Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Дж. Харнад, А. Ю. Орлов, Скалярные произведения симметрических функций и матричные интегралы, *ТМФ*, 2003, том 137, номер 3, 375–392

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf279>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 15:14:55

© 2003 г.

Дж. Харнад*, А. Ю. Орлов†

СКАЛЯРНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ СИММЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И МАТРИЧНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Представлены соотношения между билинейными операторами типа Хироты, скалярными произведениями на пространствах симметрических функций и интегралами, задающими статистические суммы матричных моделей. Используя представление фермионного пространства Фока, удастся доказать разлагаемость ассоциированного класса тау-функций $\tau_{r,n}$ иерархии Кадомцева–Петвиашвили и двумеризованной цепочки Тоды в ряд по функциям Шура, обобщающий разложение в гипергеометрический ряд и связанный с формулами скалярного произведения. Показано, как специально выбранные тау-функции из такого класса отождествляются как формальные ряды со статистическими суммами. Выведено в замкнутой форме разложение $\ln \tau_{r,n}$ в терминах функций Шура.

Ключевые слова: симметрические функции, гипергеометрические функции, статистические суммы, тау-функции, матричные модели, решетки Тоды.

1. РАЗБИЕНИЯ, ФУНКЦИИ ШУРА И СКАЛЯРНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

1.1. Разбиения. Напомним стандартные определения и обозначения из теории симметрических функций и разбиений (см. более подробное изложение в книге [1]). Симметрические многочлены многих переменных параметризуются разбиениями. *Разбиение* представляет собой любую (конечную или бесконечную) последовательность неотрицательных целых чисел, записанную в порядке убывания:

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r, \dots), \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r \geq \dots \quad (1.1)$$

Ненулевые члены λ_i в разбиении (1.1) называются *членами разбиения* λ ; число членов равно *длине разбиения* λ и обозначается как $l(\lambda)$, а сумма всех членов называется *весом*

---

*Centre de Recherches Mathématiques, Université de Montréal, C.P. 6128, succ. centre ville, Montréal, Québec, Canada H3C 3J7; Department of Mathematics and Statistics, Concordia University, 7141 Sherbrooke W., Montréal, Québec, Canada H4B 1R6. E-mail: harnad@crm.umontreal.ca

†Институт океанологии РАН, Нахимовский пр. 36, 117851, Москва, Россия.
E-mail: orlovs@wave.sio.rssi.ru

разбиения λ и обозначается через $|\lambda|$. Если $n = |\lambda|$, то будем говорить, что λ является разбиением n . Разбиение нуля обозначается через (0) .

Диаграмма разбиения (или диаграмма Юнга) определяется как набор точек (или ячеек) $\{(i, j) \in \mathbb{Z}^2\}$ такой, что $1 \leq j \leq \lambda_i$. Поэтому диаграмму Юнга можно изобразить как подмножество матричных элементов в матрице с $l(\lambda)$ рядами и λ_1 столбцами. Диаграмма разбиения λ обозначается тем же символом.

Например,

представляет собой диаграмму разбиения $(3, 3, 1)$. Вес этого разбиения равен 7, а длина равна 3.

Другое определение разбиения восходит к Фробениусу. Предположим, что главная диагональ диаграммы λ состоит из r ячеек (i, i) , $1 \leq i \leq r$. Пусть $\alpha_i = \lambda_i - i$ — число ячеек в i -м ряду диаграммы λ справа от (i, i) при $1 \leq i \leq r$ и пусть $\beta_i = \lambda'_i - i$ — число ячеек в i -м столбце диаграммы λ ниже диагонали (i, i) при $1 \leq i \leq r$. Имеем $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_r \geq 0$ и $\beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_r \geq 0$. В обозначениях Фробениуса разбиение λ обозначается как

$$\lambda = (\alpha_1, \dots, \alpha_r \mid \beta_1, \dots, \beta_r) = (\alpha \mid \beta).$$

Это отвечает разложению диаграммы λ по крюкам, в котором наибольший крюк имеет вид $(\alpha_1 \mid \beta_1)$, следующий за ним $(\alpha_2 \mid \beta_2)$ и т.д. вплоть до наименьшего крюка, который равен $(\alpha_r \mid \beta_r)$. Углы крюков расположены на главной диагонали диаграммы. Например, разбиение $(3, 3, 1)$ состоит из двух крюков $(2, 2)$ и $(1, 0)$:

Таким образом, в обозначениях Фробениуса это разбиение будет иметь вид $(2, 1 \mid 2, 0)$.

1.2. Скалярные произведения функций Шура. В применении к теории уравнения Кадомцева–Петвиашвили (КП) полезно рассмотреть функции Шура s_λ как базис в пространстве взвешенных однородных многочленов от бесконечного набора переменных $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots)$ (с весом $(\gamma_j) = j$), задаваемых формулами

$$s_\lambda(\gamma) = \det(h_{\lambda_i - i + j}(\gamma))_{1 \leq i, j \leq r}, \quad (1.2)$$

где $\{h_n(\gamma)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ — элементарные функции Шура (или полностью симметрические функции), задаваемые разложением Тейлора вида

$$e^{\xi(\gamma, z)} := \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k z^k\right) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n h_n(\gamma), \quad (1.3)$$

а $h_n(\gamma) \equiv 0$ при $n < 0$. Если задать параметры $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots)$ в терминах конечного набора переменных $(x_1, \dots, x_N)$ формулой

$$\gamma_j = \frac{1}{j} \sum_{a=1}^N x_a^j, \quad (1.4)$$

т.е. если функции Шура интерпретируются как неприводимые характеры представления $GL(N)$, то можно использовать обозначения $s_\lambda([\mathbf{x}])$, где

$$[\mathbf{x}] := \left(\sum_{a=1}^N x_a, \sum_{a=1}^N x_a^2, \dots \right).$$

Тождество Коши–Литтлвуда [1] задает производящую функцию для полного набора функций Шура, рассматриваемых как функции от двух конечных наборов переменных $(x_1, \dots, x_N)$, $(y_1, \dots, y_M)$:

$$\prod_{a=1}^N \prod_{b=1}^M (1 - x_a y_b)^{-1} = \sum_{\lambda} s_{\lambda}(\mathbf{t}) s_{\lambda}(\mathbf{t}^*), \quad (1.5)$$

где

$$t_j = \frac{1}{j} \sum_{a=1}^N x_a^j, \quad t_j^* = \frac{1}{j} \sum_{a=1}^M y_a^j, \quad (1.6)$$

$\mathbf{t} := (t_1, t_2, \dots)$ и $\mathbf{t}^* := (t_1^*, t_2^*, \dots)$.

Скалярное произведение [1] задается на пространстве взвешенных однородных многочленов от бесконечной последовательности переменных, и оно таково, что функции Шура ортонормальны:

$$\langle s_{\lambda}, s_{\mu} \rangle = \delta_{\mu, \lambda}.$$

В подходе иерархий КП и решетки Тоды (РТ) переменные $\{x_i\}$ в формуле (1.4) (возможно, при $N = \infty$) называются переменными Хироты–Мивы, а набор $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots)$ параметризует поток иерархии КП.

