 \operatorname{sch}^2(\kappa x - 4\kappa^3 t - \beta(t) + x_0), \\ \bar{\varphi}_1 &= \sqrt{\kappa\beta'(t)} \operatorname{sch}(\kappa x - 4\kappa^3 t - \beta(t) + x_0).\end{aligned}\tag{2.14}$$

В работе [9] уравнение КдФ с источником первого порядка имеет вид

$$\begin{aligned}u_t &= -\frac{1}{4}(6uu_x + u_{xxx}) - 2\alpha\varphi_1\varphi_{1,x}, \\ \varphi_{1,xx} + (\lambda_1 + u)\varphi_1 &= 0,\end{aligned}$$

где α — некоторая константа, и его односолитонное решение, полученное посредством обычного бинарного ПД, дается формулами

$$\begin{aligned}\bar{u} &= 2\kappa^2 \operatorname{sch}^2\left(\kappa x - \kappa^3 t - \frac{1}{2}\alpha t + x_0\right), \\ \bar{\varphi}_1 &= \frac{1}{2}\sqrt{2\kappa} \operatorname{sch}\left(\kappa x - \kappa^3 t - \frac{1}{2}\alpha t + x_0\right).\end{aligned}\tag{2.15}$$

Легко видеть, что решение (2.14) является более общим, чем решение (2.15), поскольку (2.14) содержит произвольную функцию времени $\beta(t)$.

Ясно, что бинарное ПД с произвольной функцией времени может быть применено повторно для получения новых решений уравнения КдФ с источниками. Для m решений

уравнения Шредингера (2.2a) $g_1, \dots, g_m$, соответствующих $\lambda = \lambda_1, \dots, \lambda_m$, определим два новых типа определителей Вронского, зависящих от m дополнительных функций $e_1(t), \dots, e_m(t)$ переменной t , следующим образом:

$$\begin{aligned} W_1(g_1, \dots, g_m; e_1, \dots, e_m) &= \det F, \\ W_2(g_1, \dots, g_m; e_1, \dots, e_{m-1}) &= \det G, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} F_{ij} &= \delta_{ij} e_i(t) + \omega(g_i, g_j), \quad i, j = 1, \dots, m, \\ G_{ij} &= \delta_{ij} e_i(t) + \omega(g_i, g_j), \quad i = 1, \dots, m-1, \quad j = 1, \dots, m, \\ G_{mj} &= g_j, \quad j = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Используя эти определения, дадим формулу для N -кратно повторенного бинарного ПД с N произвольными функциями времени.

ТЕОРЕМА. Пусть u, Φ_n – решение уравнения (2.1), $f_1, \dots, f_N$ – решения системы (2.2) с $\lambda = \lambda_{n+1}, \dots, \lambda_{n+N}$, соответственно, и $e_1(t), \dots, e_N(t)$ – N произвольных функций переменной t . Тогда N -кратно повторенное бинарное ПД с N произвольными функциями времени, определенное формулами

$$\bar{\phi} = \frac{W_2(f_1, \dots, f_N, \phi; e_1, \dots, e_N)}{W_1(f_1, \dots, f_N; e_1, \dots, e_N)}, \quad (2.16a)$$

$$\bar{u} = u + 2\partial_x^2 \ln W_1(f_1, \dots, f_N; e_1, \dots, e_N), \quad (2.16б)$$

$$\bar{\varphi}_j = \frac{W_2(f_1, \dots, f_N, \varphi_j; e_1, \dots, e_N)}{W_1(f_1, \dots, f_N; e_1, \dots, e_N)}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.16в)$$

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_{n+j} &= \frac{\sqrt{e'_j(t)} W_2(f_1, \dots, f_{j-1}, f_{j+1}, \dots, f_N, f_j; e_1, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, \dots, e_N)}{W_1(f_1, \dots, f_N; e_1, \dots, e_N)}, \\ j &= 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (2.16г)$$

переводит систему (2.2) в систему

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_{xx} + (\lambda + \bar{u})\bar{\phi} &= 0, \\ \bar{\phi}_t &= A_{n+N}(\lambda, \bar{u}, \bar{\Phi}_{n+N})\bar{\phi}, \end{aligned}$$

и $\bar{u}, \bar{\Phi}_{n+N}$ есть решение уравнения КДФ с источниками порядка $n + N$.

Доказательство этой теоремы полностью аналогично доказательству, приведенному в [9], и мы его опускаем.

