Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Гурьева, А. В. Жибер, Инварианты Лапласа двумеризованных открытых цепочек Тоды, *ТМФ*, 2004, том 138, номер 3, 401–421

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf28>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 15:37:19

© 2004 г.

А. М. Гурьева*, А. В. Жибер†

ИНВАРИАНТЫ ЛАПЛАСА ДВУМЕРИЗОВАННЫХ ОТКРЫТЫХ ЦЕПОЧЕК ТОДЫ

Показано, что цепочки Тоды с матрицами Картана A_n , B_n , C_n и D_n являются системами лиувиллевского типа. Для этих систем уравнений получены явные формулы для инвариантов и обобщенных инвариантов Лапласа. Показано, как с их помощью строить законы сохранения (x - и y -интегралы) и высшие симметрии.

Ключевые слова: симметрии, интегралы, инварианты Лапласа, обобщенные инварианты.

1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из наиболее знаменитых примеров явно интегрируемого уравнения в частных производных является уравнение Лиувилля

$$u_{xy} = e^u. \quad (1)$$

Исследование свойств этого уравнения привело (см. [1]–[4]) к различным, вообще говоря не эквивалентным, определениям класса точно интегрируемых гиперболических уравнений лиувиллевского типа. В частности, в работах [5]–[7] в основу определения было положено свойство конечности цепочки инвариантов Лапласа линеаризованного уравнения. Определение оказалось удачным, поскольку позволило использовать несколько классических тождеств (см. [8]), связанных с инвариантами Лапласа. В результате были найдены общие формулы, позволяющие для таких уравнений описать в терминах инвариантов Лапласа высшие симметрии [5] и законы сохранения [6].

Свойство конечности цепочки инвариантов Лапласа может быть положено в основу классификации уравнений лиувиллевского типа. Недавно в работе [9] была приведена полная классификация всех таких скалярных уравнений вида

$$u_{xy} = F(x, y, u, u_x, u_y) \quad (2)$$

и предложена единая процедура нахождения общего решения.

*Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа, Россия

†Институт математики УНЦ РАН с ВЦ, Уфа, Россия. E-mail: zhiber@imat.rb.ru

Существование тесной связи между некоторыми важными свойствами нелинейных уравнений, такими как точная интегрируемость, наличие высших симметрий, законов сохранения и дифференциальных подстановок, и свойствами цепочки инвариантов нелинейного уравнения, обнаруженной в ряде работ (см. [5], [7], [9]–[14]), вызвало интерес к преобразованиям и инвариантам Лапласа.

Следующим естественным шагом в подобных исследованиях представляется обобщение этих результатов на системы уравнений. В статье [9] определение уравнений Лиувиллевого типа обобщено на случай нелинейных гиперболических систем вида (2) $\{u_{xy}^i = F^i(x, y, u, u_x, u_y)\}$ (будем в дальнейшем u и F считать n -мерными векторами).

Далее для полноты изложения мы приводим основные результаты работы [9], касающиеся систем дифференциальных уравнений. В случае систем дифференциальных уравнений имеется серьезная проблема, связанная с определением инвариантов Лапласа. Линеаризованная система уравнений для системы (2) имеет вид

$$(\mathcal{D}\overline{\mathcal{D}} + a\mathcal{D} + b\overline{\mathcal{D}} + c)v = 0, \quad (3)$$

где $\mathcal{D}$ и $\overline{\mathcal{D}}$ – операторы полного дифференцирования по x и y , соответственно, а a , b и c – матрицы

$$a = -\left(\frac{\partial F^i}{\partial u_x^j}\right), \quad b = -\left(\frac{\partial F^i}{\partial u_y^j}\right), \quad c = -\left(\frac{\partial F^i}{\partial u^j}\right).$$

Прямолинейное обобщение понятия инвариантов на матричный случай состоит в следующем. Главные инварианты Лапласа определяются формулами

$$H_1 = \mathcal{D}(a) + ba - c, \quad K_1 = \overline{\mathcal{D}}(b) + ab - c, \quad (4)$$

а матрицы H_i при $i > 1$ находятся последовательно из системы уравнений

$$\overline{\mathcal{D}}(H_i) + a_i H_i - H_i a_{i-1} = 0, \quad (5)$$

$$H_{i+1} = \mathcal{D}(a_i) + [b, a_i] - \overline{\mathcal{D}}(b) + H_i, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (6)$$

где $a_0 = a$. Если H_i при $i \leq m$ и a_i при $i \leq m-1$ уже известны, то из уравнения (5) определяется a_m , а затем из уравнения (6) – H_{m+1} . Однако если $\det H_m = 0$, то a_m либо вообще не существует, либо определяется с точностью до ядра матрицы H_m . При этом выбор элемента из ядра существенно влияет на факт существования и явные формулы для следующих инвариантов.

Аналогично определяются элементы K_i :

$$\mathcal{D}(K_i) + b_i K_i - K_i b_{i-1} = 0, \quad (7)$$

$$K_{i+1} = \overline{\mathcal{D}}(b_i) + [a, b_i] - \mathcal{D}(a) + K_i, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (8)$$

здесь $b_0 = b$. Таким образом, мы сталкиваемся с проблемой корректного определения цепочки инвариантов.

Отметим, что именно системы уравнений (2), для которых матрицы H_i и K_i вырожденные, и представляют интерес.

Определим элементы H_i и K_i несколько иначе: пусть матрицы $H_1, H_2, \dots, H_m$ известны и уравнение

$$\overline{\mathcal{D}}(X_m) + a_m X_m - X_m a = 0, \quad X_m = H_m H_{m-1} \dots H_1, \quad (9)$$

имеет решение a_m , тогда положим

$$H_{m+1} = \mathcal{D}(a_m) + [b, a_m] - \overline{\mathcal{D}}(b) + H_m, \quad m = 1, 2, \dots \quad (10)$$

Аналогично если уже найдены элементы $K_1, K_2, \dots, K_m$ и существует решение b_m уравнения

$$\mathcal{D}(Y_m) + b_m Y_m - Y_m b = 0, \quad Y_m = K_m K_{m-1} \dots K_1, \quad (11)$$

то K_{m+1} определим по формуле

$$K_{m+1} = \overline{\mathcal{D}}(b_m) + [a, b_m] - \mathcal{D}(a) + K_m, \quad m = 1, 2, \dots \quad (12)$$

Ясно, что формулы (4), (9)–(12) определяют последовательности матриц H_i и K_i , $i = 1, 2, \dots$, при условии разрешимости уравнений (9) и (11).

Заметим, что если выполнены соотношения (5) при $i = 1, 2, \dots, k$, то справедливы равенства (9) для $m = 1, 2, \dots, k$. Обратное утверждение в общей ситуации неверно.

Матрицы H_i и K_i , определенные формулами (4), (9)–(12), по аналогии со скалярным случаем будем называть инвариантами Лапласа, а X_i и Y_i , $i = 1, 2, \dots$, – обобщенными инвариантами линейаризованной системы уравнений (3).

Условия существования решений a_m и b_m систем уравнений (9) и (11) приводятся в следующей лемме.

ЛЕММА. Система уравнений (9) имеет решение тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$(\overline{\mathcal{D}} + a)(\text{Ker } X_m) \subset \text{Ker } X_m, \quad (13)$$

а система (11) – при выполнении условия

$$(\mathcal{D} + b)(\text{Ker } Y_m) \subset \text{Ker } Y_m. \quad (14)$$

Так как матрицы a_i и b_i определяются неоднозначно, то инварианты H_m и K_m зависят от выбора матриц $a_1, a_2, \dots, a_{m-1}$ и $b_1, b_2, \dots, b_{m-1}$, и поэтому в общем случае обобщенные инварианты Лапласа X_m и Y_m определяются этим выбором. Таким образом, возникает вопрос: при каких условиях последовательности $\{X_i\}$ и $\{Y_i\}$ определены корректно? Решение этой задачи дается в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 1. Пусть справедливы условия

$$\begin{aligned} (\mathcal{D} - b^T)(\text{Coker } X_i) &\subset \text{Coker } X_i, & i = 1, 2, \dots, m, \\ \text{Coker } X_1 &\subset \text{Coker } X_2 \subset \dots \subset \text{Coker } X_m. \end{aligned} \quad (15)$$

Тогда обобщенный инвариант X_{m+1} не зависит от выбора матриц $a_1, a_2, \dots, a_m$.
Если

$$\begin{aligned} (\overline{\mathcal{D}} - a^T)(\text{Coker } Y_i) &\subset \text{Coker } Y_i, & i = 1, 2, \dots, m, \\ \text{Coker } Y_1 &\subset \text{Coker } Y_2 \subset \dots \subset \text{Coker } Y_m, \end{aligned} \quad (16)$$

то обобщенный инвариант Y_{m+1} не зависит от выбора матриц $b_1, b_2, \dots, b_m$.