2. ДЕФОРМАЦИЯ СТАНДАРТНОГО СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ И РЯДЫ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ТИПА

2.1. Скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle_{r, n}$. Пусть даны функция $r(n)$ от целых чисел $n \in \mathbb{Z}$ и разбиение λ веса $|\lambda|$ и длины $l(\lambda)$. Введем обозначение

$$r_{\lambda}(n) := \prod_{i, j \in \lambda} r(n + j - i) = \prod_{i=1}^{l(\lambda)} \prod_{j=1}^{\lambda_i} r(n + j - i). \quad (2.1)$$

Тем самым $r_{\lambda}(n)$ есть произведение значений функции r , сдвинутых на *содержание* ячейки $(j - i)$, взятое по всем ячейкам диаграммы Юнга разбиения λ . Например, для разбиения $(3, 3, 1)$ имеем

$$r_{(3, 3, 1)}(n) = r(n + 2)(r(n + 1))^2 (r(n))^2 r(n - 1)r(n - 2).$$

Для нулевого разбиения положим $r_0 \equiv 1$.

Для заданной функции r и целого числа n , бóльшего или равного максимальному нулю функции r , можно определить связанную с ними билинейную форму $\langle \cdot, \cdot \rangle_{r,n}$:

$$\langle s_\lambda, s_\mu \rangle_{r,n} = r_\lambda(n) \delta_{\lambda\mu}. \quad (2.2)$$

Пусть $\{n_i \in \mathbb{Z}\}$ – набор нулей функции r и $k := \min |n - n_i|$. Произведение (2.2) невырожденно на пространстве Λ_k симметрических многочленов от k переменных $\mathbf{x}^k := (x_1, \dots, x_k)$. Это следует из того, что по определению (2.1) величина $r_\lambda(n)$ никогда не обращается в нуль для разбиения λ длины $l(\lambda) \leq k$. Тогда функции Шура от k переменных $\{s_\lambda([\mathbf{x}^k]), l(\lambda) \leq k\}$ образуют базис в пространстве Λ_k . Если, наоборот, $n - n_i < 0$ для всех нулей функции r , то множитель $r_\lambda(n)$ никогда не обращается в нуль для разбиения $\{\lambda: l(\lambda') \leq k\}$, где λ' – сопряженное разбиение, и $\{s_\lambda(-[\mathbf{x}^k]), l(\lambda') \leq k\}$ задают базис на Λ_k . Если функция r не обращается в нуль, то скалярное произведение невырожденно на Λ_∞ .

2.2. Основной пример. Случай $r(n) = n$ играет выделенную роль в приложениях к двухматричным моделям. Обозначим через $\langle \cdot, \cdot \rangle'_n$ скалярное произведение в этом случае:

$$\langle s_\lambda, s_\mu \rangle'_n = (n)_\lambda \delta_{\lambda\mu}, \quad (n)_\lambda = \prod_{i=1}^{l(\lambda)} \prod_{j=1}^{\lambda_i} (n - i + j) \quad (2.3)$$

(напомним, что ограничение его на любое пространство симметрических многочленов от $\leq n$ переменных невырожденно). Для пары (f, g) симметрических функций от n переменных $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ получим следующую простую реализацию этого скалярного произведения:

$$\langle f, g \rangle'_n = \frac{1}{c_n} \Delta(\partial) f(\partial) \cdot \Delta(\mathbf{x}) g(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=0}, \quad c_n = \prod_{k=1}^n k!, \quad (2.4)$$

где

$$\Delta(\mathbf{x}) := \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)$$

– определитель Вандермонда,

$$\Delta(\partial) := \prod_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \right), \quad (2.5)$$

а $f(\partial)$ – оператор, получаемый при замене $\{x_i\}$ на $\{\partial/\partial x_i\}$. Доказательство соотношения (2.4) следует из формулы Якоби–Труди для функции Шура [1]

$$s_\lambda(\mathbf{x}) = \frac{\det(x_i^{\lambda_j + n - j})_{i,j=1,\dots,n}}{\Delta(\mathbf{x})} \quad (2.6)$$

и формулы

$$\frac{1}{c_n} \det(\partial_{x_i}^{\lambda_j + n - j})_{i,j=1,\dots,n} \det(x_i^{\mu_j + n - j})_{i,j=1,\dots,n} \Big|_{\mathbf{x}=0} = (n)_\lambda \delta_{\lambda\mu} = \langle s_\lambda, s_\mu \rangle_{r,n}. \quad (2.7)$$

(Интересно сравнить скалярное произведение (2.4) с произведением, построенным в работе [2].)

Представим две различные реализации формулы (2.4) с помощью следующих многократных интегралов.

А.

$$\langle f, g \rangle'_n = \frac{1}{\pi^n c_n} \int_{\mathbb{C}} \dots \int_{\mathbb{C}} f(\mathbf{z}) g(\bar{\mathbf{z}}) e^{-|z_1|^2 - \dots - |z_n|^2} |\Delta(\mathbf{z})|^2 d^2 z_1 \dots d^2 z_n, \quad (2.8)$$

где интегрирование идет по n копиям $\{z_i\}_{i=1,\dots,n}$ комплексной плоскости. Доказательство формулы (2.8) вытекает из следующей реализации, верной для любой пары полиномиальных функций (a, b) от одной переменной:

$$a\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot b(z) \Big|_{z=0} = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} a(z) b(\bar{z}) e^{-|z|^2} dz d\bar{z}. \quad (2.9)$$

Б.

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle'_n &= \frac{1}{(2\pi i)^n c_n} \times \\ &\times \int_{\text{Re}} \int_{\text{Im}} \dots \int_{\text{Re}} \int_{\text{Im}} f(\mathbf{x}) g(\mathbf{y}) e^{-(x_1 y_1 + \dots + x_n y_n)} \Delta(\mathbf{x}) \Delta(\mathbf{y}) dx_1 dy_1 \dots dx_n dy_n, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где интегрирование идет по n копиям $\{x_i\}_{i=1,\dots,n}$ вещественной прямой и n копиям $\{y_i\}_{i=1,\dots,n}$ мнимой прямой. Если f и g — многочлены, то эти интегралы могут быть вычислены в терминах обобщенных функций при подходящей процедуре регуляризации. С другой стороны, можно интерпретировать реализацию (2.10) как примененную к паре функций f, g , которые убывают достаточно быстро на бесконечности, чтобы обеспечить сходимость интеграла.

Доказательство реализации (2.10) следует из формулы

$$a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \cdot b(x) \Big|_{x=0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{Re}} \int_{\text{Im}} a(x) b(y) e^{-xy} dx dy. \quad (2.11)$$

Ниже в основном рассматриваются следующие ряды:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_n} \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n t_m \partial_{x_i}^m\right) \Delta(\partial) \cdot \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n t_m^* x_i^m\right) \Delta(x) \Big|_{\mathbf{x}=0} = \\ = \sum_{\lambda} (n)_\lambda s_\lambda(\mathbf{t}) s_\lambda(\mathbf{t}^*). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Это равенство можно получить из формул (2.3), (2.4) и обобщенного тождества Коши–Литтлвуда (см. формулу (4.7) ниже). Правая часть, вообще говоря, расходится и должна рассматриваться как градуированный формальный полиномиальный ряд. Ее можно отождествить с гипергеометрическим рядом ${}_2\mathcal{F}_0(n, n; \mathbf{t}, \mathbf{t}^*)$ (см. [3]).

