Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Баллестерос, Ф. Муссо, О. Рагниско, Максимально суперинтегрируемый магнетик Годена. Единый подход, *ТМФ*, 2003, том 137, номер 3, 336–343

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf276>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 17:34:12

© 2003 г. А. Баллестерос*, Ф. Муссо†, О. Раньиско‡

МАКСИМАЛЬНО СУПЕРИНТЕГРИРУЕМЫЙ МАГНЕТИК ГОДЕНА. ЕДИНЫЙ ПОДХОД

Классическая интегрируемая гамильтонова система определяется абелевой подалгеброй (подходящей размерности) алгебры Пуассона, тогда как квантовая интегрируемая гамильтонова система определяется абелевой подалгеброй (подходящей размерности) алгебры Жордана–Ли эрмитовых операторов. Предлагается метод получения “больших” абелевых подалгебр внутри тензорного произведения свободных тензорных алгебр и показывается, что существуют канонические морфизмы из этих алгебр в пуассоновы и в операторные алгебры Жордана–Ли. Таким образом доказывается интегрируемость некоторой гамильтоновой системы частного вида одновременно как в классическом, так и в квантовом случае. В качестве примера рассматривается частный случай рационального магнетика Годена.

Ключевые слова: суперинтегрируемость, магнетик Годена, коалгебры.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работах [1] Годен доказал, что для интегрируемости квантовых спиновых гамильтонианов класса

$$\mathcal{H} = \sum_{j < l=1}^N v_{jl} \vec{\sigma}_j \cdot \vec{\sigma}_l \quad (1)$$

достаточно, чтобы коэффициенты v_{jl} имели вид

$$v_{jl} = \frac{\eta_j - \eta_l}{\epsilon_j - \epsilon_l}. \quad (2)$$

Действительно, мы можем записать $\mathcal{H}$ в виде

$$\mathcal{H} = \sum_{j=1}^N \eta_j H_j, \quad H_j = \sum_{l \neq j} \frac{\vec{\sigma}_j \cdot \vec{\sigma}_l}{\epsilon_j - \epsilon_l},$$

*Departamento de Física, Universidad de Burgos, Pza. Misael Bañuelos s.n., E-09001 Burgos, Spain. E-mail: angelb@ubu.es

†SISSA, Via Beirut 2/4, Trieste, I-34013 Italy. E-mail: musso@fm.sissa.it

‡Dipartimento di Fisica, Terza Università di Roma, Via della Vasca Navale 84, I-00146 Rome, Italy. E-mail: ragnisco@fis.uniroma3.it

где H_j определяют множество $N - 1$ коммутирующих наблюдаемых. Это множество можно сделать полным, добавляя компоненты полного спина, например $S_z = \sum_{i=1}^N \sigma_i^z$. Гамильтонианы (1) определяют так называемые рациональные магнетики Годена и остаются интегрируемыми также и в классическом пределе. Гамильтониан относится к этому классу гамильтонианов, если положить $\eta_k = \alpha \epsilon_k$. В этом случае он становится независимым от параметров:

$$\mathcal{H} = \sum_{j,l=1}^N \vec{\sigma}_j \cdot \vec{\sigma}_l. \quad (3)$$

Действительно, тогда магнетик Годена не только интегрируемый, но и максимально суперинтегрируемый. Систему, определяемую гамильтонианом (3), будем называть “максимально суперинтегрируемым магнетиком Годена”. Это утверждение доказывается непосредственно: так как гамильтониан (3) не зависит от параметра, можно совершенно произвольным образом выбирать параметры внутри множества H_j . Таким образом, мы выбираем еще одно множество параметров ξ_k и полагаем

$$\tilde{H}_l = \sum_{j \neq l} \frac{\vec{\sigma}_j \cdot \vec{\sigma}_l}{\xi_j - \xi_l}.$$

