Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Бакирташ, Х. Демирай, Амплитудная модуляция нелинейных волн в заполненных жидкостью конических трубках, *ТМФ*, 2003, том 137, номер 3, 325–335

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf275>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 17:06:16

АМПЛИТУДНАЯ МОДУЛЯЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН В ЗАПОЛНЕННЫХ ЖИДКОСТЬЮ КОНИЧЕСКИХ ТРУБКАХ

Исследуется модуляция нелинейных волн в заполненных жидкостью и предварительно деформированных конических трубках. С этой целью получены нелинейные динамические уравнения движения для предварительно деформированной конической трубки, заполненной несжимаемой и невязкой жидкостью. В предположении малости угла конуса с помощью упрощенного метода возмущений исследована модуляция нелинейных волн, в качестве эволюционного уравнения получено нелинейное уравнение Шредингера с переменными коэффициентами. Для такого нелинейного уравнения с переменными коэффициентами получено решение в виде бегущей волны и установлено, что, в отличие от случая трубки постоянного радиуса, скорость такой волны непостоянна. Именно, скорость волны возрастает с расстоянием для сужающихся трубок и уменьшается для расширяющихся трубок.

Ключевые слова: модуляция нелинейных волн, упругие конические трубки, нелинейное уравнение Шредингера.

1. ВВЕДЕНИЕ

Отличительным свойством артериального кровотока является его пульсирующий характер. Периодические выбросы крови из левого желудочка сердца создают давление, и поток пульсирует в артериальной системе. Экспериментальные исследования обнаружили, что скорость потока в кровеносных сосудах сильно зависит от упругости стенок сосудов и волны давления распространяются в направлении периферии характерным образом [1].

Нелинейное уравнение Шредингера является простейшим типичным уравнением, описывающим автомодуляции одномерных монохроматических плоских волн в диспергирующей среде. Во всех работах, связанных с задачами модуляции нелинейных волн в трубках, которые представлены в литературе в настоящее время, артерии рассматриваются как цилиндрические трубки постоянного радиуса. В действительности радиус артерий изменяется вдоль оси трубки.

*Istanbul Technical University, Faculty of Science and Letters, Department of Engineering Sciences, 34469 Maslak, Istanbul, Turkey. E-mail: ilkayb@itu.edu.tr

†Isik University, Faculty of Arts and Sciences, Department of Mathematics, 80670 Maslak, Istanbul, Turkey.

В настоящей работе, рассматривая артерии как упругие длинные круговые конические трубки с тонкими стенками и используя упрощенный метод возмущений, мы исследовали амплитудные модуляции слабонелинейных волн в таких заполненных жидкостью упругих трубках. Рассматривая кровь как несжимаемую невязкую жидкость, мы получили нелинейное уравнение Шредингера с переменными коэффициентами в качестве эволюционного уравнения. Показано, что такой тип уравнений допускает решения вида уединенной волны с переменной скоростью. Численные расчеты показывают, что скорость волны возрастает с расстоянием для сужающихся трубок и уменьшается для расширяющихся.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

2.1. Уравнения трубки. Здесь мы выведем основные уравнения, описывающие движение предварительно деформированной тонкой упругой конической трубки, заполненной невязкой жидкостью. Для этого рассмотрим круговую коническую трубку с углом конуса, равным Φ , и радиусом круга в сечении, проходящим через начало координат перпендикулярно оси конуса, равным R_0 (см. рисунок). Тогда радиус-вектор $\mathbf{R}$ общей точки на поверхности трубки имеет вид

$$\mathbf{R} = (R_0 + \Phi Z)\mathbf{e}_r + Z\mathbf{e}_z, \quad (1)$$

где $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ и $\mathbf{e}_z$ — единичные базисные векторы цилиндрической системы координат, Z — координата материальной точки по аксиальной оси в отсутствие деформации. Элементы длины кривых в меридиональном и тангенциальном направлениях даются формулами

$$dS_Z = (1 + \Phi^2)^{1/2} dZ, \quad dS_\theta = (R_0 + \Phi Z) d\theta. \quad (2)$$

Будем предполагать, что такая коническая трубка подвержена внутреннему статическому давлению $P_0(Z)$, так что деформация описывается следующим образом:

$$\mathbf{r}_0 = (r_0 + \phi z^*)\mathbf{e}_r + z^*\mathbf{e}_z, \quad z^* = \lambda_z Z. \quad (3)$$

Здесь z^* — координата по аксиальной оси после статической деформации, λ_z — коэффициент растяжения в аксиальном направлении, r_0 — радиус круга в сечении, проходящем

через начало координат перпендикулярно аксиальной оси, после деформации, ϕ — величина угла конуса после деформации. В таком случае элементы длины соответствующих кривых в меридиональном и тангенциальном направлениях даются формулами

$$ds_z^0 = (1 + \phi^2)^{1/2} dz^*, \quad ds_\theta^0 = (r_0 + \phi z^*) d\theta. \quad (4)$$

Тогда соответствующие коэффициенты растяжения после статической деформации имеют вид

$$\lambda_1^0 = \frac{ds_z^0}{dS_Z} = \lambda_z \left(\frac{1 + \phi^2}{1 + \Phi^2} \right)^{1/2}, \quad \lambda_2^0 = \frac{ds_\theta^0}{dS_\theta} = \lambda_z \frac{r_0 + \phi z^*}{\lambda_z R_0 + \Phi z^*}. \quad (5)$$