3. ФЕРМИОННЫЕ ОПЕРАТОРЫ, ВАКУУМНЫЕ ОЖИДАНИЯ, ТАУ-ФУНКЦИИ

3.1. Свободные фермионы. Воспользуемся формализмом фермионного пространства Фока, как было сделано в работе [4]. Алгебра *свободных фермионов* – это бесконечномерная алгебра Клиффорда $\mathbf{A}$ над полем $\mathbb{C}$ с генераторами ψ_n, ψ_n^* , $n \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющими соотношениям антикоммутации:

$$[\psi_m, \psi_n]_+ = [\psi_m^*, \psi_n^*]_+ = 0, \quad [\psi_m, \psi_n^*]_+ = \delta_{mn}, \quad m, n \in \mathbb{Z}. \quad (3.1)$$

Любой элемент пространства $W = \left(\bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \mathbb{C}\psi_m\right) \oplus \left(\bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \mathbb{C}\psi_m^*\right)$ называется *свободным фермионом*. Алгебра Клиффорда допускает следующее стандартное представление (*представление Фока*). Пусть $W_{\text{ан}} = \left(\bigoplus_{m < 0} \mathbb{C}\psi_m\right) \oplus \left(\bigoplus_{m \geq 0} \mathbb{C}\psi_m^*\right)$ и $W_{\text{ср}} = \left(\bigoplus_{m \geq 0} \mathbb{C}\psi_m\right) \oplus \left(\bigoplus_{m < 0} \mathbb{C}\psi_m^*\right)$. Рассмотрим левый и правый $\mathbf{A}$ -модули $F = \mathbf{A}/\mathbf{A}W_{\text{ан}}$ и $F^* = W_{\text{ср}}\mathbf{A}/\mathbf{A}$, соответственно. Они представляют собой циклические $\mathbf{A}$ -модули, порожденные векторами $|0\rangle = 1 \pmod{\mathbf{A}W_{\text{ан}}}$ и $\langle 0| = 1 \pmod{W_{\text{ср}}\mathbf{A}}$, соответственно, со свойствами

$$\begin{aligned} \psi_m|0\rangle &= 0 \quad (m < 0), & \psi_m^*|0\rangle &= 0 \quad (m \geq 0), \\ \langle 0|\psi_m &= 0 \quad (m \geq 0), & \langle 0|\psi_m^* &= 0 \quad (m < 0). \end{aligned}$$

Векторы $\langle 0|$ и $|0\rangle$ называются левым и правым вакуумными векторами. Фермионы $w \in W_{\text{ан}}$ уничтожают левый вакуум, в то время как фермионы $w \in W_{\text{ср}}$ уничтожают правый вакуум.

Пространства Фока F и F^* взаимно дуальны, спаривание между ними задается линейной формой $\langle 0| \cdot |0\rangle$ на $\mathbf{A}$ и называется *вакуумным ожиданием*. Оно дается формулами

$$\begin{aligned} \langle 0|1|0\rangle &= 1, & \langle 0|\psi_m\psi_m^*|0\rangle &= 1 \quad (m < 0), & \langle 0|\psi_m^*\psi_m|0\rangle &= 1 \quad (m \geq 0), \\ \langle 0|\psi_m\psi_n|0\rangle &= \langle 0|\psi_m^*\psi_n^*|0\rangle = 0, & \langle 0|\psi_m\psi_n^*|0\rangle &= 0 \quad (m \neq n) \end{aligned}$$

и *правилом Вика*, имеющим вид

$$\begin{aligned} \langle 0|w_1 \dots w_{2n+1}|0\rangle &= 0, \\ \langle 0|w_1 \dots w_{2n}|0\rangle &= \sum_{\sigma} \text{sgn } \sigma \langle 0|w_{\sigma(1)}w_{\sigma(2)}|0\rangle \dots \langle 0|w_{\sigma(2n-1)}w_{\sigma(2n)}|0\rangle, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $w_k \in W$ и σ перечисляет перестановки такие, что $\sigma(1) < \sigma(2)$, $\sigma(3) < \sigma(4)$, $\dots$, $\sigma(2n-1) < \sigma(2n)$ и $\sigma(1) < \sigma(3) < \dots < \sigma(2n-1)$, $\sigma(k)$ есть образ числа k при перестановке σ .

3.2. Алгебра Ли $\widehat{gl}(\infty)$. Рассмотрим матрицы бесконечного размера $(a_{ij})_{i,j \in \mathbb{Z}}$, которые удовлетворяют следующему условию: существует N такое, что $a_{ij} = 0$ при $|i - j| > N$. Такие матрицы называются обобщенными матрицами Якоби (или “ленточными” матрицами), и они образуют алгебру Ли относительно обычной скобки матричного коммутатора.

Обозначим через $:$ ... $:$ оператор нормального упорядочения, определенный таким образом, что

$$:\psi_i \psi_j^*: = \psi_i \psi_j^* - \langle 0 | \psi_i \psi_j^* | 0 \rangle. \quad (3.3)$$

Линейные комбинации квадратичных элементов вида

$$\sum_{i,j \in \mathbb{Z}} a_{ij} : \psi_i \psi_j^* :$$

вместе с единичным элементом образуют бесконечномерную алгебру Ли $\widehat{gl}(\infty)$:

$$\left[\sum_{i,j \in \mathbb{Z}} a_{ij} : \psi_i \psi_j^* :, \sum_{i,j \in \mathbb{Z}} b_{ij} : \psi_i \psi_j^* : \right] = \sum_{i,j \in \mathbb{Z}} c_{ij} : \psi_i \psi_j^* : + c_0, \quad (3.4)$$

где

$$c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj} - \sum_k b_{ik} a_{kj}.$$

Последнее слагаемое в равенстве (3.4),

$$c_0 = \sum_{i < 0, j \geq 0} a_{ij} b_{ji} - \sum_{i \geq 0, j < 0} a_{ij} b_{ji},$$

представляет собой центральный элемент, так что алгебра Ли $\widehat{gl}(\infty)$ есть центральное расширение алгебры обобщенных матриц Якоби.

3.3. Билинейное тождество. Пусть g – экспонента оператора в $\widehat{gl}(\infty)$:

$$g = \exp \left(\sum_{i,j \in \mathbb{Z}} a_{ij} : \psi_i \psi_j^* : \right),$$

т.е. является элементом соответствующей группы. Используя соотношение (3.4), можно вывести следующие соотношения:

$$g \psi_n = \sum_m \psi_m A_{mn} g, \quad \psi_n^* g = g \sum_m A_{nm} \psi_m^*, \quad (3.5)$$

где коэффициенты A_{nm} задаются числами a_{nm} . В свою очередь, из соотношений (3.5) следует, что [4]

$$\left[\sum_{n \in \mathbb{Z}} \psi_n \otimes \psi_n^*, g \otimes g \right] = 0. \quad (3.6)$$

Это последнее соотношение очень важно с точки зрения приложений к интегрируемым системам, и из него следуют билинейные тождества Хироты.