В общем случае выбора множества ξ_k наблюдаемые $H_k, \tilde{H}_k, k = 1, \dots, N - 2$, будут алгебраически независимыми; таким образом, мы имеем два множества коммутирующих наблюдаемых:

$$\{\mathcal{H}, H_1, \dots, H_{N-2}, S_z\}, \quad \{\mathcal{H}, \tilde{H}_1, \dots, \tilde{H}_{N-2}, S_x\}.$$

Недавно разные авторы [2]–[4] независимо друг от друга показали, что гамильтониану (3) можно поставить в соответствие полное множество не зависящих от параметров коммутирующих наблюдаемых. Такие операторы имеют вид

$$I_k = \sum_{j,l=1}^k \vec{\sigma}_j \cdot \vec{\sigma}_l, \quad k = 2, \dots, N, \quad I_1 = S_z \quad (4)$$

и дают полное множество инволютивных интегралов в классическом пределе.

В работе [4] классическая версия интегралов (4) была получена при изучении многоугольников в евклидовом пространстве; там также интегрировались уравнения движения и были получены переменные “действие–угол”.

В работах [2], [3] множество интегралов (4) было получено при изучении алгебраической структуры некоторой классической вполне интегрируемой системы, предложенной Калоджеро [5]. Действительно, оказалось, что гамильтонианы Калоджеро можно рассматривать в классическом пределе как образы гамильтонианов (4) под действием некоторого морфизма Пуассона. Результаты работы [2] легли в основу метода коалгебры [6], [7], а позднее и метода кодействий [8], позволяющего строить классические и квантовые интегрируемые системы и применимого в обеих этих постановках лишь с небольшими модификациями. Таким образом, оказалось, что возможен единый подход, который мы предлагаем в данной работе и иллюстрируем его примером максимально суперинтегрируемого магнетика Годена.

2. АЛГЕБРЫ ЖОРДАНА–ЛИ

Кратко напомним алгебраическую структуру классических и квантовых наблюдаемых. Классическая наблюдаемая – это гладкая функция $\mathcal{F}: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$, где $\mathcal{P}$ является пуассоновым многообразием. Пространство классических наблюдаемых естественным образом оснащено двумя билинейными операциями: поточечным умножением $(f \cdot g)(x) := f(x)g(x)$, $x \in \mathcal{P}$, и скобкой Пуассона $[,]$, которая в локальных координатах имеет вид:

$$[f, g](x) := \sum_{i,j}^N \mathcal{P}_{ij}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j}, \quad x = (x_1, \dots, x_N),$$

где $\mathcal{P}_{ij}$ – тензор Пуассона. Поточечное умножение дает унитарное, ассоциативное и коммутативное произведение, а скобка Пуассона дает произведение Ли; эти две структуры связаны правилом Лейбница (т.е. произведение Ли является производной для ассоциативного произведения).

С другой стороны, квантовая наблюдаемая является самосопряженным оператором на некотором заданном гильбертовом пространстве. Пространство квантовых наблюдаемых также оснащено двумя билинейными операциями, определяемыми композицией операторов: антикоммутатором $(a \cdot b) := ab + ba$, который является коммутативным, но не ассоциативным унитарным произведением, и произведением Ли $[a, b] := i(ab - ba)$. Заметим, что как “классическое”, так и “квантовое” произведение удовлетворяют тождеству Жордана, а именно

$$(a \cdot b) \cdot a^2 = a \cdot (b \cdot a^2).$$

Следовательно, как классические, так и квантовые наблюдаемые порождают “алгебры Жордана–Ли” [9].