Таким образом, именно последовательности $\{X_i\}$ и $\{Y_i\}$ (а не $\{H_i\}$ и $\{K_i\}$) корректно определены и их обрыв был положен в основу определения систем (2) лиувиллевого типа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем систему уравнений (2) *системой лиувиллевого типа*, если выполнены условия (13)–(16) и существуют $r \geq 1$ и $s \geq 1$ такие, что $X_r = Y_s = 0$.

В частности, в работе [9] было показано, что все цепочки Тоды, соответствующие простым алгебрам Ли ранга 2 и 3, являются системами лиувиллевого типа.

Отметим, что условия (13)–(16) были использованы в работе [15] для классификации линейных систем уравнений типа уравнений Эйлера–Пуассона.

Исследование систем уравнений лиувиллевого типа, например построение высших симметрий и законов сохранения, приводит к рассмотрению сопряженной по отношению к линеаризации (3) системы уравнений

$$(\mathcal{D}\overline{\mathcal{D}} + A\mathcal{D} + B\overline{\mathcal{D}} + C)v = 0, \quad (17)$$

где $A = -a^T$, $B = -b^T$, $C = c^T - \mathcal{D}(a^T) - \overline{\mathcal{D}}(b^T)$. Инварианты Лапласа системы (17) обозначим через h_i и k_i , $i = 1, 2, \dots$, а обобщенные инварианты символами x_m и y_m так, что

$$x_m = h_m h_{m-1} \dots h_1, \quad y_m = k_m k_{m-1} \dots k_1.$$

Следовательно, формулы (9)–(12) для сопряженной системы (17) запишутся в виде

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{D}}(x_m) + A_m x_m - x_m A &= 0, \\ h_{m+1} &= \mathcal{D}(A_m) + [B, A_m] - \overline{\mathcal{D}}(B) + h_m, & m = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (18)$$

и

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(y_m) + B_m y_m - y_m B &= 0, \\ k_{m+1} &= \overline{\mathcal{D}}(B_m) + [A, B_m] - \mathcal{D}(A) + k_m, & m = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (19)$$

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 2. *Обобщенные инварианты Лапласа X_m и Y_m системы уравнений (3) связаны с инвариантами x_m и y_m сопряженной системы (17) следующими формулами:*

$$x_m = Y_m^T, \quad y_m = X_m^T. \quad (20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как главный инвариант h_1 системы (17) согласно (4) имеет вид

$$h_1 = \mathcal{D}(A) + BA - C = (\mathcal{D}(b) + ab - c)^T = K_1^T,$$

то $x_1 = Y_1^T$. Предположим, что первая формула (20) справедлива для $m > 1$. Покажем, что она верна при $m + 1$. Для этого умножим второе соотношение (18) справа на обобщенный инвариант x_m и, воспользовавшись индуктивным предположением, получим

$$x_{m+1} = \{\mathcal{D}(A_m) - [b^T, A_m] + \overline{\mathcal{D}}(b^T) + h_m\} Y_m^T. \quad (21)$$

Далее рассмотрим соотношение (11) и первое равенство (18). Перепишем их следующим образом:

$$b^T Y_m^T = \mathcal{D}(Y_m^T) + Y_m^T b_m^T, \quad (22)$$

$$A_m Y_m^T = -\overline{\mathcal{D}}(Y_m^T) - Y_m^T a^T. \quad (23)$$

Применяя к обеим частям равенств (22) и (23) соответственно операторы дифференцирования $\overline{\mathcal{D}}$ и $\mathcal{D}$ и складывая полученные соотношения, будем иметь

$$[\mathcal{D}(A_m) + \overline{\mathcal{D}}(b^T)] Y_m^T = \overline{\mathcal{D}}(Y_m^T b_m^T) - \mathcal{D}(Y_m^T a^T) - A_m \mathcal{D}(Y_m^T) - b^T \overline{\mathcal{D}}(Y_m^T).$$

Учитывая последнее равенство и соотношения (22), (23), запишем формулу (21) в виде

$$x_{m+1} = Y_m^T \{\mathcal{D}(b_m^T) + [b_m^T, a^T] - \mathcal{D}(a^T)\} + h_m Y_m^T. \quad (24)$$

Так как в силу индуктивного предположения имеем

$$h_m Y_m^T = h_m Y_{m-1}^T K_m^T = h_m x_{m-1} K_m^T = x_m K_m^T = Y_m^T K_m^T,$$

то (24) примет вид

$$x_{m+1} = Y_m^T \{\mathcal{D}(b_m) + [a, b_m] - \mathcal{D}(a) + K_m\}^T,$$

или с учетом формулы (12) получим

$$x_{m+1} = Y_m^T K_{m+1}^T = Y_{m+1}^T.$$

Следовательно, согласно принципу математической индукции получаем справедливость первой формулы (20) для любого m .

Аналогично, используя соотношения (4), (9), (10), (17) и (19), приходим к равенству $y_m = X_m^T$, $m = 1, 2, \dots$. Теорема доказана.

Непосредственным обобщением уравнения Лиувилля (1) на случай систем (2) являются оборванные цепочки Тоды [16], [17], связанные с матрицами Картана простых алгебр Ли. Одна из эквивалентных форм записи этих систем имеет вид

$$u_{xy}^i = \sum_{j=1}^n a_{ij} e^{u^j}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (25)$$

Хорошо известно, что эти системы обладают x - и y -интегралами (см., например, [17], [18]). Отметим также, что в работе [17] доказано, что система уравнений (25) имеет полный набор x - и y -интегралов тогда и только тогда, когда матрица $A = (a_{ij})$ эквивалентна одной из матриц Картана простой алгебры Ли.

В настоящей работе показано, что цепочки Тоды (25) с матрицами Картана A_n , B_n , C_n и D_n являются системами лиувиллевого типа в смысле определения, введенного выше. Для этих систем уравнений получены явные формулы для инвариантов и обобщенных инвариантов Лапласа. Показано, как с их помощью строить законы сохранения (x - и y -интегралы) и высшие симметрии.

В. В. Соколовым была высказана гипотеза, что значения индекса k , при которых происходит падение ранга обобщенных инвариантов Лапласа X_k , совпадают с показателями соответствующей простой алгебры Ли, а номер h , для которого $X_h = 0$, равен числу Кокстера. В настоящей работе она доказана для всех простых алгебр Ли.