ПРИМЕР 2: N -СОЛИТОННОЕ РЕШЕНИЕ. Возьмем $u = 0$ в качестве начального решения уравнения (2.1) с $n = 0$ и пусть

$$e_i(t) = e^{2\beta_i(t)}, \quad f_i = e^{\kappa_i x - 4\kappa_i^3 t}, \quad i = 1, \dots, N,$$

где $\beta_i(t)$ – произвольные функции. Тогда формулы (2.16б) и (2.16г) дают N -солитонное решение уравнения (2.1) с $n = N$ и $\lambda_j = -\kappa_j^2 < 0$, $j = 1, \dots, N$. Это также более общее решение, чем N -солитонное решение, приведенное в [9].

3. ПОЗИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КДФ С ИСТОЧНИКАМИ

В этом разделе мы дадим несколько примеров позитонных решений уравнения КДФ с источниками, полученных при помощи бинарного ПД с произвольными функциями времени, и обсудим их свойства. Позитонные решения уравнения КДФ были получены и исследованы в работе [7]. Для удобства сравнения наших результатов с результатами работы [7] мы используем сходные обозначения и определения.

3.1. Однопозитонное решение и суперпрозрачность. Возьмем $u = 0$ в качестве начального решения уравнения (2.1) с $n = 0$. Пусть $\lambda_1 = \kappa^2 > 0$ и f – осциллирующее решение системы (2.2) с $u = 0$, $n = 0$ и $\lambda = \lambda_1$,

$$f = \sin \Theta, \quad \Theta = \kappa(x + x_1 + 4\kappa^2 t), \quad (3.1)$$

где $x_1 = x_1(\kappa)$ – аналитическая в окрестности точки κ функция с вещественными коэффициентами Тейлора. Тогда определенное формулами (2.11) ПД дает решение уравнения (2.1) с $n = 1$ и $\lambda_1 = \kappa^2$:

$$\begin{aligned} u &= 2\partial_x^2 \ln[e(t) + \omega(f, f)], \\ \varphi_1 &= \frac{\sqrt{e'(t)}f}{e(t) + \omega(f, f)}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Простым и содержательным является выбор в качестве $e(t)$ линейной функции времени t ,

$$e(t) = at + b, \quad (3.3)$$

где $a \neq 0$ и b – вещественные константы. Тогда формулы (3.2) дают однопозитонное решение уравнения (2.1) с $n = 1$ и $\lambda_1 = \kappa^2$,

$$\begin{aligned} u &= 2\partial_x^2 \ln(2\kappa\gamma - \sin 2\Theta) = \frac{32\kappa^2 \sin \Theta (\kappa\gamma \cos \Theta - \sin \Theta)}{(2\kappa\gamma - \sin 2\Theta)^2}, \\ \varphi_1 &= \frac{4\kappa\sqrt{a} \sin \Theta}{2\kappa\gamma - \sin 2\Theta}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где

$$\gamma = \partial_\kappa \Theta + 2e(t) = x + x_2 + (12\kappa^2 + 2a)t + 2b, \quad x_2 = x_1 + \kappa \partial_\kappa x_1(\kappa).$$

Решение линейной системы (2.2) с $n = 1$ для определенных формулами (3.4) u и φ_1 имеет вид

$$\begin{aligned} \psi(x, k) &\equiv \frac{W_2(f, e^{ikx+4ik^3t}; e(t))}{e(t) + \omega(f, f)} = \\ &= \left(-k^2 + \frac{4ik\kappa \sin^2 \Theta}{\sin 2\Theta - 2\kappa\gamma} - \kappa^2 \frac{\sin 2\Theta + 2\kappa\gamma}{\sin 2\Theta - 2\kappa\gamma} \right) \frac{e^{ikx+4ik^3t}}{-k^2 + \kappa^2}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Основываясь на формулах (3.4) и (3.5), можно исследовать основные свойства одно-
позитонного решения. Прежде всего, для фиксированных t имеем

$$u = 4\kappa x^{-1} \sin 2\Theta [1 + O(x^{-1})], \quad \varphi_1 = 2\sqrt{a}x^{-1} \sin \Theta [1 + O(x^{-1})], \quad x \rightarrow \pm\infty.$$

Если x фиксировано и $a \neq -6\kappa^2$, то имеем

$$u = \frac{2\kappa}{6\kappa^2 + a} t^{-1} \sin 2\Theta [1 + O(t^{-1})], \quad \varphi_1 = \frac{\sqrt{a}}{6\kappa^2 + a} t^{-1} \sin \Theta [1 + O(t^{-1})], \quad t \rightarrow \pm\infty.$$