Можно непосредственно обобщить определение алгебры Жордана–Ли, заменяя произведение Жордана $(\cdot)$ на ассоциативное, но не обязательно коммутативное произведение $(\circ)$. В данной работе мы рассматриваем следующий случай алгебры Жордана–Ли: тогда как классическое произведение снова задается поточечным умножением, квантовое произведение является просто (некоммутативной) композицией операторов:

$$(a \circ b) := ab.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Обобщенная алгебра Жордана–Ли – это векторное пространство $\mathcal{A}$, оснащенное такими двумя билинейными отображениями $\circ$ и $[,]$, что для всех $a, b, c \in \mathcal{A}$ выполняются соотношения

$$\begin{aligned} a \circ b &\in \mathcal{A}, \\ (a \circ b) \circ c &= a \circ (b \circ c), \\ [a, b] &\in \mathcal{A}, \\ [a, b] &= -[b, a], \\ [a, [b, c]] + [c, [a, b]] + [b, [c, a]] &= 0, \\ [a, b \circ c] &= b \circ [a, c] + [a, b] \circ c. \end{aligned}$$

Основным предметом рассмотрения в данной статье будет так называемая “свободная тензорная алгебра” (tensor free algebra). Если задана N -мерная алгебра Ли g с генераторами X_i , $i = 1, \dots, N$, то мы рассматриваем векторное пространство, натянутое на формальные произведения генераторов; базис этого пространства задается мономы $1, X_i, 1 \circ X_i, X_i \circ 1, X_i \circ X_j, \dots$. Это векторное пространство является ассоциативной унитарной алгеброй относительно формального произведения $\circ$. Можно расширить действие скобок Ли с подпространства $g \subset T(g)$ на все $T(g)$, если предположить, что выполняется правило Лейбница

$$[a \circ b, c] = a \circ [b, c] + [a, c] \circ b$$

для всех $a, b, c \in T(g)$. Таким образом, $T(g)$ становится алгеброй Жордана–Ли. Интересной для нас ее делает следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. $T(g)$ допускает канонические морфизмы на универсальную обволакивающую алгебру $U(g)$ и на алгебру Ли–Пуассона $\mathcal{F}(g^*)$, соответствующую g .

Чтобы задать морфизм алгебры Жордана–Ли между $T(g)$ и другой алгеброй Жордана–Ли $\mathcal{A}$, достаточно задать морфизм алгебры Ли $\phi: g \rightarrow \mathcal{A}$:

$$\phi([X, Y]) = [\phi(X), \phi(Y)], \quad X, Y \in g.$$

Тогда это отображение продолжается с g на все $T(g)$ благодаря свойству морфизма произведения

$$\phi(XY) = \phi(X)\phi(Y).$$

Так мы завершаем рассмотрение морфизма алгебры Жордана–Ли между $T(g)$ и $\mathcal{A}$.

Так как $T(g)$ и $U(g)$ порождаются одной и той же алгеброй g , морфизм алгебры Ли $\phi|_g: g \rightarrow U(g)$ – это просто тождественное отображение. Действуя аналогично, мы можем продолжить это отображение на все $T(g)$ так, чтобы оно определяло морфизм алгебры Жордана–Ли. Ядро этого отображения задается билатеральным идеалом I , порождаемым элементами $X_i X_j - X_j X_i - C_{ij}^k X_k$. Кроме того, мы видим, что это отображение является сюръективным.

Так как g и g^* являются изоморфными как алгебры Ли, аналогичным образом мы можем определить морфизмы алгебр Жордана–Ли между $T(g)$ и $\mathcal{F}(g^*)$. Теперь ядро этого отображения задается элементами вида $X_i X_j - X_j X_i$.

Заметим, что, кроме тривиального морфизма, невозможно определить морфизм алгебры Жордана–Ли между $U(g)$ и $\mathcal{F}(g^*)$ или наоборот, если только алгебра Ли g не является абелевой.