Для исключительных матриц Картана G_2 , F_4 , $E_6 - E_8$, соответствующих простым алгебрам Ли, мы также проверили, что цепочки Тоды являются системами лиувиллевого типа, но для краткости приводим лишь описание инвариантов для системы (25) с матрицей G_2 :

$$u_{xy}^1 = 2e^{u^1} - e^{u^2}, \quad u_{xy}^2 = -3e^{u^1} + 2e^{u^2}. \quad (26)$$

Инварианты H_i и обобщенные инварианты X_i , определяемые соотношениями (4), (9) и (10), для уравнений (26) вычисляются по следующим формулам:

$$X_1 = H_1 = G_2 S_1, \quad X_k = G_2 P^{-1} S_k Q, \quad k = 2, 3, 4, 5, \quad X_6 = 0, \\ H_k = G_2 P^{-1} (Z_k + B_k) P G_2^{-1}, \quad k = 2, 3, 4, 5, 6,$$

где

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad Z_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -e^{u^2} & e^{u^1} \end{pmatrix}, \quad B_k = \begin{pmatrix} b_{11}^k & 0 \\ b_{21}^k & 0 \end{pmatrix},$$

b_{11}^k и b_{21}^k , $k = 3, 4, 5, 6$, — произвольные элементы, $B_2 = 0$,

$$S_1 = \text{diag}(e^{u^1}, e^{u^2}), \quad S_2 = \text{diag}(0, e^{u^1+u^2}), \quad S_3 = \text{diag}(0, 4e^{2u^1+u^2}), \\ S_4 = \text{diag}(0, 12e^{3u^1+u^2}), \quad S_5 = \text{diag}(0, 12e^{3u^1+2u^2}), \quad Z_3 = \text{diag}(0, 4e^{u^1}), \\ Z_4 = \text{diag}(0, 3e^{u^1}), \quad Z_5 = \text{diag}(0, e^{u^2}), \quad Z_6 = 0.$$

Для системы (26) значения индекса k , при которых происходит падение ранга матрицы X_k , суть показатели 1, 5 системы G_2 , а номер $k = 6$, для которого $X_k = 0$, равен числу Кокстера [19].

2. ЦЕПОЧКА ТОДЫ СЕРИИ A_n

2.1. Инварианты и обобщенные инварианты Лапласа. Систему уравнений (25) с матрицей Картана

$$A = A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

запишем в виде

$$\mathcal{D}\overline{\mathcal{D}}u = AUc. \quad (27)$$

Здесь $u = (u^1, u^2, u^3, \dots, u^{n-1}, u^n)^T$ – столбец неизвестных, $c = (1, 1, 1, \dots, 1, 1)^T$, $U = \text{diag}(e^{u^1}, e^{u^2}, \dots, e^{u^n})$. Тогда линеаризация уравнений (27) принимает форму

$$\mathcal{D}\overline{\mathcal{D}}v = AVv, \quad v = (v^1, v^2, \dots, v^n)^T. \quad (28)$$

Для описания инвариантов введем матрицы порядка n : J – верхнетреугольная матрица, все элементы которой на главной диагонали и выше ее равны единице; B_k , $k = 2, 3, \dots, n$, – матрица, у которой первые $k-1$ столбцов произвольные, а остальные столбцы нулевые, $B_1 = 0$; матрицы $Z_k = (z_{ij}^k)$, $k = 2, 3, \dots, n$, определяются так:

$$z_{ii}^k = e^{u^{i-k+1}}, \quad z_{i,i-1}^k = -e^{u^i}, \quad i = k, k+1, \dots, n,$$

а остальные элементы равны нулю, $Z_{n+1} = 0$; матрица $T_k = (t_{ij}^k)$, $k = 3, 4, \dots, n+1$, содержит лишь один ненулевой элемент $t_{k-1,k-2}^k = -e^{u^{k-1}}$, $T_2 = 0$;

$$S_k = \text{diag}\left\{0, \dots, 0, \exp\left(\sum_{i=1}^k u^i\right), \exp\left(\sum_{i=2}^{k+1} u^i\right), \dots, \exp\left(\sum_{i=n-k}^{n-1} u^i\right), \exp\left(\sum_{i=n-k+1}^n u^i\right)\right\};$$

$$R_k = \text{diag}\left\{0, \dots, 0, \sum_{i=1}^k u_y^i, \sum_{i=2}^{k+1} u_y^i, \dots, \sum_{i=n-k}^{n-1} u_y^i, \sum_{i=n-k+1}^n u_y^i\right\}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 3. Система уравнений (27) является системой лиувиллевого типа. Обобщенные инварианты X_k и инварианты H_k линеаризованной системы (28), определяемые формулами (4), (9) и (10), вычисляются следующим образом:

$$X_k = AJ^{1-k}S_k(J^T)^{1-k}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad X_{n+1} = 0, \quad (29)$$

$$H_k = AJ^{1-k}Z_kJ^{k-2}A^{-1} + Q_{k-1}J^{k-2}A^{-1}, \quad k = 2, 3, \dots, n+1, \quad (30)$$

где матрицы Q_{k-1} задаются рекуррентными формулами

$$Q_{k-1} = AJ^{2-k}T_k + D(B_{k-1}) + Q_{k-2}J^{-1}, \quad k = 2, 3, \dots, n+1, \quad (31)$$

$Q_0 = 0$. При этом решения a_k уравнений (9) имеют вид

$$a_k = -AJ^{1-k}R_kJ^{k-1}A^{-1} + B_kJ^{k-1}A^{-1}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (32)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Главный инвариант системы (28) (см. (4))

$$H_1 = AU.$$

Так как $U = S_1$, то мы приходим к формуле (29) при $k = 1$:

$$H_1 = X_1 = AS_1.$$

Матрица H_1 является невырожденной, поэтому решение уравнения (9) при $m = 1$ принимает вид

$$a_1 = -\overline{\mathcal{D}}(X_1)X_1^{-1} = -AR_1A^{-1}.$$

Последнее соотношение совпадает с формулой (32) для $k = 1$, поскольку B_1 — нулевая матрица.

Далее согласно (10) имеем

$$H_2 = \mathcal{D}(a_1) + H_1,$$

ввиду того что $b = 0$ в случае системы (28). Следовательно,

$$H_2 = A[S_1A - \mathcal{D}(R_1)]A^{-1},$$

и так как

$$S_1A - \mathcal{D}(R_1) = J^{-1}Z_2,$$

то

$$H_2 = AJ^{-1}Z_2A^{-1}$$

и в случае $k = 2$ с учетом того, что $T_2 = 0$, $Q_1 = 0$, мы приходим к (30). Прямым вычислением получаем

$$X_2 = H_2H_1 = AJ^{-1}Z_2S_1 = AJ^{-1}S_2(J^T)^{-1},$$

т.е. формула (29) верна при $k = 2$. Теперь решение уравнения (9) при $m = 2$ дается формулой

$$a_2 = -A J^{-1} R_2 J A^{-1} + B_2 J A^{-1}.$$

Таким образом, справедлива формула (32) при $k = 2$.

Справедливость формул (29)–(32) для $k \leq n$ устанавливается методом математической индукции.

Вычислим инвариант H_{n+1} . Имеем согласно (10), (30) и (32):

$$\begin{aligned} H_{n+1} = \mathcal{D}(a_n) + H_n = -A J^{1-n} (\mathcal{D}(R_n) - Z_n J^{-1}) J^{n-1} A^{-1} + \\ + (\mathcal{D}(B_n) + Q_{n-1} J^{-1}) J^{n-1} A^{-1}. \end{aligned}$$

Так как

$$\mathcal{D}(R_n) - Z_n J^{-1} = -T_{n+1},$$

то

$$H_{n+1} = A J^{1-n} T_{n+1} J^{n-1} A^{-1} + (\mathcal{D}(B_n) + Q_{n-1} J^{-1}) J^{n-1} A^{-1}.$$

Последнюю формулу перепишем в виде

$$H_{n+1} = Q_n J^{n-1} A^{-1}, \quad (33)$$

где

$$Q_n = A J^{1-n} T_{n+1} + \mathcal{D}(B_n) + Q_{n-1} J^{-1}. \quad (34)$$

Таким образом, формулы (33) и (34) совпадают с (30) и (31) при $k = n+1$, ввиду того что $Z_{n+1} = 0$.

И, наконец, вычислим обобщенный инвариант X_{n+1} . Согласно (29) и (33) имеем

$$X_{n+1} = H_{n+1} X_n = Q_n S_n (J^T)^{1-n}. \quad (35)$$

Теперь, используя рекуррентные формулы (31) и (35) последовательно, получаем

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= Q_{n-1} J^{-1} S_n (J^T)^{1-n} = \\ &= Q_{n-2} J^{-3} S_n (J^T)^{1-n} = \dots = Q_2 J^{2-n} S_n (J^T)^{1-n}. \end{aligned} \quad (36)$$

Так как матрица Q_2 имеет лишь первый ненулевой столбец, а первая строка матрицы $J^{2-n} S_n$ нулевая, то из (36) следует, что $X_{n+1} = 0$. Теорема доказана.