Теперь наложим на эту статическую деформацию динамическое радиальное смещение $u^*(z^*, t^*)$, однако ввиду внешних ограничений будем предполагать, что аксиальное смещение равно нулю. Тогда радиус-вектор общей точки на поверхности трубки после этой заключительной деформации имеет вид

$$\mathbf{r} = (r_0 + \phi z^* + u^*) \mathbf{e}_r + z^* \mathbf{e}_z, \quad (6)$$

где t^* — временной параметр. Элементы длины деформированных кривых в меридиональном и тангенциальном направлениях даются формулами

$$ds_z = \left[1 + \left(\phi + \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right)^2 \right]^{1/2} dz^*, \quad ds_\theta = (r_0 + \phi z^* + u^*) d\theta. \quad (7)$$

Таким образом, коэффициенты растяжения для этой окончательной конфигурации имеют вид

$$\lambda_1 = \lambda_z \frac{[1 + (\phi + \partial u^* / \partial z^*)^2]^{1/2}}{(1 + \Phi^2)^{1/2}}, \quad \lambda_2 = \lambda_z \frac{r_0 + \phi z^* + u^*}{\lambda_z R_0 + \Phi z^*}. \quad (8)$$

Мы будем предполагать, что рассматриваемый материал является несжимаемым. Пусть H — начальная толщина элемента трубки, а h и h' — аналогичные толщины после статической и окончательной динамической деформаций, соответственно. Учитывая несжимаемость материала, можно видеть, что вдоль оси трубки толщина изменяется даже для статической деформации. Если величины углов конуса до и после статической деформации связаны между собой соотношением $\phi = \Phi \lambda_\theta / \lambda_z$, где $\lambda_\theta = r_0 / R_0$ — коэффициент растяжения в радиальном направлении, то толщина остается постоянной вдоль всей оси и дается выражением

$$h = \frac{H(1 + \Phi^2)^{1/2}}{\lambda_\theta \lambda_z (1 + \phi^2)^{1/2}}. \quad (9)$$

Фактически в этом случае образующие до и после статической деформации остаются параллельными друг другу.

Пусть T_1 и T_2 – силы, действующие на перегородку в меридиональном и тангенциальном направлениях, соответственно. Тогда уравнение движения в радиальном направлении для малого элемента трубки, расположенного между плоскостями $z^* = \text{const}$, $z^* + dz^* = \text{const}$, $\theta = \text{const}$ и $\theta + d\theta = \text{const}$, может быть записано в виде

$$-T_2 \left[1 + \left(\phi + \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right)^2 \right]^{1/2} + \frac{\partial}{\partial z^*} \left\{ T_1 \frac{(r_0 + \phi z^* + u^*)(\phi + \partial u^*/\partial z^*)}{[1 + (\phi + \partial u^*/\partial z^*)^2]^{1/2}} \right\} + P^*(r_0 + \phi z^* + u^*) = \frac{\rho_0 H}{\lambda_z^2} (1 + \Phi^2)^{1/2} (R_0 \lambda_z + \Phi z^*) \frac{\partial^2 u^*}{\partial t^{*2}}, \quad (10)$$

где ρ_0 – плотность перегородки, P^* – давление жидкости.

Пусть $\nu \Sigma$ – функция плотности энергии деформации материала трубки, ν – модуль сдвига для материала трубки. Действующие на перегородку силы могут быть выражены посредством коэффициентов растяжения следующим образом:

$$T_1 = \frac{\nu H}{\lambda_2} \frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_1}, \quad T_2 = \frac{\nu H}{\lambda_1} \frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_2}. \quad (11)$$

Если подставить выражения (11) в уравнение (10), то уравнение движения в радиальном направлении примет следующий вид:

$$-\frac{\nu}{\lambda_z} H (1 + \Phi^2)^{1/2} \frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_2} + \frac{\nu}{\lambda_z} H \frac{\partial}{\partial z^*} \left\{ \frac{(\lambda_z R_0 + \Phi z^*)(\phi + \partial u^*/\partial z^*)}{[1 + (\phi + \partial u^*/\partial z^*)^2]^{1/2}} \frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_1} \right\} + P^*(r_0 + \phi z^* + u^*) = \frac{\rho_0}{\lambda_z^2} H (1 + \Phi^2)^{1/2} (\lambda_z R_0 + \Phi z^*) \frac{\partial^2 u^*}{\partial t^{*2}}. \quad (12)$$

2.2. Уравнения жидкости. Известно, что кровь является несжимаемой жидкостью с аномальной вязкостью. Однако при движении потока крови в больших сосудах эритроциты перемещаются к центральной области артерии, так что показатель гематокрита у стенки артерии становится достаточно низким, и вязкость крови не слишком сильно меняется со скоростью сдвига. Более того, из-за высокой скорости сдвига вблизи стенок артерии вязкость крови еще более уменьшается. Поэтому в задачах, связанных с рассмотрением кровотока в больших сосудах, кровь может рассматриваться как несжимаемая невязкая жидкость. Согласно предположению о малой вязкости изменением величин поля в зависимости от радиальной координаты можно пренебречь. Таким образом, усредненные уравнения движения имеют вид

$$\frac{\partial D}{\partial t^*} + \frac{\partial}{\partial z^*} (D w^*) = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial w^*}{\partial t^*} + w^* \frac{\partial w^*}{\partial z^*} + \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial P^*}{\partial z^*} = 0, \quad (14)$$