3. АБЕЛЕВЫ ПОДАЛГЕБРЫ

В дальнейшем мы будем рассматривать тензорные произведения свободных тензорных алгебр. Следовательно, мы должны расширить нашу методику так, чтобы ее можно было применять в этом случае. Если заданы две свободные тензорные алгебры $T(g_1)$ и

$T(g_2)$, на их тензорном произведении мы определим скобку и ассоциативное произведение следующим образом:

$$(a \otimes b) \circ_{T(g_1) \otimes T(g_2)} (a' \otimes b') = a \circ_{T(g_1)} a' \otimes b \circ_{T(g_2)} b', \quad (5)$$

$$[a \otimes b, a' \otimes b']_{T(g_1) \otimes T(g_2)} = [a, a']_{T(g_1)} \otimes b \circ_{T(g_2)} b' + a' \circ_{T(g_1)} a \otimes [b, b']_{T(g_2)}. \quad (6)$$

В дальнейшем будем опускать нижние индексы, обозначающие пространства, в которых мы действуем.

Итак, мы определили две билинейные операции на тензорном произведении $T(g_1) \otimes T(g_2)$, но эти операции больше не удовлетворяют аксиомам алгебры Жордана–Ли. Действительно, в общем случае тождество Якоби и правило Лейбница не действуют. Однако если мы заменим $T(g_i)$ на $U(g_i)$ (соответственно на $\mathcal{F}(g_i^*)$), то (5) и (6) определяют структуру алгебры Жордана–Ли в $U(g_1) \otimes U(g_2)$ (соответственно, в $\mathcal{F}(g_1^*) \otimes \mathcal{F}(g_2^*)$). Следовательно, рассматривая канонические проекции, мы видим, что $(\phi_{c,q} \otimes \phi_{c,q})(T(g_1) \otimes T(g_2))$ дают нам алгебры Жордана–Ли. Определения (5) и (6) тривиальным образом продолжаются на тензорные произведения n свободных тензорных алгебр.

Теперь наша цель – получить “большую” абелеву алгебру внутри тензорного произведения n свободных тензорных алгебр. Рассмотрим множество $\{T(g_1), \dots, T(g_n)\}$ свободных тензорных алгебр и предположим, что можно найти множество подалгебр (в том смысле, что они замкнуты относительно двух операций $\circ$ и $[\cdot, \cdot]$) $\{B_1, \dots, B_n\}$ таких, что

$$B_1 \subset T(g_1) \otimes T(g_2), \quad B_{i+1} \subset B_i \otimes T(g_{i+2}), \quad i = 1, \dots, n-2.$$

Также предположим, что элемент Казимира $C_{B_i} \in B_i$ относительно скобки на B_i существует при любом i . Если мы введем обозначения

$$\begin{aligned} C_1 &= C_{B_1} \otimes \overbrace{1 \otimes \dots \otimes 1}^{N-2}, \\ &\dots\dots\dots \\ C_{n-2} &= C_{B_{n-2}} \otimes 1, \\ C_{n-1} &= C_{B_{n-1}}, \end{aligned}$$

то можно сформулировать следующую теорему.

ТЕОРЕМА. *Множество $\{C_1, \dots, C_{n-1}\}$ состоит из взаимно коммутирующих элементов $T(g_1) \otimes \dots \otimes T(g_n)$ и центральных элементов B_{N-1} .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы имеем следующие включения:

$$B_i \subset B_{i-1} \otimes T(g_{i+1}) \subset B_{i-2} \otimes T(g_i) \otimes T(g_{i+1}) \subset \dots \subset B_1 \otimes T(g_3) \otimes \dots \otimes T(g_{i+1}),$$

следовательно ($i \leq j$),

$$\begin{aligned} [C_i, C_j] &\in [C_i \otimes 1^{\otimes j-i} \otimes 1^{\otimes N-j}, B_i \otimes T(g_{i+1}) \otimes \dots \otimes T(g_{j+1}) \otimes 1^{\otimes N-j}] = 0, \\ [C_i, B_{N-1}] &\in [C_i \otimes 1^{\otimes N-i}, B_i \otimes T(g_{i+1}) \otimes \dots \otimes T(g_n)] = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, для произвольного элемента $I \in B_{N-1}$ множество $\{I, C_2, \dots, C_{N-1}\}$ дает n -мерную абелеву подалгебру алгебры $T(g_1) \otimes \dots \otimes T(g_n)$.