Отметим, что $\text{rank } X_k = n - k + 1$, $k = 1, 2, \dots, n+1$. Таким образом, значения индекса k , при которых происходит падение ранга матрицы X_k , совпадают с показателями $1, 2, \dots, n$ системы A_n , а номер $k = n+1$, для которого $X_k = 0$, равен числу Кокстера [19].

Далее матрицы B_k можно выбрать так, что

$$Q_k = 0, \quad k = 2, 3, \dots, n. \quad (37)$$

Действительно, из цепочки (27) находим

$$e^{u^k} = \mathcal{D}(\theta_k), \quad \theta_k = \frac{1}{n+1} \overline{\mathcal{D}} \left\{ (n-k+1) \sum_{i=1}^k i u^i + k \sum_{i=k+1}^n (n-i+1) u^i \right\}.$$

Теперь введем матрицы $P_k = (p_{ij}^k)$, состоящие из одного ненулевого элемента

$$p_{k-1, k-2}^k = \theta_{k-1}, \quad k = 3, 4, \dots, n+1.$$

Тогда

$$T_k = -\mathcal{D}(P_k), \quad k = 3, 4, \dots, n+1,$$

и если положить

$$B_k = A J^{1-k} P_{k+1}, \quad k = 2, 3, \dots, n,$$

то из формул (31) следуют равенства (37). При таком выборе матриц B_k инварианты H_k вычисляются следующим образом:

$$H_k = A J^{1-k} Z_k J^{k-2} A^{-1}, \quad k = 2, 3, \dots, n+1.$$

Так как $Z_{n+1} = 0$, то $H_{n+1} = 0$.

Заметим также, что инварианты K_i , обобщенные инварианты Y_i и коэффициенты b_i (см. (11), (12)) линеаризованной цепочки Тоды (28) определяются формулами (29)–(32) после замены оператора дифференцирования $\mathcal{D}$ на $\overline{\mathcal{D}}$ и переменных u_y^i на u_x^i .

2.2. Симметрии и интегралы цепочки Тоды серии A_n . Здесь мы покажем, как строить симметрии и x - и y -интегралы системы уравнений (27). Это построение основано на формулах для интегралов и решений линеаризованной системы (28). Поэтому мы приведем эти формулы в случае общей линейной системы уравнений вида (3), которые получены в работе [20].

Предположим, что матрицы a_i и b_i можно выбрать так, что инварианты H_i и K_i системы (3) такие, что (см. (5), (7))

$$\overline{\mathcal{D}}(H_i) + a_i H_i - H_i a_{i-1} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad H_{n+1} = 0, \quad (38)$$

$$\mathcal{D}(K_i) + b_i K_i - K_i b_{i-1} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad K_{m+1} = 0. \quad (39)$$

Тогда x - и y -интегралы уравнений (3) даются формулами

$$(\mathcal{D} + b)(\overline{\mathcal{D}} + a_n)(\overline{\mathcal{D}} + a_{n-1}) \dots (\overline{\mathcal{D}} + a_1)(\overline{\mathcal{D}} + a)v = 0, \quad (40)$$

$$(\overline{\mathcal{D}} + a)(\mathcal{D} + b_m)(\mathcal{D} + b_{m-1}) \dots (\mathcal{D} + b_1)(\mathcal{D} + b)v = 0. \quad (41)$$

Для построения решений системы (3) рассмотрим сопряженную к ней систему

$$(\mathcal{D}\overline{\mathcal{D}} + \tilde{a}\mathcal{D} + \tilde{b}\overline{\mathcal{D}} + \tilde{c})V = 0, \quad (42)$$

где

$$\tilde{a} = -a^T, \quad \tilde{b} = -b^T, \quad \tilde{c} = c^T - \mathcal{D}(a^T) - \overline{\mathcal{D}}(b^T).$$

Обозначим через h_i и k_i инварианты Лапласа системы (42), которые удовлетворяют соотношениям

$$\overline{\mathcal{D}}(h_i) + \tilde{a}_i h_i - h_i \tilde{a}_{i-1} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad h_{m+1} = 0, \quad (43)$$

$$\mathcal{D}(k_i) + \tilde{b}_i k_i - k_i \tilde{b}_{i-1} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad k_{n+1} = 0. \quad (44)$$

При этих условиях исходная линейная система (3) имеет специальные решения вида

$$v = (\mathcal{D} - \tilde{b}_1^T)(\mathcal{D} - \tilde{b}_2^T) \dots (\mathcal{D} - \tilde{b}_n^T)f \quad (45)$$

и

$$v = (\overline{\mathcal{D}} - \tilde{a}_1^T)(\overline{\mathcal{D}} - \tilde{a}_2^T) \dots (\overline{\mathcal{D}} - \tilde{a}_m^T)\varphi, \quad (46)$$

где f и φ — решения уравнений

$$(\overline{\mathcal{D}} + a)f = 0, \quad (\mathcal{D} + b)\varphi = 0. \quad (47)$$

Теперь приведенные выше формулы мы используем для нахождения высших симметрий и интегралов цепочки Тоды (27). Для этого выражения (30)–(32), определяющие матрицы H_k и a_k , перепишем, полагая

$$P_k = J^k A^{-1} Q_k, \quad \Phi_k = -J^{k-1} A^{-1} B_k,$$

в виде

$$H_k = A J^{1-k} (Z_k + P_{k-1}) J^{k-2} A^{-1}, \quad k = 2, 3, \dots, n+1, \quad (48)$$

$$P_{k-1} = J[T_k - \mathcal{D}(\Phi_{k-1}) + P_{k-2} J^{-1}], \quad k = 2, 3, \dots, n+1, \quad P_0 = 0, \quad (49)$$

$$a_k = -A J^{1-k} (R_k + \Phi_k) J^{k-1} A^{-1}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (50)$$

Напомним, что согласно определению матрицы B_k матрица Φ_k представляет собой матрицу, у которой первые $k-1$ столбцов произвольные, а остальные столбцы нулевые.

Рассмотрим систему уравнений, сопряженную к линеаризованной цепочке Тоды (28):

$$\mathcal{D}\overline{\mathcal{D}}V = H_1^T V, \quad H_1^T = UA. \quad (51)$$

Так как обобщенные инварианты линеаризованной системы (3) и сопряженной к ней системы (17) связаны формулами (20), то, используя этот факт применительно к уравнениям (28) и (51) и учитывая результат теоремы 3, нетрудно получить соотношения для вычисления инвариантов h_i и коэффициентов $\tilde{a}_i$ сопряженной системы (51):

$$h_k = J^{1-k} (Z_k + p_{k-1}) J^{k-2}, \quad k = 2, 3, \dots, n+1, \quad h_1 = K_1^T, \quad (52)$$

$$p_{k-1} = J[T_k - \mathcal{D}(\varphi_{k-1}) + p_{k-2} J^{-1}], \quad k = 2, 3, \dots, n+1, \quad p_0 = 0, \quad (53)$$

$$\tilde{a}_k = -J^{1-k} (R_k + \varphi_k) J^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (54)$$

Здесь φ_k – произвольная матрица, имеющая ту же структуру, что и матрица Φ_k .

Выберем Φ_k и φ_k , $k = 2, 3, \dots$, такими, чтобы для инвариантов H_k и h_k выполнялись равенства (38) и (43). Отметим, что $n = m$ и при $k = 1, 2$ соотношения (38) и (43) выполнены, так как в рассматриваемом случае H_1 и K_1 – невырожденные матрицы. Далее соотношения (38) и (43) в силу формул (48)–(50) и (52)–(54) эквивалентны уравнениям

$$\begin{aligned} P_{k-1} &= J[T_k - \mathcal{D}(\Phi_{k-1}) + P_{k-2}J^{-1}], \quad k = 3, 4, \dots, n+1, \\ P_1 &= 0, \quad P_n = 0, \\ \overline{\mathcal{D}}(P_{k-1}) - (R_k + \Phi_k)P_{k-1} + (Z_k + P_{k-1})\Phi_{k-1} &= 0, \quad k = 3, 4, \dots, n, \end{aligned} \quad (55)$$

и

$$\begin{aligned} p_{k-1} &= J[T_k - \mathcal{D}(\varphi_{k-1}) + p_{k-2}J^{-1}], \quad k = 3, 4, \dots, n+1, \quad p_1 = 0, \quad p_n = 0, \\ \overline{\mathcal{D}}(p_{k-1}) - (R_k + \varphi_k)p_{k-1} + (Z_k + p_{k-1})\varphi_{k-1} &= 0, \quad k = 3, 4, \dots, n, \end{aligned} \quad (56)$$

соответственно.