3.4. Параметры двойных потоков КП. Тау-функции КП и РТ. Введем следующие (гамильтоновы) операторы:

$$H_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \psi_k \psi_{k+n}^*, \quad n \neq 0, \quad H(\mathbf{t}) = \sum_{n=1}^{+\infty} t_n H_n, \quad H^*(\mathbf{t}^*) = \sum_{n=1}^{+\infty} t_n^* H_{-n}. \quad (3.7)$$

Здесь функции $H_n \in \widehat{gl}(\infty)$ и $H(\mathbf{t}), H^*(\mathbf{t}^*)$ также лежат в алгебре $\widehat{gl}(\infty)$, если считать число ненулевых параметров $\{t_m, t_m^*\}$ конечным. Операторы H_n удовлетворяют алгебре коммутационных соотношений Гейзенберга:

$$[H_n, H_m] = n\delta_{m+n,0}. \quad (3.8)$$

Заметим также, что

$$H_n|0\rangle = 0, \quad \langle 0|H_{-n} = 0, \quad n > 0. \quad (3.9)$$

В дальнейшем нам понадобятся также операторы свободного фермионного поля

$$\psi(z) := \sum_k \psi_k z^k, \quad \psi^*(z) := \sum_k \psi_k^* z^{-k-1} dz \quad (3.10)$$

(оператор ψ^* здесь записан как 1-форма).

Для каждого $n \in \mathbb{N}^+$ зададим вакуумные векторы “заряда n ”, пронумерованные целым числом n :

$$\begin{aligned} \langle n| &:= \langle 0|\Psi_n^*, \quad |n\rangle := \Psi_n|0\rangle, \\ \Psi_n &= \begin{cases} \psi_{n-1} \dots \psi_1 \psi_0, & n > 0, \\ \psi_n^* \dots \psi_{-2}^* \psi_{-1}^*, & n < 0, \end{cases} \\ \Psi_n^* &= \begin{cases} \psi_0^* \psi_1^* \dots \psi_{n-1}^*, & n > 0, \\ \psi_{-1} \psi_{-2} \dots \psi_n, & n < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Для любого g , удовлетворяющего билинейному тождеству (3.6), соответствующие тау-функции иерархий КП и двумеризованной РТ имеют вид [4]

$$\tau_{\text{КП}}(n, \mathbf{t}) := \langle n|e^{H(\mathbf{t})}g|n\rangle, \quad (3.11)$$

$$\tau_{\text{РТ}}(n, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*) := \langle n|e^{H(\mathbf{t})}ge^{H^*(\mathbf{t}^*)}|n\rangle. \quad (3.12)$$

Первый набор переменных, появляющихся в $\tau_{\text{КП}}(n, \mathbf{t})$, — это обычные высшие времена уравнения КП, в то время как параметры $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots)$ и $\mathbf{t}^* = (t_1^*, t_2^*, \dots)$ в $\tau_{\text{РТ}}(n, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*)$ иногда называют двойным набором высших тодовских времен [4], [5]. (Если зафиксировать n и параметры $\mathbf{t}^*$, то $\{\tau_{\text{РТ}}(n, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*)\}_{n \in \mathbb{N}}$ можно также рассматривать как тау-функции иерархии КП от $\mathbf{t}$ переменных.) Первые три параметра (t_1, t_2, t_3) суть независимые переменные, возникающие в собственно уравнении КП [6]:

$$4\partial_{t_1}\partial_{t_3}u = \partial_{t_1}^4u + 3\partial_{t_2}^2u + 3\partial_{t_1}^2u^2, \quad u = 2\partial_{t_1}^2 \ln \tau.$$

4. ТАУ-ФУНКЦИЯ КП $\tau_r(n, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*)$

4.1. Разложение по функциям Шура. При каждом выборе параметров $\mathbf{t}^* = (t_1^*, t_2^*, \dots)$ определим оператор

$$A(\mathbf{t}^*) := \sum_{m=1}^{\infty} t_m^* A_m, \quad (4.1)$$

где элементы A_k , имеющие вид

$$A_k = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \psi_{n-k}^* \psi_n r(n) r(n-1) \dots r(n-k+1), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (4.2)$$

взаимно коммутируют:

$$[A_k, A_j] = 0 \quad \forall j, k.$$

С помощью явного вида A_k и соотношений антикоммутации (3.1) получим

$$\begin{aligned} e^{A(\mathbf{t}^*)} \psi(z) e^{-A(\mathbf{t}^*)} &= e^{-\xi_r(\mathbf{t}^*, z^{-1})} \cdot \psi(z), \\ e^{A(\mathbf{t}^*)} \psi^*(z) e^{-A(\mathbf{t}^*)} &= e^{\xi_{r'}(\mathbf{t}^*, z^{-1})} \cdot \psi^*(z), \end{aligned} \quad (4.3)$$

где $\xi_r(\mathbf{t}^*, z^{-1})$ и $\xi_{r'}(\mathbf{t}^*, z^{-1})$ – операторы на функциях от вспомогательного параметра z , имеющие вид

$$\begin{aligned} \xi_r(\mathbf{t}^*, z^{-1}) &:= \sum_{m=1}^{+\infty} t_m \left(\frac{1}{z} r(D) \right)^m, \quad \xi_{r'}(\mathbf{t}^*, z^{-1}) := \sum_{m=1}^{+\infty} t_m \left(\frac{1}{z} r'(D) \right)^m, \\ D &:= z \frac{d}{dz}, \quad r'(D) := r(-D). \end{aligned}$$

Операторы $r(D)$, $r'(D)$ действуют на базисе функций на окружности в соответствии с правилом

$$r(D) \cdot z^n = r(n) z^n, \quad r'(D) \cdot z^n = r(-n) z^n.$$

Экспоненты в выражениях (4.3) задаются своими разложениями Тейлора.

Используя соотношения (4.3) и то, что под знаком res_z оператор $z^{-1}r(D)$ сопряжен оператору $z^{-1}r(-D) = z^{-1}r'(D)$, получим следующую лемму.

ЛЕММА 1. *Фермионный оператор $e^{A(\mathbf{t}^*)}$ удовлетворяет билинейному тождеству (3.6):*

$$[\text{res}_{z=0} \psi(z) \otimes \psi^*(z), e^{A(\mathbf{t}^*)} \otimes e^{A(\mathbf{t}^*)}] = 0. \quad (4.4)$$

Доказательство этой леммы следует из общего рассмотрения в работе [4].

С учетом формулы (4.4) выражение

$$\tau_r(n, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*) := \langle n | e^{H(\mathbf{t})} e^{-A(\mathbf{t}^*)} | n \rangle \quad (4.5)$$

задает при каждом выборе параметров n , r и $\mathbf{t}^*$ тау-функцию КП (3.11). При любом выборе r функция $\tau_r(n, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*)$, рассматриваемая как функция от всех переменных, называется тау-функцией двумеризованной РТ.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Справедливо равенство*

$$\tau_r(n, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*) = \sum_{\lambda} r_{\lambda}(n) s_{\lambda}(\mathbf{t}) s_{\lambda}(\mathbf{t}^*), \quad (4.6)$$

где операторнозначная экспоненциальная функция $e^{-A(\mathbf{t}^*)}$ в обкладках вакуумного ожидания задается своим рядом Тейлора, а правая часть соотношения рассматривается как формальный ряд (сумма в формуле (4.6) должна включать разбиение нуля).