Функция u как функция от x имеет полюс второго порядка, а φ_1 — полюс первого порядка. Эти полюсы расположены в одной и той же точке $x = x_0(t)$, определяемой уравнением $\sin 2\Theta - 2\kappa\gamma = 0$. Этот полюс осциллирует вокруг точки $x_{as}(t)$ с амплитудой $(2\kappa)^{-1}$, где $x_{as}(t) \equiv -(12\kappa^2 + 2a)t - x_2 - 2b$. Пусть $\delta = 2\kappa\gamma$. Тогда

$$\delta = \sin(\delta + 2\kappa(x_1 - x_2 - 2b) - (16\kappa^3 + 2a)t).$$

Единственность решения δ может быть легко доказана, и решение для δ может быть выписано как

$$\delta(t) = (\text{id} - \arcsin)^{-1}(2\kappa(x_1 - x_2 - 2b) - (16\kappa^3 + 2a)t),$$

где id обозначает тождественное преобразование. Можно видеть, что если $a \neq -8\kappa^3$, то $\delta(t)$ является периодической функцией по t ,

$$\delta\left(t + \frac{2\pi}{16\kappa^3 + 2a}\right) = \delta(t),$$

в противном случае δ не зависит от t .

Далее, из формул (3.4) следует, что однопозитонное решение и его источник имеют общую последовательность нулей $\Theta = \pm\pi$, которые распространяются с постоянной скоростью $-4\kappa^2$, но потенциал u имеет еще одну последовательность нулей, скорость распространения которых не постоянна.

Используя (3.5), можно исследовать данные рассеяния для однопозитонного решения уравнения (2.1) с $n = 1$. Асимптотическое поведение функции ψ , определенной (3.5), имеет вид

$$\psi = e^{ikx + 4ik^3t} [1 + o(1)], \quad x \rightarrow \pm\infty.$$

Зафиксируем теперь решение Йоста для уравнения Шредингера, потребовав следующего асимптотического поведения:

$$f(x, k, t) = e^{ikx} [1 + o(1)], \quad x \rightarrow +\infty,$$

и наряду с этим зафиксируем коэффициенты отражения и прохождения $b(k, t)$ и $a(k, t)$ формулой

$$f = a(k, t)e^{ikx} + b(k, t)e^{-ikx}, \quad x \rightarrow -\infty.$$

В случае однопозитонного потенциала имеем

$$f(x, k, t) = \psi e^{-4ik^3 t}, \quad b(k, t) = 0, \quad a(k, t) = 1.$$

Как отмечалось в работе [7], такое определение данных рассеяния для сингулярного позитонного потенциала отвечает случаю, когда продолжение решения Йоста в левую часть оси через полюс описывается той же формулой. Следовательно, однопозитонное решение уравнения (2.1) с $n = 1$ является суперпрозрачным.

Скорости позитона и его источника определяются как скорости их полюсов. Согласно этому определению, позитон и его источник имеют одинаковую скорость

$$v(t) = \frac{d}{dt}x_0(t) = -12\kappa^2 - 2a + \frac{\delta'(t)}{2\kappa}.$$

Если $a = -8\kappa^3$, то $\delta'(t) \equiv 0$, и полюс распространяется с постоянной скоростью $v = -12\kappa^2 - 2a = 4\kappa^2(4\kappa - 3)$. Если $a \neq -8\kappa^3$, то $v(t) = v(t + T)$, где $T = 2\pi/(16\kappa^3 + 2a)$, и средняя скорость равна

$$\frac{1}{T} \int_0^T v dt = -12\kappa^2 - 2a.$$

Очевидно, что при $a = 0$ однопозитонное решение с источником, заданное (3.4), сводится к однопозитонному решению уравнения КдФ $u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$. Из проведенного выше рассмотрения можно заключить, что однопозитонное решение уравнения (2.1) с $n = 1$ имеет ту же форму, то же асимптотическое поведение при $x \rightarrow \pm\infty$ и те же данные рассеяния, что и однопозитонное решение уравнения КдФ без источников. Существенные свойства позитонного решения, такие как суперпрозрачность, сохраняются после введения источников, в то время как другие свойства могут измениться или даже пропасть. Например, если в качестве $e(t)$ выбрать нелинейную функцию, такую как экспонента e^t , то скорость может не быть более периодической функцией, и мы можем не иметь более постоянной средней скорости.