Рассмотрим специальные решения уравнений (55) и (56) ($P_k = p_k$, $\Phi_k = \varphi_k$) вида

$$P_k = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ p_{k+1,1}^k & \dots & p_{k+1,k-1}^k & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n,1}^k & \dots & p_{n,k-1}^k & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_k = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \varphi_{k,1}^k & \dots & \varphi_{k,k-1}^k & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n,1}^k & \dots & \varphi_{n,k-1}^k & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

В этом случае уравнения (55) и (56) приводятся к следующему виду:

$$\begin{aligned} P_{k-1} &= J[T_k - \mathcal{D}(\Phi_{k-1}) + P_{k-2}J^{-1}], \quad k = 3, 4, \dots, n+1, \\ \overline{\mathcal{D}}(P_{k-1}) - R_k P_{k-1} + Z_k \Phi_{k-1} &= 0, \quad k = 3, 4, \dots, n, \\ P_1 &= 0, \quad P_n = 0. \end{aligned} \quad (57)$$

Система (57) совместна, последнее легко заметить, если записать ее в скалярной форме.

Пусть P_k и Φ_k – решение системы (57). Тогда построенные по формулам (50) и (54) матрицы a_k и $\tilde{a}_k$ позволяют вычислить симметрии и интегралы цепочки Тоды (27). Действительно, согласно (46), (47) функция

$$v = (\overline{\mathcal{D}} - \tilde{a}_1^T)(\overline{\mathcal{D}} - \tilde{a}_2^T) \dots (\overline{\mathcal{D}} - \tilde{a}_{n-1}^T)(\overline{\mathcal{D}} - \tilde{a}_n^T)\overline{W}, \quad (58)$$

где $\overline{W}$ – произвольный y -интеграл цепочки Тоды ($\mathcal{D}(\overline{W}) = 0$), есть решение линеаризованной системы (28). Функция, определенная формулой (58), является высшей симметрией уравнения (27). В случае линеаризованной системы (28), заменяя в (40) функцию v на симметрию (58), будем иметь

$$\mathcal{D}(\overline{\mathcal{D}} + a_n)(\overline{\mathcal{D}} + a_{n-1}) \dots (\overline{\mathcal{D}} + a_1)\overline{\mathcal{D}}(\overline{\mathcal{D}} - \tilde{a}_1^T) \dots (\overline{\mathcal{D}} - \tilde{a}_{n-1}^T)(\overline{\mathcal{D}} - \tilde{a}_n^T)(\overline{W}) = 0.$$

Перепишем последнее соотношение следующим образом:

$$\mathcal{D}[\overline{\mathcal{D}}^{2n+1} + A_{2n}\overline{\mathcal{D}}^{2n} + A_{2n-1}\overline{\mathcal{D}}^{2n-1} + \dots + A_0](\overline{W}) = 0,$$

откуда получаем, что

$$\mathcal{D}(A_i) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, 2n.$$

Можно показать, что $A_{2n} = 0$, а $A_{2n-1}, \dots, A_n$ являются y -интегралами порядка $2, 3, \dots, n+1$, соответственно, и эти матричные интегралы задают полный набор n скалярных y -интегралов, т.е. любой другой y -интеграл есть функция от этих интегралов и их производных.

Второе семейство высших симметрий и набор x -интегралов получаются из предыдущих заменой динамических переменных $u_y, u_{yy}, u_{yyy}, \dots$ на $u_x, u_{xx}, u_{xxx}, \dots$. С другой стороны, аналогично тому, как это было сделано выше, их можно описать с использованием формул (41), (45) и (47) и инвариантов K_i и k_i уравнений (28) и (51).

3. ЦЕПОЧКА ТОДЫ СЕРИИ C_n

Система уравнений (25) с матрицей Картана C_n имеет вид

$$\begin{aligned} u_{xy}^i &= -e^{u^{i-1}} + 2e^{u^i} - e^{u^{i+1}}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \\ u_{xy}^n &= -2e^{u^{n-1}} + 2e^{u^n}, \quad u^0 = -\infty. \end{aligned}$$

Для дальнейшего эту систему с помощью замены $u^i \rightarrow u^{n-i+1}$, $i = 1, 2, \dots, n$, удобно привести к системе уравнений, которая в матричной форме записывается следующим образом:

$$\mathcal{D}\overline{\mathcal{D}}u = CUc, \quad (59)$$

где $C = \mathcal{L}C_n\mathcal{L}$, $\mathcal{L} = (l_{ij})$ — матрица, у которой $l_{i, n-i+1} = 1$, $i = 1, 2, \dots, n$, а остальные элементы нулевые, а c и U определены выше (см. раздел 2).

В этом разделе мы приведем формулы для инвариантов, обобщенных инвариантов и матриц a_k , $k = 1, 2, \dots$, линеаризованной системы

$$\mathcal{D}\overline{\mathcal{D}}v = CUv. \quad (60)$$

Для этого введем следующие матрицы: J_k — верхнетреугольная матрица порядка k , все элементы которой на главной диагонали и выше ее равны единице; E_k — единичная матрица порядка k ; M_k и N_k — блочные матрицы порядка n :

$$M_k = \begin{pmatrix} J_k & 0 \\ 0 & E_{n-k} \end{pmatrix}, \quad N_k = \begin{pmatrix} E_{n-k} & 0 \\ 0 & J_k \end{pmatrix};$$

элементы диагональных матриц вида

$$S_m = \text{diag}\left\{0, 0, \dots, 0, e^{\frac{\theta_m^m}{2} + 1 + \varepsilon_m}, e^{\frac{\theta_m^m}{2} + 2}, \dots, e^{\theta_n^m}\right\}$$

вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned}\theta_j^m &= \sum_{i=1}^j u^i + \sum_{i=2}^{m+1-j} u^i, \quad j = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 1, \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 2, \dots, m-1, \quad m = 3, 4, \dots, n, \\ &\text{и } j = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 1, \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 2, \dots, n, \quad m = n+1, n+2, \dots, 2n-1, \\ \theta_j^m &= \sum_{i=j-m+1}^j u^i, \quad j = m, m+1, \dots, n, \quad m = 2, 3, \dots, n,\end{aligned}$$

где $\varepsilon_m = 0$, если $m = 2k$, и $\varepsilon_m = \ln 2$ при $m = 2k+1$, $S_1 = U$ и $S_{2n} = 0$;

$$\begin{aligned}R_m &= \text{diag}\{0, 0, \dots, 0, \overline{\mathcal{D}}(\theta_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1}^m), \overline{\mathcal{D}}(\theta_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2}^m), \dots, \overline{\mathcal{D}}(\theta_n^m)\}, \quad m = 2, 3, \dots, 2n-1, \\ R_1 &= \text{diag}\{u_y^1, u_y^2, \dots, u_y^n\}, \quad R_{2n} = 0;\end{aligned}$$

ненулевые элементы матриц порядка n $Z_m = (z_{ij}^m)$, $m = 2, 3, \dots, 2n-1$, определяются так:

$$\begin{aligned}z_{i, i-1}^m &= -e^{u^i}, \quad i = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 1, \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 2, \dots, n, \quad m = 2, 3, \dots, 2n-1, \\ z_{ii}^m &= e^{u^{m-i+1}}, \quad i = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 2, \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 3, \dots, m, \quad m = 2, 3, \dots, n-1, \\ &\text{и } i = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 2, \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 3, \dots, n, \quad m = n, n+1, \dots, 2n-1, \\ z_{ii}^m &= e^{u^{i-m+1}}, \quad i = m+1, m+2, \dots, n, \quad m = 2, 3, \dots, n-1,\end{aligned}$$

при этом для $m = 2k, 2k+1$ имеем $z_{k+1, k+1}^{2k} = e^{u^k}$, $z_{k+1, k+1}^{2k+1} = 2e^{u^{k+1}}$, $Z_{2n} = 0$; первые $\lfloor m/2 \rfloor$ столбцов матриц B_m , $m = 2, 3, \dots, 2n-1$, состоят из произвольных элементов, а остальные столбцы нулевые; и, наконец, матрица L_k , $k = 2, 3, \dots, n$, содержит лишь один ненулевой элемент $l_{k, k-1}^k = -e^{u^k}$, $L_1 = 0$.

