Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Капаев, Монодромный подход к скейлинговым пределам в изомонодромных системах, *ТМФ*, 2003, том 137, номер 3, 393–407

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf280>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 16:43:40

© 2003 г.

А. А. Капаев*

МОНОДРОМНЫЙ ПОДХОД К СКЕЙЛИНГОВЫМ ПРЕДЕЛАМ В ИЗОМОНОДРОМНЫХ СИСТЕМАХ

С помощью метода изомодромных деформаций для скейлинговых пределов в линейных $(N \times N)$ -матричных уравнениях с рациональными коэффициентами получены уравнения деформации для алгебраических кривых, описывающие локальное поведение редуцированных версий соответствующих уравнений изомодромных деформаций. Этот подход иллюстрируется исследованием алгебраической кривой, связанной с асимптотикой последовательности биортогональных многочленов с кубическими потенциалами при больших n .

Ключевые слова: скейлинговые пределы, изомодромные деформации, метод ВКБ, спектральная кривая, модуляционные уравнения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что в определенных асимптотических пределах классические уравнения Пенлеве [1] редуцируются к эллиптическим уравнениям. Например, шестое уравнение Пенлеве

$$y_{xx} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-x} \right) y_x^2 - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-x} \right) y_x + \\ + \frac{y(y-1)(y-x)}{x^2(x-1)^2} \left(c_1 + c_2 \frac{x}{y^2} + c_3 \frac{x-1}{(y-1)^2} + c_4 \frac{x(x-1)}{(y-x)^2} \right) \quad (\text{PVI})$$

при больших значениях параметров c_j , $j = 1, \dots, 4$, и после замен $x = t_0 + \delta\tau$, $c_j = \delta^{-2}a_j + \delta^{-1}b_j$, где $t_0, a_j, b_j = \text{const}$, превращается при $\delta = 0$ в автономное уравнение, имеющее первый интеграл

$$D_0 = \frac{t_0^2(t_0-1)^2}{2y(y-1)(y-t_0)} y_\tau^2 - a_1 y + a_2 \frac{t_0}{y} + a_3 \frac{t_0-1}{y-1} + a_4 \frac{t_0(t_0-1)}{y-t_0}. \quad (1.1)$$

*Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова РАН, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: kapaev@pdmi.ras.ru

Асимптотики классических трансцендентов Пенлеве по параметрам или начальным данным изучались во многих работах (см. в работе [2] обширную, но не исчерпывающую библиографию). Предельные переходы такого вида называются ниже *скейлинговыми пределами*.

Наиболее эффективный на настоящий момент подход к скейлинговым пределам в трансцендентах Пенлеве основан на представлении монодромии последних [3], [4]. В работе [2] техника изомонодромных деформаций работы [5] была приспособлена к исследованию скейлинговых пределов уравнений изомонодромийных деформаций для (2×2) -матричных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) первого порядка с рациональными коэффициентами. В частности, из приведенных в работе [2] результатов следует, что модулярные параметры, подобные D_0 в (1.1), определяющие предельную (гипер)эллиптическую кривую для асимптотического решения уравнения изомонодромных деформаций, не являются произвольными константами, а оказываются определенными функциями всех параметров деформации. Эти функции единственным образом определяются системой трансцендентных *модуляционных* уравнений

$$\operatorname{Re} \oint_{\ell} \mu(\lambda) d\lambda = \operatorname{const}, \quad (1.2)$$

где ℓ – произвольный замкнутый путь на римановой поверхности спектральной кривой.

Ниже этот результат обобщается на скейлинговые пределы систем изомонодромийных деформаций для $(N \times N)$ -матричных линейных ОДУ с рациональными коэффициентами. Данная работа мотивирована недавними достижениями теории связанных случайных матриц. Действительно, в то время как статистические свойства ансамблей изолированных случайных матриц можно задать в терминах асимптотик квазиклассических ортогональных многочленов (см. [6], [7]), которые порождают линейное (2×2) -матричное ОДУ первого порядка с рациональными коэффициентами [8], ансамбли связанных случайных матриц весьма схожим образом порождают биортогональные многочлены [9]–[11] и линейные $(N \times N)$ -матричные ОДУ [10].