Заметим, что тау-функция (4.6) может рассматриваться как функция, получаемая при действии дополнительных симметрий [7], [8] на вакуумную тау-функцию. Переменные $\mathbf{t}$ играют роль параметров потока КП, и $\mathbf{t}^*$ при этом является набором групповых параметров, задающих показатель экспоненты, выражающий действие подалгебры дополнительных симметрий иерархии КП (см. [8]). С другой стороны, выражение (4.6) может рассматриваться как тау-функция двумеризованной РТ [5], [9] с двумя наборами непрерывных переменных $\mathbf{t}$, $\mathbf{t}^*$ и одной дискретной переменной n . Формула (4.6), очевидно, симметрична относительно перестановки $\mathbf{t} \leftrightarrow \mathbf{t}^*$.

4.2. Обобщенное тождество Коши–Литтлвуда и доказательство предложения 1. Мы будем понимать под обобщенным тождеством Коши–Литтлвуда следующее соотношение, которое может пониматься как (двойная) производящая функция для функций Шура:

$$\exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} m t_m t_m^*\right) = \sum_{\lambda} s_{\lambda}(\mathbf{t}) s_{\lambda}(\mathbf{t}^*). \quad (4.7)$$

В случае, когда параметры $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots)$ и $\mathbf{t}^* = (t_1^*, t_2^*, \dots)$ задаются разложениями (1.6) в терминах двух конечных наборов переменных $(x_1, \dots, x_N)$ и $(y_1, \dots, y_M)$, это тождество сводится к тождеству Коши–Литтлвуда в обычной форме записи (1.5). Это можно доказать с использованием фермионного пространства Фока и формул скалярного произведения, которые обсуждаются ниже (в более ранних работах [3], [10] были представлены лишь наброски требуемых доказательств).

Для доказательства нам потребуется

ЛЕММА 2 [4]. *В случае, когда $-j_1 < \dots < -j_k < 0 \leq i_k < \dots < i_1$, имеет место следующая формула:*

$$\begin{aligned} \langle 0 | e^{H(\mathbf{t})} \psi_{-j_1}^* \dots \psi_{-j_k}^* \psi_{i_k} \dots \psi_{i_1} | 0 \rangle = \\ = \langle n | e^{H(\mathbf{t})} \psi_{-j_1+n}^* \dots \psi_{-j_k+n}^* \psi_{i_k+n} \dots \psi_{i_1+n} | n \rangle = (-1)^{j_1+\dots+j_k} s_{\lambda}(\mathbf{t}), \end{aligned} \quad (4.8)$$

где разбиение $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{j_1})$ задается условием

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_{j_1}) = (i_1, \dots, i_k \mid j_1 - 1, \dots, j_k - 1), \quad (4.9)$$

где $(\dots \mid \dots)$ – разбиение в обозначениях Фробениуса.

Доказательство этой леммы состоит в прямом вычислении с использованием правила Вика [4].

Введем теперь векторы (ср. с работой [11])

$$|\lambda, n\rangle := \psi_{-j_1+n}^* \cdots \psi_{-j_k+n}^* \psi_{i_k+n} \cdots \psi_{i_1+n} |n\rangle, \quad (4.10)$$

$$\langle \lambda, n| := \langle n| \psi_{i_1+n}^* \cdots \psi_{i_k+n}^* \psi_{-j_k+n} \cdots \psi_{-j_1+n}. \quad (4.11)$$

Получим

$$\langle \lambda, n | \mu, m \rangle = \delta_{mn} \delta_{\lambda\mu}, \quad (4.12)$$

так что наборы векторов (4.10) и (4.11) задают ортонормированные базисы в пространстве Фока F и дуальном к нему пространстве F^* , соответственно.

Для всякого разбиения λ , выраженного в фробениусовом виде (4.9), зададим целое число

$$a(\lambda) := j_1 + \cdots + j_k.$$

Тогда из леммы 2 и соотношений ортогональности (4.12) следуют разложения

$$\langle n| e^{H(\mathbf{t})} = \sum_{\lambda} (-1)^{a(\lambda)} s_{\lambda}(\mathbf{t}) \langle \lambda, n| \quad (4.13)$$

и

$$e^{H^*(\mathbf{t}^*)} |n\rangle = \sum_{\lambda} |\lambda, n\rangle (-1)^{a(\lambda)} s_{\lambda}(\mathbf{t}^*). \quad (4.14)$$

Доказательство обобщенного тождества Коши–Литтлвуда. Рассмотрим вакуумную тау-функцию РТ

$$\langle 0| e^{H(\mathbf{t})} e^{H^*(\mathbf{t}^*)} |0\rangle. \quad (4.15)$$

Из формул (4.13), (4.14) получаем, что она равна правой части соотношения (4.7):

$$\langle 0| e^{H(\mathbf{t})} e^{H^*(\mathbf{t}^*)} |0\rangle = \sum_{\lambda} s_{\lambda}(\mathbf{t}) s_{\lambda}(\mathbf{t}^*),$$

где в сумму опять входит разбиение нуля.

Из коммутационных соотношений алгебры Гейзенберга (3.8) следует, что сопряжение элемента e^{H-m} элементом e^{Hm} сводится к простому сдвигу показателя экспоненты на m . Это вместе с уравнениями (3.9) приводит к тому, что вакуумная тау-функция РТ (4.15) оказывается равной левой части уравнения (4.7):

$$\langle 0| e^{H(\mathbf{t})} e^{H^*(\mathbf{t}^*)} |0\rangle = \exp \left(\sum_{m=1}^{\infty} m t_m t_m^* \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1. Рассмотрим разложение в ряд Тейлора по всем переменным времен $t_1, t_2, \dots$, задаваемое формулой

$$e^{A(\mathbf{t}^*)}|n\rangle = \sum_{n_1, n_2, \dots=0}^{\infty} t_1^{n_1} t_2^{n_2} \dots A_1^{n_1} A_2^{n_2} \dots |n\rangle. \quad (4.16)$$

Поскольку все величины A_k взаимно коммутируют, порядок сомножителей в правой части несуществен. Каждая величина A_k имеет следующую структуру:

$$A_k = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e_{m, m-k},$$

где

$$e_{m, m-i} := \psi_m \psi_{m-i}^* r(m) r(m-1) \dots r(m-i+1).$$

Напомним, что

$$\psi_m |n\rangle = 0, \quad m < n, \quad \psi_m^* |n\rangle = 0, \quad m \geq n.$$

При заданном n удобно разложить $\widehat{gl}(\infty)$ (как линейное пространство, а не как алгебру Ли) в следующую прямую сумму:

$$a = a^{++} \oplus a^{--} \oplus a^{+-} \oplus a^{-+}, \quad a \in \widehat{gl}(\infty),$$

где

$$\begin{aligned} a^{++} &= \sum_{i, k \geq n} : \psi_i \psi_k^* : a_{ik}, & a^{--} &= \sum_{i, k < n} : \psi_i \psi_k^* : a_{ik}, \\ a^{+-} &= \sum_{i \geq n, k < n} : \psi_i \psi_k^* : a_{ik}, & a^{-+} &= \sum_{i < n, k \geq n} : \psi_i \psi_k^* : a_{ik}. \end{aligned}$$

Далее получим

$$[e_{i,j}^{+-}, e_{k,m}^{+-}] = 0, \quad [A_i^{+-}, A_k^{+-}] = 0, \quad (4.17)$$