Результат этого раздела можно сформулировать следующим образом:

ТЕОРЕМА 4. Система уравнений (59) является системой лиувиллевского типа. Обобщенные инварианты X_k , инварианты H_k и матрицы a_k линеаризованной системы (60), определяемые формулами (4), (9) и (10), вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned}X_k &= P_k S_k P_k^T Q, \quad H_k = P_k Z_k P_{k-1}^{-1} + \Phi_k, \quad k = 2, 3, \dots, 2n-1, \quad X_{2n} = 0, \\ X_1 &= H_1 = C S_1, \quad H_{2n} = P_{2n-1} L_n P_{2n-1}^{-1} + \mathcal{D}(B_{2n-1}) P_{2n-1}^{-1} + \Phi_{2n-1}, \\ a_k &= -P_k R_k P_k^{-1} + B_k, \quad k = 1, 2, \dots, 2n-1,\end{aligned} \quad (61)$$

где матрицы n -го порядка P_k и Φ_k вычисляются по рекуррентным формулам:

$$\begin{aligned} P_{2k+1} &= P_{2k} N_{n-k}^{-1}, & P_{2k} &= P_{2k-1} N_{n-k+1}^{-1} M_{k+1}^{-1}, & k &= 1, 2, \dots, n-1, \\ P_1 &= C, & Q &= (J_n^{-1} M_2 J_n C^{-1})^T, \\ \Phi_{2k} &= P_{2k} M_{k+1} L_k P_{2k-1}^{-1} + \mathcal{D}(B_{2k-1}) P_{2k-1}^{-1} + \Phi_{2k-1}, \\ \Phi_{2k+1} &= \mathcal{D}(B_{2k}) P_{2k}^{-1} + \Phi_{2k}, & k &= 1, 2, \dots, n-1, \\ \Phi_1 &= 0, & B_1 &= 0, & L_1 &= 0. \end{aligned} \quad (62)$$

Справедливость формул (61) и (62) обосновывается с помощью метода математической индукции.

Так как $\text{rank } S_{2k} = \text{rank } S_{2k+1} = n - k$, $k = 1, 2, \dots, n-1$, то из (61) получаем, что

$$\text{rank } X_{2k} = \text{rank } X_{2k+1} = n - k, \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Таким образом, значения индекса k , при которых происходит падение ранга обобщенного инварианта X_k , совпадают с показателями $1, 3, 5, \dots, 2n-1$ системы C_n , а номер $k = 2n$, для которого $X_k = 0$, равен числу Кокстера [19].

4. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ С МАТРИЦЕЙ КАРТАНА B_n

Как и в предыдущем разделе, систему уравнений (25) с матрицей B_n

$$\begin{aligned} u_{xy}^1 &= 2e^{u^1} - e^{u^2}, \\ u_{xy}^i &= -e^{u^{i-1}} + 2e^{u^i} - e^{u^{i+1}}, \quad i = 2, 3, \dots, n-2, \\ u_{xy}^{n-1} &= -e^{u^{n-2}} + 2e^{u^{n-1}} - 2e^{u^n}, \\ u_{xy}^n &= -e^{u^{n-1}} + 2e^{u^n} \end{aligned}$$

путем замены неизвестных функций $u^i \longrightarrow u^{n-i+1}$, $i = 1, 2, \dots, n$, удобно записать в матричной форме следующим образом:

$$\mathcal{D}\overline{\mathcal{D}}u = BUc, \quad B = \mathcal{L}B_n\mathcal{L}, \quad (63)$$

линеаризация которой имеет вид

$$\mathcal{D}\overline{\mathcal{D}}v = BUv. \quad (64)$$

Для определения инвариантов Лапласа уравнений (64) введем матрицы порядка n . Диагональные матрицы S_m , $m = 1, 2, \dots, 2n$, задаются следующим образом:

$$\begin{aligned} S_1 &= U, \\ S_m &= \text{diag}\left\{0, 0, \dots, 0, e^{\frac{\theta_m^m}{2} + 1}, e^{\frac{\theta_m^m}{2} + 2}, \dots, e^{\theta_m^m}\right\}, \quad m = 2, 3, \dots, 2n-1, \\ S_{2n} &= 0, \end{aligned}$$

где элементы θ_j^m вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}\theta_j^m &= 2 \sum_{i=1}^{m-j} u^i + \sum_{i=m-j+1}^j u^i + \ln 4, \\ j &= \left[\frac{m}{2} \right] + 1, \left[\frac{m}{2} \right] + 2, \dots, m-1, \quad m = 3, 4, \dots, n, \\ \text{и } j &= \left[\frac{m}{2} \right] + 1, \left[\frac{m}{2} \right] + 2, \dots, n, \quad m = n+1, n+2, \dots, 2n-1, \\ \theta_m^m &= \sum_{i=1}^m u^i + \ln 2, \quad m = 2, 3, \dots, n, \\ \theta_j^m &= \sum_{i=j-m+1}^j u^i, \quad j = m+1, m+2, \dots, n, \quad m = 2, 3, \dots, n; \\ R_m &= \text{diag}\{0, 0, \dots, 0, \overline{\mathcal{D}}(\theta_{[\frac{m}{2}]+1}^m), \overline{\mathcal{D}}(\theta_{[\frac{m}{2}]+2}^m), \dots, \overline{\mathcal{D}}(\theta_n^m)\}, \quad m = 2, 3, \dots, 2n-1, \\ R_1 &= \text{diag}\{u_y^1, u_y^2, \dots, u_y^n\}, \quad R_{2n} = 0;\end{aligned}$$

ненулевые элементы матриц $Z_m = (z_{ij}^m)$, $m = 2, 3, \dots, 2n-1$, определяются по формулам

$$z_{ii}^m = e^{u^{m-i}}, \quad i = \left[\frac{m}{2} \right] + 1, \left[\frac{m}{2} \right] + 2, \dots, l, \quad m = 5, 6, \dots, 2n-1,$$

где $l = n$, если $m \geq n+2$, и $l = m-2$ в случае $m < n+2$,

$$\begin{aligned}z_{m-1, m-1}^m &= 2e^{u^1}, \quad m = 3, 4, \dots, n+1, \quad z_{mm}^m = 2e^{u^1}, \quad m = 2, 3, \dots, n, \\ z_{ii}^m &= e^{u^{i-m+1}}, \quad i = m+1, m+2, \dots, n, \quad m = 2, 3, \dots, n-1, \\ z_{i+1, i}^m &= -e^{u^{i+1}}, \quad i = \left[\frac{m}{2} \right] + r_m, \left[\frac{m}{2} \right] + r_m + 1, \dots, n-1, \quad m = 2, 3, \dots, 2n-2,\end{aligned}$$

где $r_m = 0$, если m четное, и $r_m = 1$, если m нечетное, $Z_{2n} = 0$; матрица $\tilde{J}_n$ отличается от J_n лишь элементом, стоящим на пересечении первой строки и первого столбца, который равен 2; $P_{2k} = E_n$, $P_{2k+1} = M_{k+1}^{-1}$, $k = 1, 2, \dots, n-1$, $D_{2k} = 0$, $k = 1, 2, \dots, n$, $D_{2k-1} = L_k$, $k = 2, 3, \dots, n$.