где w^* – средняя аксиальная скорость, $D(z^*, t^*)$ – площадь поперечного сечения трубки. С учетом соотношения между площадью поперечного сечения трубки и ее радиусом после всех деформаций, т.е. $D = \pi(r_0 + \phi z^* + u^*)^2$, уравнение (13) принимает вид

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \left(\phi + \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right) w^* + \frac{1}{2} (r_0 + \phi z^* + u^*) \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = 0. \quad (15)$$

Теперь удобно ввести следующие безразмерные величины:

$$\begin{aligned} t^* &= \frac{R_0}{c_0} t, & z^* &= R_0 z, & u^* &= R_0 u, & m &= \frac{\rho_0 H}{\rho_f R_0}, \\ w^* &= c_0 w, & r_0 &= \lambda_\theta R_0, & P^* &= \rho_f c_0^2 p, & c_0^2 &= \frac{\nu H}{\rho_f R_0}, \end{aligned} \quad (16)$$

где c_0 обозначает скорость Моенса–Кортевега, ρ_f – плотность жидкости. Подставляя величины (16) в уравнения (12), (14) и (15), получаем следующие безразмерные уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \left(\phi + \frac{\partial u}{\partial z} \right) w + \frac{1}{2} (\lambda_\theta + \phi z + u) \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} &= 0, \\ p &= \frac{m}{\lambda_z^2} (1 + \Phi^2)^{1/2} \frac{\lambda_z + \Phi z}{\lambda_\theta + \phi z + u} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{(1 + \Phi^2)^{1/2}}{\lambda_z (\lambda_\theta + \phi z + u)} \frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_2} - \\ &- \frac{1}{\lambda_z (\lambda_\theta + \phi z + u)} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{(\phi + \partial u / \partial z)(\lambda_z + \Phi z)}{[1 + (\phi + \partial u / \partial z)^2]^{1/2}} \frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_1} \right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

Этих уравнений достаточно для полного определения величин поля u , w и p .

3. МОДУЛЯЦИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ВОЛНЫ

В этом разделе мы исследуем амплитудную модуляцию слабонелинейных волн в заполненной жидкостью тонкой упругой трубке, нелинейные безразмерные уравнения движения для которой даются формулами (17). Анализируя дисперсионные соотношения для линеаризованных уравнений поля и рассматривая данную задачу как задачу с граничными условиями, можно ввести следующие растянутые координаты:

$$\xi = \epsilon(z - \lambda t), \quad \tau = \epsilon^2 z, \quad (18)$$

где ϵ – малый параметр, определяющий степень нелинейности, а λ – параметр масштабирования, который подлежит определению в процессе решения.

Для того чтобы учесть влияние конусности, величины углов конуса должны быть порядка ϵ^3 . Следовательно, углы конуса могут быть записаны следующим образом:

$$\Phi = A\epsilon^3, \quad \phi = a\epsilon^3, \quad (19)$$

где A и a – некоторые конечные константы, характеризующие углы конуса до и после статической деформации. Будем предполагать, что образующие до и после статической деформации остаются параллельными друг другу. Как было указано выше, в этом случае соотношение между константами a и A принимает вид $a = (\lambda_\theta / \lambda_z) A$. Разложим переменные поля в асимптотический ряд:

$$\{u, w, p\} = \sum_{n=1}^{\infty} \{u_n, w_n, p_n\} \epsilon^n, \quad (20)$$

где $u_1, \dots, p_3$ суть функции быстрых переменных (z, t) и медленных переменных (ξ, τ) . Подставляя растянутые координаты (18) и асимптотическое разложение (20) в уравнения поля (17) и приравнивая к нулю члены, содержащие одинаковые степени ϵ , мы получаем иерархию уравнений. Для краткости мы приведем далее только результаты решения этих уравнений, полученные в каждом порядке; коэффициенты $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ и γ_1 , входящие в соответствующие уравнения, определены следующим образом:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{\lambda_\theta \lambda_z} \frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_z}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{2\lambda_\theta \lambda_z} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \lambda_\theta \partial \lambda_z}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2\lambda_\theta \lambda_z} \frac{\partial^3 \Sigma}{\partial \lambda_\theta^2 \partial \lambda_z}, \quad \beta_0 = \frac{1}{\lambda_\theta \lambda_z} \frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_z}, \\ \beta_1 &= \frac{1}{\lambda_\theta \lambda_z} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \lambda_\theta^2}, \quad \beta_2 = \frac{1}{2\lambda_\theta \lambda_z} \frac{\partial^3 \Sigma}{\partial \lambda_\theta^3}, \quad \beta_3 = \frac{1}{6\lambda_\theta \lambda_z} \frac{\partial^4 \Sigma}{\partial \lambda_\theta^4}, \quad \gamma_1 = \frac{1}{2\lambda_\theta \lambda_z} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \lambda_z^2}. \end{aligned} \quad (21)$$