Работа построена следующим образом. В разделе 2 напоминаются основные факты, относящиеся к изомонодромным деформациям линейных матричных уравнений с рациональными коэффициентами, вводится понятие скейлинговых пределов в таких системах и описывается метод ВКБ их асимптотического решения. В разделе 3 найдены модуляционные уравнения для несингулярной асимптотической спектральной кривой и доказано, что они имеют единственное решение. В разделе 4 наш подход иллюстрируется с использованием конкретного (3×3) -матричного уравнения, выполненного для биортогональных многочленов с кубическими потенциалами.

2. ИЗОМОНОДРОМНЫЕ СИСТЕМЫ С БОЛЬШИМ ПАРАМЕТРОМ

В данном разделе, следуя работам [3], [12] и [13], мы напомним основные понятия теории линейных матричных дифференциальных уравнений. Рассмотрим $(N \times N)$ -матрич-

ное ОДУ первого порядка

$$\frac{d\Psi}{d\lambda} = A(\lambda)\Psi, \quad A(\lambda) = \sum_{\nu=1}^n \sum_{k=0}^{r_\nu} \frac{A_{\nu,-k}}{(\lambda - a^{(\nu)})^{k+1}} - \sum_{k=1}^{r_\infty} A_{\infty,-k} \lambda^{k-1}. \quad (2.1)$$

Будем говорить, что уравнение (2.1) находится в *общем положении*, если собственные значения $A_{\nu,-r_\nu}$ попарно различны при $r_\nu \neq 0$ и если они попарно различны по модулю целых чисел при $r_\nu = 0$. Без потери общности $\lambda = \infty$ является особой точкой с наибольшим рангом Пуанкаре, т.е. $r_\infty \geq r_\nu$, $\nu = 1, \dots, n$. Будем предполагать, что (2.1) находится в общем положении и $A_{\infty,-r_\infty}$ диагональна (о случаях не общего положения см. [13]). Тогда вблизи особенности $a^{(\nu)}$ уравнение (2.1) имеет формальное решение

$$\begin{aligned} \Psi_\nu(\lambda) &= W^{(\nu)} \widehat{\Psi}^{(\nu)}(\lambda) e^{\theta^{(\nu)}(\lambda)}, \quad \nu = 1, \dots, n, \infty, \\ \widehat{\Psi}^{(\nu)}(\lambda) &= I + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j^{(\nu)} \xi^j, \quad \theta^{(\nu)}(\lambda) = \sum_{j=1}^{r_\nu} x_{-j}^{(\nu)} \frac{\xi^{-j}}{(-j)} + x_0^{(\nu)} \ln \xi, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $\xi = \lambda - a^{(\nu)}$ для конечной особенности $a^{(\nu)}$ и $\xi = 1/\lambda$ для бесконечности. Матричные коэффициенты $\psi_j^{(\nu)}$ и диагональные матричные коэффициенты $x_{-j}^{(\nu)}$ формального разложения (2.2) однозначно определяются матрицей собственных векторов $W^{(\nu)}$ для $A_{\nu,-r_\nu}$.

Отношение $\widetilde{\Psi}^{-1}(\lambda)\Psi(\lambda)$ любых двух решений Ψ и $\widetilde{\Psi}$ уравнения (2.1) не зависит от λ . Отношения фундаментальных решений с нормировкой (2.2) называются *данными монодромии*.