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 5. Система уравнений (63) является системой лиувиллевого типа. Обобщенные инварианты X_m и инварианты H_m системы уравнений (64) определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}X_m &= B\tilde{J}_n^{-1}A_mS_mA_m^T(J_n^{-1})^T, \quad m = 2, 3, \dots, 2n-1, \quad X_{2n} = 0, \\ H_m &= [B\tilde{J}_n^{-1}A_mZ_mA_{m-1}^{-1} + Q_{m-1}A_{m-1}^{-1}]\tilde{J}_nB^{-1}, \quad m = 1, 2, \dots, 2n,\end{aligned}\tag{65}$$

где матрицы A_m и Q_{m-1} вычисляются с помощью рекуррентных соотношений:

$$\begin{aligned} A_m &= A_{m-1} J_n^{-1} P_m^{-1}, & m = 3, 4, \dots, 2n-1, \\ A_0 &= \tilde{J}_n B^{-1} (J_n^{-1})^T, & A_1 = J_n, & A_2 = E_n, \\ Q_{m-1} &= B \tilde{J}_n^{-1} A_m D_m + \mathcal{D}(B_{m-1}) + Q_{m-2} A_{m-2}^{-1} A_{m-1}, & m = 2, 3, \dots, 2n, \\ Q_0 &= 0. \end{aligned}$$

При этом элементы a_m даются формулами

$$a_m = [-B \tilde{J}_n^{-1} A_m R_m + B_m] A_m^{-1} \tilde{J}_n B^{-1}, \quad m = 1, 2, \dots, 2n-1.$$

Доказательство теоремы нетрудно провести с использованием метода математической индукции.

Ввиду того что

$$\text{rank } S_{2k} = \text{rank } S_{2k+1} = n - k, \quad k = 1, 2, \dots, n-1,$$

из (65) получаем равенства

$$\text{rank } X_{2k} = \text{rank } X_{2k+1} = n - k, \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Следовательно, значения индекса k , при которых происходит падение ранга обобщенных инвариантов X_k , совпадают с показателями $1, 3, 5, \dots, 2n-1$ системы B_n , а номер $k = 2n$, для которого $X_k = 0$, равен числу Кокстера.

5. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ С МАТРИЦЕЙ КАРТАНА D_n

Система уравнений (25) с матрицей D_n имеет вид

$$\begin{aligned} u_{xy}^1 &= 2e^{u^1} - e^{u^2}, \\ u_{xy}^k &= -e^{u^{k-1}} + 2e^{u^k} - e^{u^{k+1}}, \quad i = 2, 3, \dots, n-3, \\ u_{xy}^{n-2} &= -e^{u^{n-3}} + 2e^{u^{n-2}} - e^{u^{n-1}} - e^{u^n}, \\ u_{xy}^{n-1} &= -e^{u^{n-2}} + 2e^{u^{n-1}}, \\ u_{xy}^n &= -e^{u^{n-2}} + 2e^{u^n}, \quad n \geq 3. \end{aligned}$$

Эту систему с помощью замены переменных $u^k \longrightarrow u^{n-k+1}$, $k = 1, 2, \dots, n$, удобно записать в матричной форме

$$\mathcal{D} \overline{\mathcal{D}} u = D U c, \quad D = \mathcal{L} D_n \mathcal{L}. \quad (66)$$

Напомним, что $\mathcal{L} = (l_{ij})$ – матрица, у которой элементы $l_{i,n-i+1} = 1$, $i = 1, 2, \dots, n$, а остальные нулевые, $U = \text{diag}(e^{u^1}, e^{u^2}, \dots, e^{u^n})$, $c = (1, 1, 1, \dots, 1)^T$. Линеаризация уравнений (66) записывается следующим образом:

$$\mathcal{D}\overline{\mathcal{D}}v = DUv. \quad (67)$$

Введем матрицы порядка n . Через S_m , $m = 1, 2, \dots, 2n - 3$, обозначим диагональные матрицы

$$S_m = \text{diag}\left\{0, 0, \dots, 0, e^{\theta_{[\frac{m}{2}]+1}^m}, e^{\theta_{[\frac{m}{2}]+2}^m}, \dots, e^{\theta_n^m}\right\},$$

элементы которых вычисляются так:

$$\theta_m^m = u^1 + \sum_{k=3}^{m+1} u^k, \quad \theta_i^m = \sum_{k=i-m+1}^i u^k, \quad i = m+1, m+2, \dots, n, \quad m = 2, 3, \dots, n-1,$$

$$\theta_i^m = u^1 + u^2 + A_i^m + \sum_{k=m-i+2}^{i+1} u^k + \ln 4,$$

$$i = \left[\frac{m}{2}\right] + 1, \left[\frac{m}{2}\right] + 2, \dots, m-1, \quad m = 3, 4, \dots, n-1,$$

$$\text{и } i = \left[\frac{m}{2}\right] + 1, \left[\frac{m}{2}\right] + 2, \dots, n-1, \quad m = n, n+1, \dots, 2n-3,$$

$$\theta_n^m = 0, \quad m = n, n+1, \dots, 2n-3,$$

где

$$A_i^m = \begin{cases} 0, & m-i < 3, \\ 2 \sum_{k=3}^{m+1-i} u^k, & m-i \geq 3, \end{cases}$$

$$S_1 = U, \quad S_{2n-2} = 0;$$

$$R_m = \text{diag}\left\{0, 0, \dots, 0, \overline{\mathcal{D}}(\theta_{[\frac{m}{2}]+1}^m), \overline{\mathcal{D}}(\theta_{[\frac{m}{2}]+2}^m), \dots, \overline{\mathcal{D}}(\theta_n^m)\right\}, \quad m = 2, 3, \dots, 2n-3,$$

$$R_1 = \text{diag}\{u_y^1, u_y^2, \dots, u_y^n\}, \quad R_{2n-2} = 0.$$

Ненулевые элементы матриц $Z_m = (z_{ij}^m)$, $m = 1, 2, \dots, 2n-3$, определяются следующим образом:

$$z_{ii}^m = e^{u^{m-i+1}}, \quad i = \left[\frac{m}{2}\right] + 1, \left[\frac{m}{2}\right] + 2, \dots, m-2, \quad m = 5, 6, \dots, n,$$

$$\text{и } i = \left[\frac{m}{2}\right] + 1, \left[\frac{m}{2}\right] + 2, \dots, n-1, \quad m = n+1, n+2, \dots, 2n-3,$$

$$z_{ii}^m = e^{u^{i-m+1}}, \quad i = m+1, m+2, \dots, n, \quad m = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$z_{m-1, m-1}^m = 2e^{u^2}, \quad m = 3, 4, \dots, n,$$

$$z_{i+1, i}^m = -e^{u^{i+2}}, \quad i = \left[\frac{m}{2}\right] + r_m, \left[\frac{m}{2}\right] + r_m + 1, \dots, m-1, \quad m = 2, 3, \dots, n-1,$$

$$\text{и } i = \left[\frac{m}{2}\right] + r_m, \left[\frac{m}{2}\right] + r_m + 1, \dots, n-2, \quad m = n, n+1, \dots, 2n-4,$$

где $r_m = 0$, если m четное, и $r_m = 1$ при нечетном m ,

$$\begin{aligned} z_{i+1,i}^m &= -e^{u^{i+1}}, \quad i = m, m+1, \dots, n-1, \quad m = 1, 2, \dots, n-1, \\ z_{m-1,m}^m &= 2e^{u^1}, \quad m = 3, 4, \dots, n, \quad z_{m,m+1}^m = e^{u^1}, \quad m = 1, 2, \dots, n-1, \end{aligned}$$