3.1. Решение уравнений поля. Уравнения порядка $O(\epsilon)$ допускают решение вида

$$\{u_1, w_1, p_1\} = \{U_0, W_0, P_0\}(\xi, \tau) + \{\{U, W_1^{(1)}, P_1^{(1)}\}(\xi, \tau)e^{i(\omega t - kz)} + \text{к.с.}\}, \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned} P_0 &= \left(\beta_1 - \frac{\beta_0}{\lambda_\theta}\right)U_0 - \frac{\beta_0 A}{\lambda_z}\tau, \\ P_1^{(1)} &= \left[-\frac{m\omega^2}{\lambda_\theta \lambda_z} + \alpha_0 \lambda_z k^2 + \left(\beta_1 - \frac{\beta_0}{\lambda_\theta}\right)\right]U, \end{aligned} \quad (23)$$

ω – угловая частота, k – волновое число, $U_0(\xi, \tau), \dots, P_1^{(1)}$ – некоторые неизвестные функции своих аргументов, к.с. обозначает комплексное сопряжение соответствующих выражений. Подставляя (22) и (23) в уравнения жидкости порядка $O(\epsilon)$, получаем

$$W_1^{(1)} = \frac{2}{\lambda_\theta} \frac{\omega}{k} U, \quad P_1^{(1)} = \frac{2}{\lambda_\theta} \frac{\omega^2}{k^2} U \quad (24)$$

при условии что справедливо следующее дисперсионное соотношение:

$$\left(2 + \frac{mk^2}{\lambda_z}\right)\omega^2 - (\lambda_\theta \beta_1 - \beta_0)k^2 - \alpha_0 \lambda_z \lambda_\theta k^4 = 0. \quad (25)$$

Аналогично уравнения порядка $O(\epsilon^2)$ допускают решение вида

$$\{u_2, w_2, p_2\} = \{U_2^{(0)}, W_2^{(0)}, P_2^{(0)}\} + \left\{ \sum_{\ell=1}^2 \{U_2^{(\ell)}, W_2^{(\ell)}, P_2^{(\ell)}\} e^{i\ell(\omega t - kz)} + \text{к.с.} \right\}, \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} P_2^{(0)} &= \left(\beta_1 - \frac{\beta_0}{\lambda_\theta}\right)U_2^{(0)} + \left(-4\frac{\omega^2}{\lambda_\theta^2 k^2} + 2\beta_2 + 2\alpha_1 \lambda_z k^2\right)|U|^2 + \\ &+ \left(\beta_2 - \frac{\beta_1}{\lambda_\theta} + \frac{\beta_0}{\lambda_\theta^2}\right)U_0^2 - \frac{2A}{\lambda_z} \left(\beta_1 - \frac{\beta_0}{\lambda_\theta}\right)\tau U_0 + \frac{\beta_0 A^2 \tau^2}{\lambda_z^2}, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} P_2^{(1)} &= \frac{2\omega^2}{\lambda_\theta k^2} U_2^{(1)} + 2i \left(\alpha_0 \lambda_z k - \frac{m\omega \lambda}{\lambda_\theta \lambda_z}\right) \frac{\partial U}{\partial \xi} + \\ &+ \left(2\beta_2 - \frac{\beta_1}{\lambda_\theta} + \frac{\beta_0}{\lambda_\theta^2} - \frac{2\omega^2}{\lambda_\theta^2 k^2} + 2\alpha_1 \lambda_z k^2\right)U_0 U - \frac{2A}{\lambda_z} \left(\beta_1 - \frac{\beta_0}{\lambda_\theta}\right)\tau U, \end{aligned} \quad (28)$$

$$P_2^{(2)} = \left[8\frac{\omega^2}{\lambda_\theta k^2} - 3\left(\beta_1 - \frac{\beta_0}{\lambda_\theta}\right)\right]U_2^{(2)} + \left(-\frac{2\omega^2}{\lambda_\theta^2 k^2} + \beta_2 + 3\alpha_1 \lambda_z k^2\right)U^2. \quad (29)$$

Подставляя (22), (24) и (26) в уравнения жидкости порядка $O(\epsilon^2)$, получаем систему дифференциальных уравнений. Решая совместно эту систему, получаем следующие соотношения:

$$W_0 = 2\frac{\lambda}{\lambda_\theta}U_0 + C(\tau), \quad [-2\lambda^2 + (\lambda_\theta\beta_1 - \beta_0)]\frac{\partial U_0}{\partial \xi} = 0, \quad (30)$$

где $C(\tau)$ – произвольная функция переменной τ . Для того чтобы существовало решение с ненулевой частной производной $\partial U_0/\partial \xi$, должно выполняться условие

$$\lambda^2 - \frac{\lambda_\theta\beta_1 - \beta_0}{2} = 0. \quad (31)$$

Можно заметить, что константа $(\lambda_\theta\beta_1 - \beta_0)/2$ есть просто квадрат фазовой скорости в пределе длинных волн. Выражение (31) показывает, что в пределе длинных волн масштабный фактор λ равен фазовой скорости.