Набор *параметров деформации* указан для уравнения (2.1) в общем положении в работе [3] (для уравнений не в общем положении – в статье [14]). Эти параметры включают положения $a^{(\nu)}$ особых точек и элементы диагональной матрицы $x_{-j}^{(\nu)}$, $j \neq 0$, для $\theta^{(\nu)}(\lambda)$ из (2.2). Все эти величины вместе образуют вектор x параметров деформации. Остающиеся параметры $x_0^{(\nu)}$, $\nu = 1, \dots, \infty$, называются *формальными показателями монодромии*. Они удовлетворяют тождеству Фукса

$$\sum_{\nu=1}^n \operatorname{Tr} x_0^{(\nu)} + \operatorname{Tr} x_0^{(\infty)} = 0. \quad (2.3)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Используя линейные преобразования в комплексной λ -плоскости, можно фиксировать положения двух конечных особых точек или же двух элементов $(x_{-j}^{(\nu)})_{kk}$. Используя скалярное калибровочное преобразование, можно добиться того, чтобы $\operatorname{Tr} A(\lambda) \equiv 0$, а потому $\operatorname{Tr} x_{-j}^{(\nu)} = 0$. Орбиты указанных преобразований называются *существенными* параметрами деформации.

Пусть d обозначает внешнее дифференцирование по элементам x . В соответствии с работой [3] данные монодромии уравнения (2.1) в общем положении не зависят от x , если

и только если существуют такие 1-формы Ω и $\Theta^{(\nu)}$, что указанные выше фундаментальные решения дополнительно удовлетворяют уравнениям

$$d\Psi = \Omega\Psi, \quad dW^{(\nu)} = \Theta^{(\nu)}W^{(\nu)}, \quad \nu = 1, \dots, n, \infty. \quad (2.4)$$

Тогда условие совместности уравнений (2.1) и (2.4),

$$dA = \frac{\partial\Omega}{\partial\lambda} + [\Omega, A], \quad d\Omega = \Omega \wedge \Omega, \quad (2.5)$$

есть вполне интегрируемая дифференциальная система, фиксированными особенностями которой являются плоскости $a^{(\nu)} = a^{(\rho)}$, $\nu \neq \rho$, $(x_j^{(\nu)})_{ii} = \infty$, $(x_{-r_\nu}^{(\nu)})_{ii} = 0$, $(x_{-r_\nu}^{(\nu)})_{ii} = (x_{-r_\nu}^{(\nu)})_{jj}$, если $i \neq j$, $r_\nu \neq 0$. (2×2) -система (2.5), в общем положении допускающая только один параметр деформации, эквивалентна одному из классических уравнений Пенлеве.

2.1. Скейлинговые пределы в изомонодромных системах. Пусть $A(\lambda)$ зависят от дополнительного параметра δ :

$$a^{(\nu)} = \delta^\varkappa (b^{(\nu)} + \delta c^{(\nu)}), \quad \varkappa = \text{const}, \quad (2.6)$$

$$A_{\nu, -k} = \delta^{k\varkappa-1} B_{\nu, -k}, \quad A_{\infty, -k} = \delta^{-k\varkappa-1} B_{\infty, -k}, \quad k = 0, \dots, r_\nu,$$

где $B_{\nu, -k}$, $k = 0, \dots, r_\nu$, — ряд Эрдейи по возрастающим степеням δ такой, что для уравнения (2.1) в общем положении выполняется

$$x_{-k}^{(\nu)} = \delta^{k\varkappa-1} (t_{-k}^{(\nu)} + \delta \tau_{-k}^{(\nu)}), \quad x_{-k}^{(\infty)} = \delta^{-k\varkappa-1} (t_{-k}^{(\infty)} + \delta \tau_{-k}^{(\infty)}). \quad (2.7)$$

Постоянные $b^{(\nu)}$ и элементы $t_{-k}^{(\nu)}$, $k \neq 0$, образуют вектор t для центра асимптотической области в пространстве параметров при $\delta \rightarrow +0$. Неравенства $|c^{(\nu)}|, \|\tau_{-k}^{(\nu)}\| < \text{const}$, или просто $\|\tau\| < \text{const}$, дают область изменения “локальных” деформаций. Элементы вектора t обычно называются “медленными” переменными, а элементы вектора τ — “быстрыми”. Элементы векторов $t_0^{(\nu)}$ и $\tau_0^{(\nu)}$ для формальных показателей монодромии образуют соответственно векторы α и β .