в то время как

$$[e_{i,m}^{++}, e_{m,k}^{+-}] = e_{i,k}^{+-}, \quad [e_{i,m}^{+-}, e_{m,k}^{--}] = e_{i,k}^{+-}. \quad (4.18)$$

Каждый член в сумме в правой части (4.16) представляет собой линейную комбинацию мономов вида

$$e_{i_1, k_1} \dots e_{i_N, k_N} |n\rangle \quad (4.19)$$

при некотором N . Произведение содержит члены $e_{i,k}^{++}$, $e_{i,k}^{+-}$, $e_{i,k}^{--}$ (с различными нижними индексами i, k), из которых два последних члена уничтожают вакуумный вектор $|n\rangle$. С помощью коммутационных соотношений (4.18) можно пронести все элементы

$e_{i,k}^{++}, e_{i,k}^{--}$ направо в формуле (4.19), после чего это выражение превратится в произведение, содержащее только члены $e_{i,k}^{+-}$:

$$e_{i_1,k_1}^{+-} \dots e_{i_M,k_M}^{+-} |n\rangle, \quad M \leq N.$$

Рассмотрим теперь выражение (при $i > 0$)

$$H_{-i} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} E_{m,m-i},$$

где

$$E_{m,m-i} := \psi_m \psi_{m-i}^*,$$

в терминах которого можно записать

$$\begin{aligned} e_{m,m-i} &:= E_{m,m-i} r(m) r(m-1) \dots r(m-i+1), \\ e_{i_1,k_1}^{+-} \dots e_{i_M,k_M}^{+-} |n\rangle &= r_\lambda(n) E_{i_1,k_1}^{+-} \dots E_{i_M,k_M}^{+-} |n\rangle. \end{aligned}$$

Заметим, что в выражении $E_{i_1,k_1}^{+-} \dots E_{i_M,k_M}^{+-} |n\rangle$ выполняется $E_{i,k}^{+-} E_{j,m}^{+-} = E_{i,m}^{+-} E_{j,k}^{+-}$, а потому с помощью действия группы перестановок и перестановочных соотношений (4.17) можно переставить все первые индексы в убывающем порядке, т.е. $i_1 \geq i_2 \geq \dots$, а для вторых индексов добиться того, чтобы было выполнено $-k_1 \geq -k_2 \geq \dots$. Тогда получим

$$e_{i_1,k_1}^{+-} \dots e_{i_M,k_M}^{+-} |n\rangle = r_\lambda(n) E_{i_1,k_1}^{+-} \dots E_{i_M,k_M}^{+-} |n\rangle = r_\lambda(n) |\lambda, n\rangle (-1)^M, \quad (4.20)$$

где разбиение λ имеет следующий вид в обозначениях Фробениуса:

$$\lambda = (i_1, \dots, i_M \mid -k_1 - 1, \dots, -k_M - 1).$$

Поскольку из (4.14) следует, что

$$e^{H^*(\mathbf{t}^*)} |n\rangle = \sum_{\lambda} |\lambda, n\rangle (-1)^{a(\lambda)} s_\lambda(\mathbf{t}^*),$$

то окончательно получим

$$e^{A(\mathbf{t}^*)} |n\rangle = \sum_{\lambda} |\lambda, n\rangle (-1)^{a(\lambda)} r_\lambda(n) s_\lambda(\mathbf{t}^*), \quad (4.21)$$

что и доказывает представление (4.6). Отсюда также вытекает следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 [10]. *Справедливо равенство*

$$\langle s_\lambda, s_\mu \rangle_{r,n} = \langle n | s_\lambda(\mathbf{H}) s_\mu(-\mathbf{A}) | n \rangle, \quad (4.22)$$

где переменные $(\gamma_1, \gamma_2, \dots)$ в аргументе функций Шура (см. (1.2)) заменяются на операторы

$$\mathbf{H} := \left(\frac{H_1}{1}, \frac{H_2}{2}, \frac{H_3}{3}, \dots \right), \quad -\mathbf{A} := \left(-\frac{A_1}{1}, -\frac{A_2}{2}, -\frac{A_3}{3}, \dots \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из обобщенного тождества Коши–Литтлвуда следует, что

$$\langle n | e^{H(\mathbf{t})} = \sum_\lambda s_\lambda(\mathbf{t}) \langle n | s_\lambda(\mathbf{H}), \quad e^{A(\mathbf{t}^*)} | n \rangle = \sum_\mu s_\mu(-\mathbf{A}) | n \rangle s_\mu(\mathbf{t}^*). \quad (4.23)$$

Из выражений (4.21), (4.13) и (4.12) следует, что формула (4.23) эквивалентна представлению (4.24) из нижеследующего предложения, с помощью которого можно выразить тау-функцию $\tau_r(n, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*)$ в терминах скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle_{r,n}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3 [10]. *Справедливо равенство*

$$\tau_r(n, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*) = \left\langle \exp \left(\sum_{m=1}^{\infty} m t_m \gamma_m \right), \exp \left(\sum_{m=1}^{\infty} m t_m^* \gamma_m \right) \right\rangle_{r,n}, \quad (4.24)$$

где рассматривается скалярное произведение на пространстве функций от переменных γ , в то время как величины $\mathbf{t}$, $\mathbf{t}^*$ рассматриваются как параметры.

5. МАТРИЧНЫЕ МОДЕЛИ

5.1. Модели нормальных матриц. Рассмотрим ансамбль нормальных матриц M размера $n \times n$ (т.е. матриц, коммутирующих со своими эрмитово сопряженными). Статистическая сумма модели нормальных матриц задается интегралом [12]

$$\begin{aligned} I^{NM}(n, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*; \mathbf{u}) &= \\ &= C_n \int_{\mathbb{C}} \cdots \int_{\mathbb{C}} |\Delta(\mathbf{z})|^2 \exp \left(\sum_{i=1}^n (V_1(z_i) + V_2(\bar{z}_i) - z_i \bar{z}_i) \right) \prod_{i=1}^n dz_i d\bar{z}_i. \end{aligned} \quad (5.1)$$

(Эта модель имеет приложения, например в задаче с лапласовым ростом [13], описывающей динамику границы нефтяной пленки на поверхности воды.) Последний интеграл в формуле (5.1) берется по n копиям комплексной плоскости, $(z_1, \dots, z_n)$ – собственные значения матрицы M , а C_n – нормировочный множитель, возникающий при интегрировании по угловым матричным переменным, V_1 и V_2 – два ряда следующего вида:

$$V_1(z) := \sum_{m=1}^{\infty} t_m z^m, \quad V_2(z) := \sum_{m=1}^{\infty} t_m^* z^m.$$

Формула (2.8) при этом задает разложение в ряд для интеграла (5.1):

$$\begin{aligned} I^{NM}(n, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*; \mathbf{u}) &= \left\langle \exp\left(\sum_{i=1}^n \sum_{m=1}^{\infty} t_m z_i^m\right), \exp\left(\sum_{i=1}^n \sum_{m=1}^{\infty} t_m^* z_i^m\right) \right\rangle'_n = \\ &= \sum_{\lambda} (n)_{\lambda} s_{\lambda}(\mathbf{t}) s_{\lambda}(\mathbf{t}^*). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Эту формулу можно интерпретировать [14], [15] как многомерный аналог суммирования по Борелю для ряда в правой части, который, вообще говоря, расходится.