Другая возможность состоит в том, что $\lambda^2 - (\lambda_\theta\beta_1 - \beta_0)/2 \neq 0$, т.е. U_0 является произвольной функцией только переменной τ . В таком случае произвольная функция $C(\tau)$ может быть выбрана равной нулю и решение принимает следующий вид:

$$W_0 = 2\frac{\lambda}{\lambda_\theta}U_0(\tau), \quad P_0 = \left(\beta_1 - \frac{\beta_0}{\lambda_\theta}\right)U_0(\tau) - \frac{\beta_0 A}{\lambda_z}\tau. \quad (32)$$

Подставляя выражение для $P_2^{(1)}$ из (28) в полученные уравнения и исключая $W_2^{(1)}$ из этих уравнений, получаем

$$\begin{aligned} i \left[2\omega \left(\frac{\omega}{k} - \lambda \right) + \lambda_\theta k^2 \left(\alpha_0 \lambda_z k - \frac{m\omega\lambda}{\lambda_\theta\lambda_z} \right) \right] \frac{\partial U}{\partial \xi} + \\ + \left\{ \left[\frac{4}{\lambda_\theta} \lambda \omega k + \left(\lambda_\theta \beta_2 - \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_0}{2\lambda_\theta} \right) k^2 + \alpha_1 \lambda_\theta \lambda_z k^4 \right] U_0 + \right. \\ \left. + [\omega^2 - (\lambda_\theta \beta_1 - \beta_0) k^2] \frac{A\tau}{\lambda_z} \right\} U = 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Как видно из этого уравнения, коэффициент при $\partial U/\partial \xi$ является чисто мнимым, а коэффициент при U – действительным. Поэтому для того чтобы существовало ненулевое решение U , оба этих коэффициента должны обращаться в нуль. Таким образом, мы получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} 2\omega \left(\frac{\omega}{k} - \lambda \right) + \lambda_\theta k^2 \left(\alpha_0 \lambda_z k - \frac{m\omega\lambda}{\lambda_\theta\lambda_z} \right) = 0, \\ \left[\frac{4}{\lambda_\theta} \lambda \omega k + \left(\lambda_\theta \beta_2 - \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_0}{2\lambda_\theta} \right) k^2 + \alpha_1 \lambda_\theta \lambda_z k^4 \right] U_0 + \\ + [\omega^2 - (\lambda_\theta \beta_1 - \beta_0) k^2] \frac{A\tau}{\lambda_z} = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Решая первое из этих уравнений, получаем параметр λ , равный групповой скорости, т.е.

$$\lambda = \frac{2\omega^2 + \alpha_0 \lambda_\theta \lambda_z k^4}{\omega k (2 + mk^2/\lambda_z)}.$$

Решая второе уравнение из (34), имеем

$$U_0 = \Phi_0 \frac{A}{\lambda_z} \tau, \quad \Phi_0 = \frac{-\omega^2 + (\lambda_\theta \beta_1 - \beta_0)k^2}{4\lambda\omega k/\lambda_\theta + (\lambda_\theta \beta_2 - \beta_1/2 + \beta_0/(2\lambda_\theta))k^2 + \alpha_1 \lambda_\theta \lambda_z k^4}. \quad (35)$$

Используя эти соотношения, получаем следующие результаты:

$$\begin{aligned} W_2^{(1)} &= \frac{2}{\lambda_\theta} \frac{\omega}{k} U_2^{(1)} - \frac{2i}{\lambda_\theta k} \left(\frac{\omega}{k} - \lambda \right) \frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{2}{\lambda_\theta} \left[\frac{1}{\lambda_\theta} \left(2\lambda + \frac{\omega}{k} \right) \Phi_0 + \frac{\omega}{k} \right] \frac{A}{\lambda_z} \tau U, \\ P_2^{(1)} &= \frac{2}{\lambda_\theta} \frac{\omega^2}{k^2} U_2^{(1)} - \frac{4i\omega}{\lambda_\theta k^2} \left(\frac{\omega}{k} - \lambda \right) \frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{2}{\lambda_\theta} \frac{\omega}{k} \left[\frac{1}{\lambda_\theta} \left(4\lambda + \frac{\omega}{k} \right) \Phi_0 + \frac{\omega}{k} \right] \frac{A}{\lambda_z} \tau U, \\ U_2^{(2)} &= \frac{(3\omega^2/\lambda_\theta + \lambda_\theta \beta_2 k^2 + 3\alpha_1 \lambda_\theta \lambda_z k^4)U^2}{3[(\lambda_\theta \beta_1 - \beta_0)k^2 - 2\omega^2]}, \quad W_2^{(2)} = \frac{2}{\lambda_\theta} \frac{\omega}{k} U_2^{(2)} - \frac{3}{\lambda_\theta^2} \frac{\omega}{k} U^2. \end{aligned} \quad (36)$$

Аналогично решения уравнений порядка $O(\epsilon^3)$ могут быть выражены как

$$\{u_3, w_3, p_3\} = \{U_3^{(0)}, W_3^{(0)}, P_3^{(0)}\} + \left\{ \sum_{\ell=1}^3 \{U_3^{(\ell)}, W_3^{(\ell)}, P_3^{(\ell)}\} e^{i\ell(\omega t - kz)} + \text{к.с.} \right\}. \quad (37)$$

Подставляя это выражение в уравнения порядка $O(\epsilon^3)$ и используя ранее полученные результаты и соотношения, мы получаем систему дифференциальных уравнений. Если просто выписать соответствующие уравнения для $U_3^{(1)}$, $W_3^{(1)}$ и $P_3^{(1)}$ и исключить из них $U_3^{(1)}$, $W_3^{(1)}$ и $P_3^{(1)}$, то мы получим следующее нелинейное уравнение Шредингера с переменными коэффициентами:

$$i \frac{\partial U}{\partial \tau} + \mu_1 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \mu_2 |U|^2 U + i \mu_3 \tau \frac{\partial U}{\partial \xi} + \mu_4 \tau^2 U + \mu_5 \xi U = 0, \quad (38)$$