Подставляя (2.6) и $\lambda = \delta^\varkappa \zeta$ в (2.1), (2.4), находим

$$\frac{d\Psi}{d\zeta} = \delta^{-1} B(\zeta) \Psi, \quad d\Psi = \omega \Psi, \quad (2.8)$$

$$B(\zeta) = \sum_{\nu=1}^n \sum_{k=0}^{r_\nu} \frac{B_{\nu, -k}}{(\zeta - b^{(\nu)} - \delta c^{(\nu)})^{k+1}} - \sum_{k=1}^{r_\infty} B_{\infty, -k} \zeta^{k-1}.$$

Соответствующие условия совместности имеют вид

$$dB = [\omega, B] + \delta \frac{\partial \omega}{\partial \zeta}, \quad d\omega = \omega \wedge \omega. \quad (2.9)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Если $r_\infty \neq 0$ и $(x_{-r_\infty}^{(\infty)})_{11}$ не зависят от δ , то $\varkappa = -1/r_\infty$. Если все особенности являются фуксовыми, т.е. $r_\nu = 0$, $\nu = 1, \dots, n, \infty$, то можно для простоты положить $\varkappa = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Следуя работам [8] и [15], можно построить цепочку преобразований Шлезингера, приводящую к $x_0^{(\nu)} = \rho^{(\nu)} + l^{(\nu)}$ с постоянными $\rho^{(\nu)} \in \mathbb{C}^N$ и $l^{(\nu)} \in \mathbb{Z}^N$. Выбирая $\|l^{(\nu)}\|$ и δ^{-1} большими и сравнимыми, $\lim_{\delta \rightarrow +0} l^{(\nu)}\delta = t_0^{(\nu)} = \text{const}$, можем записать $x_0^{(\nu)} = \delta^{-1}t_0^{(\nu)} + \tau_0^{(\nu)}$, где $\tau_0^{(\nu)} \in \mathbb{C}^N$ является ограниченным при $\delta \rightarrow +0$ и

$$t_0^{(\nu)} \in \mathbb{R}^N. \quad (2.10)$$

Это позволяет интерпретировать $\text{Re}(t_0^{(\nu)})_{jj}$ как *дискретный* параметр деформации с шагом $\mathcal{O}(\delta)$ (см. ниже).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Скейлинговый параметр δ определяется с точностью до положительного множителя, что порождает произвол на множестве “медленных” переменных. Ниже предполагается, что этот скейлинговый произвол исключается нормировкой одного из нетривиальных “медленных” деформационных параметров.

2.2. Комплексный метод ВКБ. Напомним идею комплексного метода ВКБ, следуя в основном работам [12] и [13]. Рассмотрим (2.8) при $\delta \rightarrow 0$, предполагая, что коэффициенты ряда $B(\zeta)$ остаются ограниченными. Пусть T и Λ_0 – матрицы собственных векторов и собственных значений для $B(\zeta)$:

$$T^{-1}BT = \Lambda_0 = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_N). \quad (2.11)$$

Пусть $\mu_j \neq \mu_k$, $j \neq k$. Тогда формальное выражение

$$\Psi(\zeta) = T \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n T_n \exp \left\{ \delta^{-1} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \sum_{m=0}^{\infty} \delta^m \Lambda_m(\xi) d\xi \right\}, \quad T_0 = I, \quad (2.12)$$