3.2. Двухпозитонные и многопозитонные решения. Двухпозитонное решение уравнения (2.1) с $n = 2$ и $\lambda_1 = \kappa_1^2 > 0$, $\lambda_2 = \kappa_2^2 > 0$ имеет вид

$$u = 2\partial_x^2 \ln W_1(f_1, f_2; e_1, e_2), \quad (3.6a)$$

$$\varphi_1 = \frac{\sqrt{e_1'} W_2(f_2, f_1; e_2)}{W_1(f_1, f_2; e_1, e_2)}, \quad (3.6b)$$

$$\varphi_2 = \frac{\sqrt{e_2'} W_2(f_1, f_2; e_1)}{W_1(f_1, f_2; e_1, e_2)}, \quad (3.6в)$$

где

$$\begin{aligned} f_j &= \sin \Theta_j, & \Theta_j &= \kappa_j(x + x_j + 4\kappa_j^2 t), & j &= 1, 2, \\ e_j &= a_j t + b_j, & a_j &\neq 0, & j &= 1, 2. \end{aligned}$$

Нетрудно найти, что

$$\begin{aligned}
 W_1(f_1, f_2; e_1, e_2) &= (16\kappa_1\kappa_2)^{-1}(2\kappa_1\gamma_1 - \sin 2\Theta_1)(2\kappa_2\gamma_2 - \sin 2\Theta_2) - \\
 &\quad - (\kappa_1^2 - \kappa_2^2)^{-2}(\kappa_2 \sin \Theta_1 \cos \Theta_2 - \kappa_1 \sin \Theta_2 \cos \Theta_1)^2, \\
 W_2(f_2, f_1; e_2) &= (4\kappa_2)^{-1} \sin \Theta_1 (2\kappa_2\gamma_2 - \sin 2\Theta_2) - \\
 &\quad - (\kappa_1^2 - \kappa_2^2)^{-1} \sin \Theta_2 (\kappa_2 \sin \Theta_1 \cos \Theta_2 - \kappa_1 \sin \Theta_2 \cos \Theta_1), \\
 W_2(f_1, f_2; e_1) &= (4\kappa_1)^{-1} \sin \Theta_2 (2\kappa_1\gamma_1 - \sin 2\Theta_1) - \\
 &\quad - (\kappa_1^2 - \kappa_2^2)^{-1} \sin \Theta_1 (\kappa_2 \sin \Theta_1 \cos \Theta_2 - \kappa_1 \sin \Theta_2 \cos \Theta_1),
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

где

$$\gamma_j = x + \tilde{x}_j + (12\kappa_j^2 + 2a_j)t + 2b_j, \quad \tilde{x}_j = x_j + \kappa_j \partial_{\kappa_j} x_j(\kappa_j), \quad j = 1, 2.$$

Мы предполагаем $a_j \neq -6\kappa_j^2$, так что γ_j изменяется со временем t . Используя (3.7), получаем асимптотическое поведение решения (3.6) для фиксированного γ_1 при $t \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned}
 u &= 2\partial_x^2 \ln(2\kappa_1\gamma_1 - \sin 2\Theta_1)[1 + O(t^{-1})], \\
 \varphi_1 &= \frac{4\kappa_1\sqrt{a_1} \sin \Theta_1}{2\kappa_1\gamma_1 - \sin 2\Theta_1}[1 + O(t^{-1})], \quad \varphi_2 = O(t^{-1}).
 \end{aligned}$$

В асимптотической области, когда γ_2 фиксировано и $t \rightarrow \infty$, имеем

$$\begin{aligned}
 u &= 2\partial_x^2 \ln(2\kappa_2\gamma_2 - \sin 2\Theta_2)[1 + O(t^{-1})], \\
 \varphi_1 &= O(t^{-1}), \quad \varphi_2 = \frac{4\kappa_2\sqrt{a_2} \sin \Theta_2}{2\kappa_2\gamma_2 - \sin 2\Theta_2}[1 + O(t^{-1})].
 \end{aligned}$$

Таким образом, доказано, что два позитона совершенно нечувствительны к взаимному столкновению, которое не сопровождается даже дополнительным сдвигом фаз, присутствующим столкновению двух солитонов. Вычислив соответствующее решение системы (2.2), можно доказать, что потенциал (3.6а) является также суперпрозрачным.