где коэффициенты $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_5$ определены выражениями

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{(\omega/k - \lambda)(3\omega/k - \lambda) + (mk^2 \lambda^2/\lambda_z - \alpha_0 \lambda_\theta \lambda_z k^2)/2}{\alpha_0 \lambda_\theta \lambda_z k^3 + 2\omega^2/k}, \\ \mu_2 &= \left[\alpha_0 \lambda_\theta \lambda_z k^3 + \frac{2\omega^2}{k} \right]^{-1} \left\{ -16 \frac{\omega^2}{\lambda_\theta^2} + \frac{4\lambda\omega k}{\lambda_\theta^2} + \frac{3}{2} (\lambda_\theta \beta_3 - \beta_2) k^2 + \right. \\ &\quad + \lambda_\theta \lambda_z \left(\alpha_2 - \frac{5}{2} \frac{\alpha_1}{\lambda_\theta} \right) k^4 - \lambda_\theta \lambda_z \left(\frac{3}{4} \alpha_0 - \frac{3}{2} \gamma_1 \lambda_z \right) k^6 + \\ &\quad + \left[\beta_2 \lambda_\theta k^2 + \frac{3}{2} \left(\beta_1 - \frac{\beta_0}{\lambda_\theta} \right) k^2 + 3\alpha_1 \lambda_\theta \lambda_z k^4 \right] \times \\ &\quad \times \frac{3\omega^2/\lambda_\theta + \lambda_\theta \beta_2 k^2 + 3\alpha_1 \lambda_\theta \lambda_z k^4}{3[(\lambda_\theta \beta_1 - \beta_0)k^2 - 2\omega^2]} + \left[\left(\lambda_\theta \beta_2 - \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_0}{2\lambda_\theta} \right) k^2 + \right. \\ &\quad \left. \left. + \alpha_1 \lambda_\theta \lambda_z k^4 + \frac{4\lambda\omega k}{\lambda_\theta} \right] \frac{-\lambda^2 + 4\lambda\omega/k + \lambda_\theta^2 \beta_2 + \alpha_1 \lambda_\theta^2 \lambda_z k^2}{\lambda_\theta [\lambda^2 - (\lambda_\theta \beta_1 - \beta_0)/2]} \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_3 &= \left[\alpha_0 \lambda_\theta \lambda_z k^3 + \frac{2\omega^2}{k} \right]^{-1} \left\{ 2 \left(\lambda - \frac{\omega}{k} \right) \left[\omega + (\omega + 2\lambda k) \frac{\Phi_0}{\lambda_\theta} \right] + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{m\omega\lambda}{\lambda_\theta \lambda_z} - \alpha_0 \lambda_z k + 2\alpha_1 \lambda_\theta \lambda_z k \right) \Phi_0 k^2 \right\} \frac{A}{\lambda_z}, \\
\mu_4 &= \left[\alpha_0 \lambda_\theta \lambda_z k^3 + \frac{2\omega^2}{k} \right]^{-1} \left\{ \left[\frac{\omega^2}{\lambda_\theta^2} + \frac{3}{2} (\lambda_\theta \beta_3 - \beta_2) k^2 + \left(\frac{\beta_1}{\lambda_\theta} - \frac{\beta_0}{\lambda_\theta^2} \right) k^2 - \right. \right. \\
&\quad \left. - \lambda_z \left(\alpha_1 - \frac{\lambda_\theta \alpha_2}{2} \right) k^4 \right] \Phi_0^2 + \left[\frac{\omega^2}{\lambda_\theta} - 3\lambda_\theta \beta_2 k^2 + \frac{5}{2} \left(\beta_1 - \frac{\beta_0}{\lambda_\theta} \right) k^2 - \right. \\
&\quad \left. - \alpha_1 \lambda_\theta \lambda_z k^4 \right] \Phi_0 + \frac{3}{2} (\lambda_\theta \beta_1 - \beta_0) k^2 - \left[\omega + (\omega + 2\lambda k) \frac{\Phi_0}{\lambda_\theta} \right]^2 + \\
&\quad + \left[\left(\lambda_\theta \beta_2 - \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_0}{2\lambda_\theta} \right) k^2 + \alpha_1 \lambda_\theta \lambda_z k^4 + \frac{4\lambda\omega k}{\lambda_\theta} \right] \times \\
&\quad \times \frac{(\lambda_\theta \beta_2 - \beta_1 + \beta_0/\lambda_\theta) \Phi_0^2 - 2(\lambda_\theta \beta_1 - \beta_0) \Phi_0 + \lambda_\theta \beta_0}{\lambda^2 - (\lambda_\theta \beta_1 - \beta_0)/2} \left. \right\} \frac{A^2}{\lambda_z^2}, \\
\mu_5 &= \frac{A}{\lambda_z} \left[\alpha_0 \lambda_\theta \lambda_z k^3 + \frac{2\omega^2}{k} \right]^{-1} \left\{ -\frac{4\lambda\omega k}{\lambda_\theta} \Phi_0 + \right. \\
&\quad + \frac{(\lambda_\theta \beta_2 - \beta_1/2 + \beta_0/(2\lambda_\theta)) k^2 + \alpha_1 \lambda_\theta \lambda_z k^4 + 4\omega\lambda k/\lambda_\theta}{\lambda^2 - (\lambda_\theta \beta_1 - \beta_0)/2} \times \\
&\quad \times \left[\left(\lambda^2 + \lambda_\theta \frac{\beta_1}{2} - \frac{\beta_0}{2} \right) \Phi_0 - \frac{\beta_0 \lambda_\theta}{2} \right] \left. \right\}.
\end{aligned}$$