удовлетворяет (2.8) при условии, что диагональные матрицы Λ_n и бездиагональные матрицы T_n , $n \geq 1$, являются решениями рекурсионных соотношений

$$\begin{aligned} [\Lambda_0, T_1] - \Lambda_1 &= T^{-1} \frac{dT}{d\lambda}, \\ [\Lambda_0, T_n] - \Lambda_n &= \sum_{m=1}^{n-1} T_{n-m} \Lambda_m + T^{-1} \frac{d(TT_{n-1})}{d\lambda}, \quad n \geq 2. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Пусть Γ – риманова поверхность алгебраической кривой

$$F(\zeta, \mu) := \det(B(\zeta) - \mu I) = 0. \quad (2.14)$$

Точки ветвления кривой (2.14) называются *точками поворота* для (2.8). Пусть $\mathcal{L}_0$ — *открытая* односвязная область, являющаяся комплексной ζ -плоскостью с проколами в особенностях $B(\zeta)$ и в точках поворота и разрезанная вдоль отрезков, связывающих особенности и точки поворота. Пусть $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}_0$ — *замкнутая* односвязная область. По построению $B(\zeta)$ голоморфна в $\mathcal{L}$, и уравнение (2.8) не имеет точек поворота в $\mathcal{L}$. Таким образом, все корни $\mu_j(\lambda)$ характеристического уравнения (2.14) отличны друг от друга и голоморфны в $\mathcal{L}$. Поэтому существует голоморфная неспециальная в $\mathcal{L}$ матрица $T(\zeta)$, которая диагонализует матрицу $B(\zeta)$, $T^{-1}BT = \Lambda_0 = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_N)$. Матрицы T , T^{-1} , Λ_n , T_n голоморфны и ограничены в $\mathcal{L}$ [12].

Рассмотрим редуцированную калибровочную матрицу

$$\mathcal{T}^{(m)} = T \sum_{n=0}^m \delta^n T_n, \quad T_0 = I, \quad (2.15)$$

где T_n определяются формулами (2.11)–(2.13) и $\zeta \in \mathcal{L}$. Матричная функция $\Phi^{(m)} = (\mathcal{T}^{(m)})^{-1} \Psi$ решает “почти диагональное” уравнение

$$\Phi_\zeta^{(m)} = \delta^{-1} B^{(m)} \Phi^{(m)}, \quad B^{(m)}(\zeta) = \sum_{n=0}^m \delta^n \Lambda_n + \delta^{m+1} R^{(m)}, \quad (2.16)$$

где $R^{(m)}(\zeta)$ голоморфна и ограничена при $\zeta \in \mathcal{L}$, если δ достаточно мало. Определим ВКБ-приближение для уравнения (2.16):

$$\Phi_{\text{ВКБ}}^{(m)}(\zeta) = e^{\theta(\zeta_0, \zeta)}, \quad \theta(\zeta_0, \zeta) = \delta^{-1} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \Lambda^{(m)} d\zeta, \quad \Lambda^{(m)} = \sum_{n=0}^m \delta^n \Lambda_n, \quad (2.17)$$

введем поправочную функцию $\chi^{(m)}$:

$$\Phi^{(m)}(\zeta) = \chi^{(m)}(\zeta) \Phi_{\text{ВКБ}}^{(m)}(\zeta), \quad (2.18)$$

и обозначения

$$\begin{aligned} \mu_{ij} &= \mu_i - \mu_j, \quad \theta_{ij}(\xi, \zeta) = (\theta(\xi, \zeta))_{ii} - (\theta(\xi, \zeta))_{jj}, \\ \hat{\theta}_{ij}(\xi, \zeta) &= \theta_{ij}(\xi, \zeta) - \delta^{-1} \int_{\xi}^{\zeta} \mu_{ij}(s) ds. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Контур $\gamma_{ij}(\zeta) \subset \mathcal{L}$, связывающий конечную или бесконечную точку ζ_{ij} с ζ , называется (i, j) -каноническим путем, если

$$\text{Re} \int_{\xi}^{\zeta} \mu_{ij}(s) ds \leq 0 \quad \forall \xi \in \gamma_{ij}(\zeta). \quad (2.20)$$

Замкнутая односвязная область $\mathcal{C}_{ij} \subset \mathcal{L}$ называется (i, j) -канонической, если существует такая точка $\zeta_{ij} \in \mathcal{C}_{ij}$, что контур $\gamma_{ij}(\zeta) \subset \mathcal{C}_{ij}$, связывающий ζ_{ij} с любой заданной точкой $\zeta \in \mathcal{C}_{ij}$, гомотопно эквивалентен каноническому пути. Замкнутая односвязная область $\mathcal{C}$ называется канонической, если она является (i, j) -канонической для всех $i, j = 1, \dots, N$, $i \neq j$.