Проекция этой абелевой подалгебры, осуществляемая с помощью ϕ_c или ϕ_q , порождает абелеву подалгебру соответственно внутри $\mathcal{F}(g^*)$ или внутри $U(g)$. Если ее размерность равна половине степеней свободы, то мы получаем классическую интегрируемую гамильтонову систему в первом случае и квантовую интегрируемую гамильтонову систему – во втором.

4. МАКСИМАЛЬНО СУПЕРИНТЕГРИРУЕМЫЙ МАГНЕТИК ГОДЕНА

Простейший пример этой процедуры дает максимально суперинтегрируемый магнетик Годена. Рассмотрим алгебру Ли $sl(2)$. Она натянута на генераторы h, e, f , удовлетворяющие коммутационным соотношениям $[h, e] = 2e$, $[h, f] = -2f$, $[e, f] = h$. Внутри $T(sl(2))$ мы имеем элемент Казимира

$$c = h^2 + 2ef + 2fe.$$

Возьмем теперь тензор из N копий алгебры $T(sl(2))$ и для краткости введем символ x_i для элемента

$$\underbrace{1 \otimes \dots \otimes 1}_{i-1} \otimes x \otimes \underbrace{1 \otimes \dots \otimes 1}_{N-i} \in T(sl(2))^{\otimes N}.$$

Кроме того, мы определим подалгебры B_i как образы $T(sl(2))$ под действием отображений $\Delta^{(i+1)}$ [7], определенных как

$$\begin{aligned} \Delta^{(i)}(x) &= \sum_{k=1}^i x_k, \quad x \in sl(2), \\ \Delta^{(i)}(xy) &= \Delta^{(i)}(x)\Delta^{(i)}(y), \\ B_i &= \Delta^{(i+1)}(T(sl(2))). \end{aligned}$$

Непосредственно проверяется, что отображения $\Delta^{(i)}$ дают морфизмы алгебр Жордана–Ли, так что каждая B_i имеет элемент Казимира $C_{B_i} = \Delta^{(i+1)}(c)$. Применяя теорему, мы видим, что элементы

$$\begin{aligned} C_1 &= (h_1 + h_2)^2 + 2(e_1 + e_2)(f_1 + f_2) + 2(f_1 + f_2)(e_1 + e_2), \\ C_2 &= (h_1 + h_2 + h_3)^2 + 2(e_1 + e_2 + e_3)(f_1 + f_2 + f_3) + \\ &\quad + 2(f_1 + f_2 + f_3)(e_1 + e_2 + e_3), \\ &\dots\dots\dots \\ C_{N-1} &= \left(\sum_{i=1}^N h_i\right)^2 + 2\left(\sum_{i=1}^N e_i\right)\left(\sum_{i=1}^N f_i\right) + 2\left(\sum_{i=1}^N f_i\right)\left(\sum_{i=1}^N e_i\right), \\ I &= \sum_{i=1}^N h_i \end{aligned}$$

образуют абелеву подалгебру внутри $T(sl(2))^{\otimes N}$.

Пусть теперь s^3, s^+, s^- – координаты на $\mathcal{F}(sl(2)^*)$, а скобки Пуассона имеют вид

$$\{s^3, s^+\} = 2s^+, \quad \{s^3, s^-\} = 2s^-, \quad \{s^+, s^-\} = s^3.$$

Тогда каноническое проектирование ϕ_c :

$$\phi_c(h) = s^3, \quad \phi_c(e) = s^+, \quad \phi_c(f) = s^-,$$

дает классическую интегрируемую систему, определенную множеством инволютивных интегралов:

$$\begin{aligned} \phi_c(C_k) &= \left(\sum_{i=1}^{k+1} s_i^3 \right)^2 + 4 \left(\sum_{i=1}^{k+1} s_i^+ \right) \left(\sum_{j=1}^{k+1} s_j^- \right), \quad k = 1, \dots, N-1, \\ \phi_c(I) &= \sum_{i=1}^N s_i^3. \end{aligned}$$

Заметим, что $\phi_c(C_{N-1})$ – это в точности гамильтониан классического максимально суперинтегрируемого магнетика Годена.