Отметим то обстоятельство, что коэффициенты μ_3 , μ_4 и μ_5 являются функциями параметра A , определяющего угол конуса, и они обращаются в нуль при обращении в нуль этого параметра. В этом случае итоговое уравнение сводится к известному нелинейному уравнению Шредингера. Таким образом, коэффициенты μ_3 , μ_4 и μ_5 определяют вклад конусности в эволюционные уравнения.

3.2. Решение в виде бегущей волны. Будем теперь искать решение уравнения (38) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
U &= V(\zeta) e^{i[(b_0\tau + K)\xi - \varphi(\tau)],} \\
\zeta &= \xi - b_1\tau^2 - b_2\tau, \quad \varphi(\tau) = c_0\tau^3 + c_1\tau^2 + \Omega\tau,
\end{aligned} \tag{39}$$

где b_0 , b_1 , b_2 , c_0 , c_1 , K и Ω — некоторые подлежащие определению константы, а $V(\zeta)$ — неизвестная вещественная функция своего аргумента. Подставляя (39) в уравнение (38), имеем

$$\begin{aligned}
\mu_1 V'' + (\mu_5 - b_0) \xi V + [-\mu_1(b_0\tau + K)^2 - \mu_3(b_0\tau^2 + K\tau) + 3c_0\tau^2 + 2c_1\tau + \Omega] V + \\
+ i[2\mu_1 b_0\tau + 2\mu_1 K + \mu_3\tau - 2b_1\tau - b_2] V' + \mu_2 V^3 = 0.
\end{aligned} \tag{40}$$

Для того чтобы формально свести это уравнение к уравнению для решения вида бегущей волны в случае классического нелинейного уравнения Шредингера с постоянными

коэффициентами, мы должны потребовать выполнения условий

$$\begin{aligned} b_0 &= \mu_5, & b_1 &= \mu_1\mu_5 + \frac{1}{2}\mu_3, & b_2 &= 2\mu_1K, \\ c_0 &= \frac{1}{3}(\mu_1\mu_5^2 + \mu_3\mu_5), & c_1 &= \left(\mu_1\mu_5 + \frac{1}{2}\mu_3\right)K. \end{aligned} \quad (41)$$

При этом уравнение (40) принимает вид

$$\mu_1 V'' + (\Omega - \mu_1 K^2)V + \mu_2 V^3 = 0. \quad (42)$$

Это и есть тот самый результат, который можно получить, если искать решение классического нелинейного уравнения Шредингера в виде бегущей волны. Уравнение (42) допускает следующее решение вида уединенной волны:

$$V(\zeta) = C \operatorname{sch} \left[\left(\frac{\mu_2}{2\mu_1} \right)^{1/2} C\zeta \right] \quad (43)$$

при $\mu_1\mu_2 > 0$, где $\Omega = \mu_1 K^2 - \mu_2 C^2/2$, и

$$V(\zeta) = C \operatorname{th} \left[\left(-\frac{\mu_2}{2\mu_1} \right)^{1/2} C\zeta \right] \quad (44)$$

при $\mu_1\mu_2 < 0$, где $\Omega = \mu_1 K^2 - \mu_2 C^2$. В обоих случаях C обозначает амплитуду уединенной волны.

Скорость v_p бегущей волны и скорость v_e огибающей волны соответственно равны

$$\begin{aligned} v_p &= \frac{1}{2\mu_1 K + (2\mu_1\mu_5 + \mu_3)\tau}, \\ v_e &= \frac{K + \mu_5\tau}{\mu_5(\mu_1\mu_5 + \mu_3)\tau^2 + (2\mu_1\mu_5 + \mu_3)K\tau + \Omega - \mu_5\xi}. \end{aligned} \quad (45)$$

Из этих выражений видно, что эти скорости зависят от растянутых координат ξ и τ . Для того чтобы выяснить вклад параметра A , определяющего угол конуса, нужно знать коэффициенты $\alpha_0, \dots, \gamma_1$. В настоящей работе мы воспользуемся предложенным Демираем [2] уравнением состояния для мягких биологических тканей

$$\Sigma = \frac{1}{2\alpha} \{ e^{\alpha(I_1-3)} - 1 \}, \quad (46)$$

где α — характеризующая материал постоянная, а I_1 — первый инвариант тензора деформации Фингера, определяемый выражением $I_1 = \lambda_z^2 + \lambda_\theta^2 + 1/(\lambda_z^2\lambda_\theta^2)$. Подставив