Используя аргументы из работы [12], получаем таким образом следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $\mathcal{C} \subset \mathcal{L}$ – каноническая область. Если

$$\int_{\gamma_{ij}(\zeta)} e^{\operatorname{Re} \theta_{ij}(\xi, \zeta)} |(R^{(m)}(\xi))_{ij}| \cdot |d\xi| < \infty$$

для всех $i, j = 1, \dots, N$, $\zeta \in \mathcal{C}$, то существуют такие положительные постоянные C и δ_0 , что

$$\|\chi^{(m-1)}(\zeta) - I\| \leq C|\delta|^m \quad (2.21)$$

для всех $\zeta \in \mathcal{C}$, $\delta \in (0, \delta_0]$.

В частности, $\chi^{(0)}(\zeta) = I + \mathcal{O}(\delta)$.

Для построения канонической области, содержащей заданную точку $\zeta_0 \in \mathcal{L}$, рассмотрим пару вида $i, j \in \{1, \dots, N\}$, $i \neq j$, и введем отрезок $\ell_{ij} \subset \mathcal{L}$ (i, j) -антистоксовой линии уровня, проходящей через ζ_0 :

$$\ell_{ij} = \left\{ \zeta \in \mathcal{L}: \operatorname{Im} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \mu_{ij}(s) ds = 0 \right\}. \quad (2.22)$$

Выберем две точки $\zeta_{ij}, \zeta_{ji} \in \ell_{ij}$ так, чтобы $\zeta_0 \in [\zeta_{ij}, \zeta_{ji}]$ и для любой $\zeta \in \ell_{ij}$, разделяющей ζ_{ij} и ζ_{ji} , криволинейный отрезок $[\zeta_{ij}, \zeta] \subset \ell_{ij}$ являлся (i, j) -каноническим путем, а $[\zeta_{ji}, \zeta] \subset \ell_{ij}$ являлся (j, i) -каноническим путем. Введем отрезок $\ell_{ij}^* \subset \mathcal{L}$ (i, j) -стоксовой линии уровня, проходящей через точку $\zeta^* \in [\zeta_{ij}, \zeta_{ji}] \subset \ell_{ij}$:

$$\ell_{ij}^* = \left\{ \zeta \in \mathcal{L}: \operatorname{Re} \int_{\zeta^*}^{\zeta} \mu_{ij}(s) ds = 0 \right\}. \quad (2.23)$$

По построению объединение $\mathcal{C}_{ij}$ всех криволинейных отрезков ℓ_{ij}^*

$$\mathcal{C}_{ij} = \bigcup_{\zeta^* \in [\zeta_{ij}, \zeta_{ji}]} \ell_{ij}^* \quad (2.24)$$

является (i, j) -и (j, i) -канонической областью. Граница построенной (i, j) -канонической области $\mathcal{C}_{ij}$ образована (i, j) -стоксовыми линиями уровня, проходящими через точки ζ_{ij} и ζ_{ji} , и частично границей области $\mathcal{L}$. Стоит заметить, что вблизи нерегулярных особенностей уравнения (2.8) (i, j) -каноническую область $\mathcal{C}_{ij}$ можно продолжить за границу $\mathcal{L}$ так, чтобы заполнить определенный сектор в комплексной ζ -плоскости, называемый (i, j) -стоксовым сектором.

Каноническая область $\mathcal{C} \ni \zeta_0$, в которой верна теорема 2.1, является пересечением указанных (i, j) -канонических областей $\mathcal{C}_{ij}$:

$$\mathcal{C} = \bigcap_{\substack{i, j \in \{1, \dots, N\} \\ i \neq j}} \mathcal{C}_{ij}. \quad (2.25)$$

Из приведенной выше конструкции следует, что любую замкнутую односвязную область $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}_0$ можно покрыть конечным числом пересекающихся канонических областей $\mathcal{C}^{(k)}$, $k = 1, \dots, K$, поскольку обратное предположение легко приводит к противоречию.