Теперь рассмотрим спин-1/2-представление алгебры $sl(2)$:

$$\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Каноническое проектирование ϕ_q определяется как

$$\phi_q(h) = \sigma^3, \quad \phi_q(e) = \sigma^+, \quad \phi_q(f) = \sigma^-,$$

и мы получаем квантовую интегрируемую систему, определяемую множеством коммутирующих операторов:

$$\begin{aligned} \phi_q(C_k) &= \left(\sum_{i=1}^{k+1} \sigma_i^3 \right)^2 + 2 \left(\sum_{i=1}^{k+1} \sigma_i^+ \right) \left(\sum_{j=1}^{k+1} \sigma_j^- \right) + 2 \left(\sum_{i=1}^{k+1} \sigma_i^- \right) \left(\sum_{j=1}^{k+1} \sigma_j^+ \right), \\ &k = 1, \dots, N-1, \\ \phi_q(I) &= \sum_{i=1}^N \sigma_i^3. \end{aligned}$$

Заметим, что $\phi_q(C_{N-1})$ – это в точности гамильтониан максимально суперинтегрируемого квантового магнетика Годена со спином 1/2.

5. ВЫВОДЫ

Мы показали, что гамильтониан максимально суперинтегрируемого магнетика Годена (3) можно записать в виде

$$\mathcal{H} = \Delta^{(N)}(c), \quad (7)$$

где c — элемент Казимира алгебры $sl(2)$. Если рассматривать полупростую алгебру Ли высшего ранга, например $sl(n)$, мы можем определить $sl(n)$ -гамильтониан Годена, применяя отображение $\Delta^{(N)}$ к квадратичному элементу Казимира. Однако для алгебр Ли высшего ранга полное семейство не зависящих от параметров коммутирующих интегралов движения неизвестно. Недавно Фалки и Муссо [10] сумели получить это обобщение, применяя бигамильтонов подход, но только в классическом случае. Ведется работа по распространению этого результата на квантовый случай, возможно, в рамках, обозначенных в данной статье.

Совместно с Харнадом и Фалки ведется также работа по обобщению результатов Каповича и Миллсона [4] на случай полупростых алгебр Ли произвольного ранга.

Список литературы

- [1] *M. Gaudin.* J. Physique. 1976. V. 37. P. 1087–1098; *М. Годен.* Волновая функция Бете. М.: Мир, 1987.
- [2] *A. Ballesteros, M. Corsetti, O. Ragnisco.* Czech. J. Phys. 1996. V. 46. P. 1153–1165.
- [3] *V. Karimipour.* J. Math. Phys. 1998. V. 39. P. 913–920.
- [4] *M. Kapovich, J. Millson.* J. Diff. Geom. 1996. V. 44. P. 479–513.
- [5] *F. Calogero.* Phys. Lett. A. 1995. V. 201. P. 306–310.
- [6] *A. Ballesteros, O. Ragnisco.* J. Phys. A. 1998. V. 31. P. 3791–3813.
- [7] *A. Ballesteros, O. Ragnisco.* J. Math. Phys. 2002. V. 43. P. 954–969.
- [8] *A. Ballesteros, F. Musso, O. Ragnisco.* J. Phys. A. 2002. V. 35. P. 8197–8211.
- [9] *N. P. Landsman.* Mathematical Topics Between Classical and Quantum Mechanics. New York: Springer, 1996.
- [10] *G. Falqui, F. Musso.* В печати.