уравнение состояний (46) в выражения (21), находим коэффициенты $\alpha_0, \dots, \gamma_1$:

$$\begin{aligned}
 \alpha_0 &= \left(\frac{1}{\lambda_\theta} - \frac{1}{\lambda_\theta^3 \lambda_z^4} \right) F(\lambda_\theta, \lambda_z), \\
 \alpha_1 &= \left[\frac{1}{\lambda_\theta^4 \lambda_z^4} + \alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda_\theta^4 \lambda_z^2} \right) \left(1 - \frac{1}{\lambda_\theta^2 \lambda_z^4} \right) \right] F(\lambda_\theta, \lambda_z), \\
 \alpha_2 &= \left[-\frac{3}{\lambda_\theta^5 \lambda_z^4} + \frac{4\alpha}{\lambda_\theta^4 \lambda_z^4} \left(\lambda_\theta - \frac{1}{\lambda_\theta^3 \lambda_z^2} \right) + 2\alpha^2 \left(\frac{1}{\lambda_\theta} - \frac{1}{\lambda_\theta^3 \lambda_z^4} \right) \left(\lambda_\theta - \frac{1}{\lambda_\theta^3 \lambda_z^2} \right)^2 \right] F(\lambda_\theta, \lambda_z), \\
 \beta_0 &= \left(\frac{1}{\lambda_z} - \frac{1}{\lambda_\theta^4 \lambda_z^3} \right) F(\lambda_\theta, \lambda_z), \\
 \beta_1 &= \left[\frac{1}{\lambda_\theta \lambda_z} + \frac{3}{\lambda_\theta^5 \lambda_z^3} + \frac{2\alpha}{\lambda_\theta \lambda_z} \left(\lambda_\theta - \frac{1}{\lambda_\theta^3 \lambda_z^2} \right)^2 \right] F(\lambda_\theta, \lambda_z), \\
 \beta_2 &= \left[-\frac{6}{\lambda_\theta^6 \lambda_z^3} + \frac{3\alpha}{\lambda_\theta \lambda_z} \left(1 + \frac{3}{\lambda_\theta^4 \lambda_z^2} \right) \left(\lambda_\theta - \frac{1}{\lambda_\theta^3 \lambda_z^2} \right) + \frac{2\alpha^2}{\lambda_\theta \lambda_z} \left(\lambda_\theta - \frac{1}{\lambda_\theta^3 \lambda_z^2} \right)^3 \right] F(\lambda_\theta, \lambda_z), \\
 \beta_3 &= \left\{ \frac{10}{\lambda_\theta^7 \lambda_z^3} + \alpha \left[\frac{1}{\lambda_\theta \lambda_z} \left(1 + \frac{3}{\lambda_\theta^4 \lambda_z^2} \right)^2 - \frac{8}{\lambda_\theta^6 \lambda_z^3} \left(\lambda_\theta - \frac{1}{\lambda_\theta^3 \lambda_z^2} \right) \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{4\alpha^2}{\lambda_\theta \lambda_z} \left(1 + \frac{3}{\lambda_\theta^4 \lambda_z^2} \right) \left(\lambda_\theta - \frac{1}{\lambda_\theta^3 \lambda_z^2} \right)^2 + \frac{4\alpha^3}{3\lambda_\theta \lambda_z} \left(\lambda_\theta - \frac{1}{\lambda_\theta^3 \lambda_z^2} \right)^4 \right\} F(\lambda_\theta, \lambda_z), \\
 \gamma_1 &= \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda_\theta \lambda_z} + \frac{3}{\lambda_\theta^3 \lambda_z^5} \right) + \frac{\alpha}{\lambda_\theta \lambda_z} \left(\lambda_z - \frac{1}{\lambda_\theta^2 \lambda_z^3} \right)^2 \right] F(\lambda_\theta, \lambda_z),
 \end{aligned} \tag{47}$$

где функция $F(\lambda_\theta, \lambda_z)$ определена формулой

$$F(\lambda_\theta, \lambda_z) = \exp \left[\alpha \left(\lambda_\theta^2 + \lambda_z^2 + \frac{1}{\lambda_\theta^2 \lambda_z^2} - 3 \right) \right]. \tag{48}$$

Для того чтобы исследовать зависимость скоростей волны от параметра A , определяющего угол конуса, необходимо знать численное значение постоянной α . В статическом случае используемая модель была сопоставлена Демираем [3] с экспериментальными измерениями Симона с сотрудниками [4], проведенными на брюшной артерии собаки с параметрами $R_i = 0.31$ см, $R_o = 0.38$ см и $\lambda_z = 1.53$, где R_i и R_o — соответственно внутренний и внешний радиусы артерии; при этом значение характеризующей материал постоянной α оказалось равным $\alpha = 1.948$. Зависимость скоростей волны от переменных ξ и τ при полученном численном значении α и начальной деформации $\lambda_z = 1.6$ и $\lambda_\theta = 1.6$ можно посчитать и убедиться в том, что обе скорости убывают с расстоянием в случае расширяющихся трубок и возрастают с расстоянием в случае сужающихся трубок.

Список литературы

- [1] *T. J. Pedley*. Fluid Mechanics of Large Blood Vessels. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1980.
- [2] *H. Demiray*. J. Biomechanics. 1972. V. 5. P. 309–311.
- [3] *H. Demiray*. Bull. Math. Biology. 1976. V. 38. P. 701–711.
- [4] *B. R. Simon, A. S. Kobayashi, D. E. Stradness, C. A. Wiederhielm*. Circulation Res. 1972. V. 30. P. 491–500.