5.2. Двухматричная модель. Вычислим теперь следующую статистическую сумму, заданную на ансамбле из пар (M_1, M_2) , где M_1 — эрмитова матрица размера $n \times n$, а M_2 — антиэрмитова матрица размера $n \times n$:

$$I^{2MM}(n, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*) = \int e^{\text{tr}(V_1(M_1) + V_2(M_2) - M_1 M_2)} dM_1 dM_2. \quad (5.3)$$

Хорошо известно [16], [17], что этот интеграл сводится к следующему интегралу по собственным значениям x_i и y_i соответствующих матриц M_1 и M_2 :

$$\tilde{C}_n \int_{\text{Re}} \int_{\text{Im}} \cdots \int_{\text{Re}} \int_{\text{Im}} \exp\left(\sum_{j=1}^n \left(\sum_{m=1}^{\infty} (t_m x_j^m + t_m^* y_j^m) - x_j y_j\right)\right) \Delta(\mathbf{x}) \Delta(\mathbf{y}) \prod_{j=1}^n dx_j dy_j, \quad (5.4)$$

где нормировочный множитель $\tilde{C}_n$ пропорционален объему унитарной группы. В работе [18] было показано, что этот интеграл задает гау-функцию двумеризованной РТ.

Из представления (2.10) следует, что статистическая сумма в такой модели случайных матриц представляется рядом гипергеометрического типа:

$$\begin{aligned} I^{2MM}(n, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*) &= \frac{\tilde{C}_n}{(2\pi i)^n} \left\langle \exp\left(\sum_{i=1}^n \sum_{m=1}^{\infty} t_m z_i^m\right), \exp\left(\sum_{i=1}^n \sum_{m=1}^{\infty} t_m^* z_i^m\right) \right\rangle'_n = \\ &= \frac{\tilde{C}_n}{(2\pi i)^n} \sum_{\lambda} (n)_{\lambda} s_{\lambda}(\mathbf{t}) s_{\lambda}(\mathbf{t}^*), \end{aligned} \quad (5.5)$$

где было использовано то, что в соответствии с (2.1)

$$(n)_{\lambda} = \prod_{i,j \in \lambda} (n + j - i) = \frac{\Gamma(n+1+\lambda_1) \Gamma(n+\lambda_2) \cdots \Gamma(\lambda_n)}{\Gamma(n+1) \Gamma(n) \cdots \Gamma(1)}.$$

Таким образом, получается следующий ряд теории возмущений:

$$\frac{I^{2MM}(n, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*)}{I^{2MM}(n, 0, 0)} = \sum_{\lambda} (n)_{\lambda} s_{\lambda}(\mathbf{t}) s_{\lambda}(\mathbf{t}^*).$$

В случае, когда все старшие параметры t_j, t_j^* с $j > 2$ обращаются в нуль (т.е. имеет место случай гауссова матричного интеграла) и $n = 1$, этот ряд может быть легко вычислен и приведен к виду (см., например, [15])

$$\begin{aligned} I^{2MM}(1, t_1, t_2, 0, 0, \dots; t_1^*, t_2^*, 0, 0, \dots) &= \sum_{m=0}^{\infty} m! h_m(\mathbf{t}) h_m(\mathbf{t}^*) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-4t_2 t_2^*}} \exp\left(\frac{t_1 t_1^* + t_2 (t_1^*)^2 + t_2^* (t_1)^2}{1-4t_2 t_2^*}\right). \end{aligned} \quad (5.6)$$

5.3. Эрмитова одноматричная модель. Как было показано в работе [18], статистическая сумма эрмитовой одноматричной модели представляет собой тау-функцию одномерной РТ, удовлетворяющую так называемым условиям Вирасоро. Рассмотрим здесь ряд теории возмущений для этой модели в разложении по функциям Шура. Пусть теперь M – эрмитова матрица размера $N \times N$. Статистическая сумма эрмитовой одноматричной модели с четным потенциалом четвертого порядка имеет вид

$$Z(N, g, g_4) = \int \exp \left(-N \operatorname{tr} \left(\frac{g}{2} M^2 + g_4 M^4 \right) \right) dM, \quad (5.7)$$

где

$$dM = \prod_{i < k} d \operatorname{Re} M_{ik} d \operatorname{Im} M_{ik} \prod_{i=1}^n dM_{ii}.$$

Выберем нормировку матричного интеграла таким образом, чтобы $Z(N, g, g_4)$ было равно единице при $g_4 = 0$. Вычислим низшие члены ряда теории возмущений для одноматричной модели, используя ряды (5.6) [15]. Сначала рассмотрим статистическую сумму (5.3) двухматричной модели и положим все $t_k = 0$, кроме t_4 , и все $t_k^* = 0$, кроме t_2^* . Тогда (ср. [19], [20]) известно, что если положить

$$g_4 = -4N^{-1}t_4, \quad g = -(2Nt_2^*)^{-1},$$

получим

$$I^{2M} (0, 0, 0, t_4, 0, \dots; 0, t_2^*, 0, 0, \dots) = Z(N, g, g_4),$$

а потому

$$\sum_{\lambda} (N)_{\lambda} s_{\lambda}(\mathbf{t}) s_{\lambda}(\mathbf{t}^*) = \int \exp \left(-N \operatorname{tr} \left(\frac{g}{2} M^2 + g_4 M^4 \right) \right) dM = Z(N, g, g_4). \quad (5.8)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Хорошо известно (см., например, [20]), что в соответствии с правилами Фейнмана для одноматричной модели: а) с каждым пропагатором (двойной линией) связан множитель $1/(Ng)$ (равный $-2t_2^*$ в наших обозначениях); б) с каждой четырехточечной вершиной связан множитель $(-Ng_4)$ (равный $4t_4$ в наших обозначениях); в) с каждой замкнутой сплошной линией связан множитель N . Поэтому можно считать, что в формуле (5.8) множитель $(N)_{\lambda}$ отвечает замкнутым линиям, множители $s_{\lambda}(\mathbf{t})$, $\mathbf{t} = (0, t_2, 0, 0, \dots)$, – пропагаторам, а множители $s_{\lambda}(\mathbf{t}^*)$ – вершинам. Фейнмановские диаграммы, содержащие $k = |\lambda|/4$ вершин и $2k = |\lambda|/2$ пропагаторов, дают следующий вклад:

$$(Ng_4)^{|\lambda|/4} (Ng)^{-|\lambda|/2} \sum_{|\lambda|=4k} (N)_{\lambda} s_{\lambda}(0, 0, 0, 1, 0, \dots) s_{\lambda}(0, 1, 0, \dots),$$

где число $|\lambda|$ равно весу разбиения λ .