Z_{2n-2} — нулевая матрица. Положим

$$Q^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

и через Φ_k обозначим матрицы n -го порядка

$$\begin{aligned} \Phi_k &= \begin{pmatrix} E_{k-2} & 0 & 0 \\ 0 & Q^3 & 0 \\ 0 & 0 & E_{n-k-1} \end{pmatrix}, \quad k = 2, 3, \dots, n-1, \quad \Phi_n = \begin{pmatrix} E_{n-2} & 0 \\ 0 & Q^2 \end{pmatrix}, \\ \Phi_k &= E_n, \quad k = n+1, n+2, \dots, 2n-2; \\ G_{2k} &= J_n, \quad k = 1, 2, \dots, n-2, \\ G_{2k+1} &= \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & J_{n-k} \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, n-3, \quad G_{2n-3} = G_{2n-2} = E_n. \end{aligned}$$

Первые $[m/2]$ столбцов матриц B_m , $m = 2, 3, \dots, n-1$, состоят из произвольных элементов, а остальные столбцы нулевые, а при $m = n, n+1, \dots, 2n-3$ у матрицы B_m , помимо первых $[m/2]$ столбцов, произвольным является и последний; ненулевые элементы матриц $D_m = (d_{ij}^m)$ и $F_m = (f_{ij}^m)$, $m = 1, 2, \dots, 2n-2$, определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} d_{k+1,k}^{2k+1} &= -e^{u^{k+2}}, \quad k = 1, 2, \dots, n-2, \\ f_{n-1,n}^{n+1} &= 2e^{u^1} - 2e^{u^2}, \quad f_{n-1,n}^m = -e^{u^{m-n+2}}, \quad m = n+2, n+3, \dots, 2n-3. \end{aligned}$$

Теперь мы можем сформулировать результат этого раздела.

ТЕОРЕМА 6. Система уравнений (66) является системой лиувиллевого типа. Обобщенные инварианты X_m и инварианты H_m системы уравнений (67) определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} X_m &= DA_m S_m A_m^T, \quad m = 1, 2, \dots, 2n-3, \quad X_{2n-2} = 0, \\ H_m &= [DA_m Z_m + \Psi_{m-1}] A_{m-1}^{-1} D^{-1}, \quad m = 1, 2, \dots, 2n-2, \end{aligned} \quad (68)$$

где матрицы A_m и Ψ_{m-1} задаются рекуррентными соотношениями:

$$\begin{aligned} A_m &= A_{m-1} G_m^{-1} \Phi_m^{-1}, \quad A_1 = E_n, \quad A_0 = D^{-1} M_2 (J_n^T)^{-1}, \\ \Psi_{m-1} &= DA_{m-1} D_m + \mathcal{D}(B_{m-1}) + DA_{m-1} F_m + \Psi_{m-2} A_{m-2}^{-1} A_{m-1}, \\ \Psi_0 &= 0, \quad m = 2, 3, \dots, 2n-2. \end{aligned} \quad (69)$$

При этом коэффициенты a_m даются формулами

$$a_m = [-DA_m R_m + B_m] A_m^{-1} D^{-1}, \quad m = 1, 2, \dots, 2n - 3. \quad (70)$$

Справедливость формул (68)–(70) проверяется с использованием математической индукции.

Согласно формулам (68)

$$\text{rank } X_m = \text{rank } S_m, \quad m = 1, 2, \dots, 2n - 3,$$

поэтому (см. выше определение матриц S_m) при четном $n = 2r$ имеем

$$\text{rank } X_{2k} = \text{rank } X_{2k+1} = \begin{cases} n - k, & k = 1, 2, \dots, r - 1, \\ n - (k + 1), & k = r, r + 1, \dots, n - 2, \end{cases}$$

а при $n = 2r + 1$

$$\begin{aligned} \text{rank } X_{2k} = \text{rank } X_{2k+1} &= \begin{cases} n - k, & k = 1, 2, \dots, r - 1, \\ n - (k + 1), & k = r + 1, r + 2, \dots, n - 2, \end{cases} \\ \text{rank } X_{2r} &= n - r, \quad \text{rank } X_{2r+1} = n - r - 1. \end{aligned}$$

Следовательно, значения индекса m , при которых происходит падение ранга обобщенных инвариантов X_m , совпадают с показателями $1, 3, 5, \dots, 2n - 3, n - 1$ (последний показатель появляется дважды при четном n и один раз при нечетном n) системы D_n , а номер $m = 2n - 2$, для которого $X_m = 0$, равен числу Кокстера.

Отметим, что построенные инварианты для открытых цепочек Тоды могут быть использованы не только для описания x - и y -интегралов и высших симметрий, но и, как и в скалярном случае [9], для нахождения общих решений.

Заметим также, что, по-видимому, показатели простой алгебры Ли с точностью до слагаемого, равного единице, суть порядки минимальных x - и y -интегралов соответствующей ей цепочки Тоды.

Благодарности. В заключение авторы выражают благодарность В. В. Соколову за полезные обсуждения результатов работы. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 02-01-00144).

Список литературы

- [1] *G. Darboux.* Leçons sur la Théorie Générale des Surfaces et les Applications Géométriques du Calcul Infinitésimal. V. 2. Paris: Gauthier-Villars, 1915.
- [2] *E. Vessiot.* J. Math. Pure Appl. 1939. V. 18. № 9. P. 1–61; 1942. V. 21. № 9. P. 1–68.
- [3] *М. Ю. Звягин.* ДАН СССР. 1991. Т. 316. № 1. С. 36–40.
- [4] *А. Н. Лезнов, В. Г. Смирнов, А. Б. Шабат.* ТМФ. 1982. Т. 51. № 1. С. 10–21.
- [5] *А. В. Жибер, В. В. Соколов, С. Я. Старцев.* Докл. РАН. 1995. Т. 343. № 6. С. 746–748.
- [6] *J. M. Anderson, N. Kamran.* Duke Math. J. 1997. V. 87. № 2. P. 265–319.
- [7] *V. V. Sokolov, A. V. Zhiber.* Phys. Lett. A. 1995. V. 208. P. 303–308.
- [8] *E. Goursat.* Leçons sur l'Intégration des Équations aux Dérivées Partielles du Second Ordre à Deux Variables Indépendantes. Tome I, Tome II. Paris: Hermann, 1896, 1898.
- [9] *А. В. Жибер, В. В. Соколов.* УМН. 2001. Т. 56. № 1. С. 63–106.
- [10] *J. M. Anderson, M. Juras.* Duke Math. J. 1997. V. 89. № 2. P. 351–375.
- [11] *С. П. Царев.* ТМФ. 2000. Т. 122. № 1. С. 144–160.
- [12] *С. Я. Старцев.* ТМФ. 2001. Т. 127. № 1. С. 63–74.
- [13] *Е. В. Ферапонтов.* ТМФ. 1997. Т. 110. № 1. С. 86–97.
- [14] *В. Э. Адлер, С. Я. Старцев.* ТМФ. 1999. Т. 121. № 2. С. 271–284.
- [15] *А. М. Гиззаткулова, А. В. Жибер.* Системы уравнений Эйлера–Пуассона с нулевыми обобщенными инвариантами Лапласа. В сб.: Математические модели и методы их исследования. Труды международной конференции (Красноярск, 16–21 августа 2001 г.). Т. 1. Ред. В. К. Андреев, А. В. Шанько. Красноярск: Институт вычислительного моделирования СО РАН, 2001. С. 169–175.
- [16] *А. Н. Лезнов, М. В. Савельев.* Групповые методы интегрирования нелинейных динамических систем. М.: Наука, 1985.
- [17] *А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов.* Экспоненциальные системы типа I и матрицы Картана. Препринт № 1. Уфа: Башкирский филиал АН СССР, 1981.
- [18] *А. В. Shabat.* Phys. Lett. A. 1995. V. 200. P. 121–133.
- [19] *Н. Бурбаки.* Группы и алгебры Ли. М.: Мир, 1972.
- [20] *А. В. Жибер, С. Я. Старцев.* Об условиях существования преобразования Лапласа для линейной гиперболической системы уравнений. В сб.: Симметрия и дифференциальные уравнения. Труды III международной конференции (Красноярск, 25–29 августа 2002 г.). Ред. В. К. Андреев. Красноярск: Институт вычислительного моделирования СО РАН, 2002. С. 96–101.

Поступила в редакцию 24.III.2003 г.