N -позитонное решение уравнения (2.1) с $n = N$ и $\lambda_j = \kappa_j^2 > 0$, $j = 1, \dots, N$, имеет вид

$$\begin{aligned}
 u &= 2\partial_x^2 \ln W_1(f_1, \dots, f_N; e_1, \dots, e_N), \\
 \varphi_j &= \frac{\sqrt{e'_j} W_2(f_1, \dots, f_{j-1}, f_{j+1}, \dots, f_N, f_j; e_1, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, \dots, e_N)}{W_1(f_1, \dots, f_N; e_1, \dots, e_N)}, \quad j = 1, \dots, N,
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 f_j &= \sin \Theta_j, \quad \Theta_j = \kappa_j(x + x_j + 4\kappa_j^2 t), \quad \text{Im } \kappa_j = 0, \quad j = 1, \dots, N, \\
 e_j &= a_j t + b_j, \quad a_j \neq 0, \quad j = 1, \dots, N.
 \end{aligned}$$

Как и выше, можно показать, что на больших временах N -позитонное решение распадается в сумму N свободных позитонов и что N -позитонный потенциал также является суперпрозрачным.

Известно, что уравнение КдФ, наряду с позитонными решениями, обладает солитон-позитонными решениями [7], и эффект при взаимодействии солитона и позитона представляет интерес. Мы обнаруживаем, что уравнение КдФ с источниками также обладает солитон-позитонными решениями. Например, если взять

$$f_1 = \sin[\kappa_1(x + x_1 + 4\kappa_1^2 t)], \quad e_1(t) = at + b$$

и

$$f_2 = e^{\kappa_2 x - 4\kappa_2^3 t}, \quad e_2(t) = e^{2\beta(t)},$$

то формулы (3.6) дают солитон-позитонное решение уравнения (2.1) с $n = 2$, $\lambda_1 = \kappa_1^2 > 0$ и $\lambda_2 = -\kappa_2^2 < 0$. Мы можем исследовать взаимодействие солитона и позитона так же, как это было сделано в [7], но должны констатировать, что результаты такого исследования почти полностью совпадают с результатами [7], и поэтому мы их не приводим.

Благодарности. Настоящая работа была поддержана Special Funds for Chinese Major Basic Research Project 'Nonlinear Science' и Research Grants Council of Hong Kong (грант № HKBU/2047/02P).

Список литературы

- [1] V. K. Mel'nikov. Inverse Problems. 1990. V. 6. P. 233.
- [2] V. K. Mel'nikov. Commun. Math. Phys. 1989. V. 120. P. 451; V. 126. P. 201; J. Math. Phys. 1990. V. 31. P. 1106; D. J. Kaup. Phys. Rev. Lett. 1987. V. 59. P. 2063; C. Claude, A. Latifi, J. Leon. J. Math. Phys. 1991. V. 32. P. 3321; P. A. Власов, Е. В. Докторов. ДАН БССР. 1991. Т. 26. С. 17; E. V. Doktorov, R. A. Vlasov. Opt. Acta. 1993. V. 30. P. 223; M. Nakazawa, E. Yomada, H. Kubota. Phys. Rev. Lett. 1991. V. 66. P. 2625; E. V. Doktorov, V. S. Shchesnovich. Phys. Lett. A. 1995. V. 207. P. 153; V. S. Shchesnovich, E. V. Doktorov. Phys. Lett. A. 1996. V. 213. P. 23; J. Leon. J. Math. Phys. 1988. V. 29. P. 2012; Phys. Lett. A. 1990. V. 144. P. 444.
- [3] J. Leon, A. Latifi. J. Phys. A. 1990. V. 23. P. 1385.
- [4] Y. B. Zeng. Phys. A. 1999. V. 262. P. 405.
- [5] V. K. Mel'nikov. Phys. Lett. A. 1988. V. 133. P. 493.
- [6] R. L. Lin, Y. B. Zeng, W. X. Ma. Phys. A. 2001. V. 291. P. 287.
- [7] B. Б. Мамеев. ТМФ. 2002. Т. 131. № 1. С. 44.
- [8] Q. P. Liu, M. Manas. J. Nonlinear Sci. 1999. V. 9. P. 213; M. Manas, A. Doliwa, P. M. Santini. Phys. Lett. A. 1997. V. 232. P. 99.
- [9] Y. B. Zeng, W. X. Ma, Y. J. Shao. J. Math. Phys. 2001. V. 42. P. 2113.
- [10] V. B. Matveev, M. A. Salle. Darboux Transformations and Solitons. Berlin: Springer, 1991.