Явное вычисление первых трех не исчезающих членов (отвечающих разбиениям весов 0, 4 и 8) дает тот же ответ, что и вычисление в технике фейнмановских графов (ср. с работой [20]):

$$Z(N, g, g_4) = 1 - \frac{g_4}{g^2} \left(\frac{N^2}{2} + \frac{1}{4} \right) + \frac{g_4^2}{g^4} (32N^4 + 320N^2 + 488) + O \left(\frac{g_4^3}{g^6} \right).$$

6. ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ $\ln \tau_r(n, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*)$

Напомним, что произведение двух функций Шура можно представить в виде суммы [1]:

$$s_\lambda(\mathbf{t})s_\mu(\mathbf{t}) = \sum_{\nu} C_{\lambda\mu}^{\nu} s_{\nu}(\mathbf{t}),$$

где коэффициенты $C_{\lambda\mu}^{\nu}$ могут быть вычислены по комбинаторным правилам Литтлвуда-Ричардсона [1], а вес $|\nu|$ разбиений в сумме равен сумме весов:

$$|\nu| = |\lambda| + |\mu|. \quad (6.1)$$

Записывая (4.6) как $\tau_r(n, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*) = 1 + \varepsilon$, $\varepsilon = \sum_{\lambda \neq 0} r_\lambda(n) s_\lambda(\mathbf{t}) s_\lambda(\mathbf{t}^*)$ и вычисляя логарифм этого выражения, получим

$$\ln \tau_r(n, \mathbf{t}, \mathbf{t}^*) = \sum_{\lambda, \lambda' \neq 0} s_\lambda(\mathbf{t}) k_{\lambda\lambda'}(n) s_{\lambda'}(\mathbf{t}^*),$$

где величины $k_{\lambda\lambda'}$ задаются следующими рядами:

$$\begin{aligned} k_{\lambda\lambda'}(n) &= \frac{1}{1} r_\lambda(n) \delta_{\lambda\lambda'} + \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_k \neq 0} r_{\lambda_1}(n) \dots r_{\lambda_k}(n) \times \\ &\quad \times \sum_{\nu_1, \dots, \nu_{k-2}} C_{\nu_1, \dots, \nu_{k-2}}^{\lambda} \sum_{\nu'_1, \dots, \nu'_{k-2}} C_{\nu'_1, \dots, \nu'_{k-2}}^{\lambda'}, \\ C_{\nu_1, \dots, \nu_{k-2}}^{\lambda} &:= C_{\lambda_1 \lambda_2}^{\nu_1} C_{\nu_1 \lambda_3}^{\nu_2} \dots C_{\nu_{k-3} \lambda_{k-1}}^{\nu_{k-2}} C_{\nu_{k-2} \lambda_k}^{\lambda}, \\ C_{\nu'_1, \dots, \nu'_{k-2}}^{\lambda'} &:= C_{\lambda_1 \lambda_2}^{\nu'_1} C_{\nu'_1 \lambda_3}^{\nu'_2} \dots C_{\nu'_{k-3} \lambda_{k-1}}^{\nu'_{k-2}} C_{\nu'_{k-2} \lambda_k}^{\lambda'}. \end{aligned}$$

Первые несколько членов имеют вид

$$\begin{aligned} k_{\lambda\lambda'}(n) &= \frac{1}{1} r_\lambda(n) \delta_{\lambda\lambda'} + \frac{1}{2} \sum_{\lambda_1, \lambda_2 \neq 0} r_{\lambda_1}(n) r_{\lambda_2}(n) C_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda} C_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda'} + \\ &\quad + \frac{1}{3} \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0} r_{\lambda_1}(n) r_{\lambda_2}(n) r_{\lambda_3}(n) \sum_{\nu} C_{\lambda_1 \lambda_2}^{\nu} C_{\nu \lambda_3}^{\lambda} \sum_{\nu'} C_{\lambda_1 \lambda_2}^{\nu'} C_{\nu' \lambda_3}^{\lambda'} + \dots \end{aligned}$$

Заметим, что согласно формуле (6.1) каждый член $k_{\lambda\lambda'}(n)$ представляется суммой конечного числа слагаемых. Данный результат было бы интересно сравнить с работой [21].

Благодарности. Работа частично поддержана Научным советом Канады по естественным и инженерным наукам (NSERC) и фондом FCAR du Québec, проектом LDRD № 20020006ER “Нестабильные межжидкостные взаимодействия” при Лос-Аламосской национальной лаборатории и грантом РФФИ № 02-02-17382а.

Список литературы

- [1] *I. G. Macdonald*. Symmetric Functions and Hall Polynomials. Oxford: Clarendon Press, 1995.
- [2] *M. Feigin, A. P. Veselov*. Internat. Math. Res. Notices. 2002. V. 10. P. 521–545.
- [3] *А. Ю. Орлов, Д. М. Щербин*. ТМФ. 2001. Т. 128. № 1. С. 84–108.
- [4] *E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara, T. Miwa*. Transformation groups for soliton equations. In: Nonlinear Integrable Systems – Classical Theory and Quantum Theory. Proc RIMS, Kyoto, 1981. Eds. M. Jimbo, T. Miwa. Singapore: World Scientific, 1983. P. 39–120.
- [5] *K. Ueno, K. Takasaki*. Adv. Stud. Pure Math. 1984. V. 4. P. 1–95.
- [6] *В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский*. Теория солитонов: Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.
- [7] *L. A. Dickey*. Soliton Equations and Hamiltonian Systems. Adv. Ser. Math. Phys. V. 12. Singapore–New Jersey–London: World Scientific, 1991.
- [8] *П. Вунтерниц, А. Ю. Орлов*. ТМФ. 1997. Т. 113. № 2. С. 231–260.
- [9] *K. Takasaki*. Commun. Math. Phys. 1996. V. 181. P. 131–156.
- [10] *A. Yu. Orlov*. Soliton theory, symmetric functions and matrix integrals. nlin.SI/0207030.
- [11] *T. Takebe*. Lett. Math. Phys. 1991. V. 21. P. 77–84.
- [12] *L.-L. Chau, O. Zaboronsky*. Commun. Math. Phys. 1998. V. 196. P. 203–247; hep-th/9711091.
- [13] *M. Mineev-Weinstein, P. Wiegmann, A. Zabrodin*. Phys. Rev. Lett. 2000. V. 84. P. 5106–5109.
- [14] *J. Harnad, A. Yu. Orlov*. Matrix integrals as Borel sums of Schur function expansions. Preprint CRM-2865. Montréal: CRM, 2002; nlin.SI/0209035; In: Symmetry and Perturbation Theory SPT2002. Eds. S. Abenda, G. Gaeta, S. Walcher. Singapore: World Scientific, 2003.
- [15] *J. Harnad, A. Yu. Orlov*. Schur function expansions of matrix integrals. Preprint CRM. Montréal: CRM, 2002.
- [16] *M. L. Mehta*. Random Matrices. San Diego: Academic Press, 1991.
- [17] *C. Itzykson, J. B. Zuber*. J. Math. Phys. 1980. V. 21. P. 411–421.
- [18] *A. Gerasimov, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, A. Orlov*. Nucl. Phys. B. 1991. V. 357. P. 565–618.
- [19] *M. Bertola, B. Eynard, J. Harnad*. J. Phys. A. 2003. V. 36. P. 3067–3084; nlin.SI/0204054.
- [20] *B. Eynard*. Random matrices. Preprint Saclay-T01/014, CRM-2708. Paris: Cours de Physique Theorique de Saclay, 2001.
- [21] *Yu. Klimov, A. Korzh, S. Natanson*. From 2D Toda hierarchy to conformal map for domains of Riemann sphere. math.NA/0212361.