3. МОДУЛЯЦИЯ СПЕКТРАЛЬНОЙ КРИВОЙ

Решения уравнения Лакса $dB = [\omega, B]$ обычно интерпретируются как приближенные решения (2.9) при $\delta \rightarrow 0$ [16]. Дополненное задачей для собственных значений (2.11), уравнение Лакса составляет основу для алгебро-геометрического интегрирования “солитонных” уравнений. Однако в теории “солитонных” дифференциальных уравнений с частными производными спектральная кривая (2.14) определяется начальными данными, тогда как в контексте изомонодромных деформаций она определяется исходным λ -уравнением (2.1). Более того, спектральная кривая для типичного “солитонного” уравнения является точным интегралом движения, тогда как в изомонодромном случае кривая варьирует:

$$d(\ln \det(B - \mu I)) = \delta \operatorname{Tr} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \zeta} (B - \mu I)^{-1} \right) \neq 0.$$

Ниже мы точно опишем зависимость алгебраической кривой (2.14) от “медленных” переменных при $\delta = 0$. Нижний индекс “as” будет обозначать соответствующие объекты при $\delta = 0$.

Назовем кривую (2.14) *сингулярной*, если ее топологические свойства при всех достаточно малых $\delta \neq 0$ отличаются от таковых при $\delta = 0$. При заданной параметризации кривой определим *дискриминантное множество* $\mathfrak{S}$ в тотальном пространстве параметров $\mathfrak{P}$ как множество, определяющее сингулярную кривую. Пусть также $\mathfrak{F}$ – объединение гиперплоскостей $b^{(\nu)} = b^{(\rho)}$, $\nu \neq \rho$, $(t_{-r_\nu}^{(\nu)})_{ii} = (t_{-r_\nu}^{(\nu)})_{jj}$, $i \neq j$, $(t_{-r_\nu}^{(\nu)})_{kk} = 0$, соответствующих фиксированным особенностям, имеющимся в (2.9) при $\delta = 0$. Ниже всегда будем предполагать, что наши параметры деформации удалены от фиксированных особенностей $\mathfrak{F}$.

Дифференциал $\mu_{\text{as}}(\zeta) d\zeta$, как и его производные по $b^{(\nu)}$ и по элементам $t_{-k}^{(\nu)}$, $k = 0, \dots, r_\nu$, $\nu = 1, \dots, n, \infty$, мероморфны на римановой поверхности Γ_{as} кривой. Параметры $b^{(\nu)}, t_{-k}^{(\nu)}$ вместе полностью определяют сингулярную часть дифференциала $\mu_{\text{as}}(\zeta) d\zeta$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Параметр D_j называется *модулярным*, если и только если дифференциал

$$\frac{\partial}{\partial D_j} \mu_{\text{as}}(\zeta) d\zeta$$

является голоморфным на римановой поверхности Γ_{as} .

Таким образом, $\mathfrak{P} = \mathfrak{T} \otimes \mathfrak{D}$, где $\mathfrak{T}$ – подпространство параметров деформации $\mathbf{t} = (t, \operatorname{Re} \alpha)$ (см. замечание 2.3 и условие (2.3)), а $\mathfrak{D}$ – подпространство остальных параметров $\mathbf{D} = (D, \operatorname{Im} \alpha)$.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $(\mathbf{t}_0, \mathbf{D}_0) \in \mathfrak{P} \setminus \mathfrak{S}$. Тогда существует открытая окрестность $\mathcal{U} \subset \mathfrak{T} \setminus \mathfrak{F}$ точки $\mathbf{t}_0$ такая, что для любого замкнутого пути ℓ на римановой

поверхности Γ_{as} с проколами в точках $b^{(\nu)}$, $\nu = 1, \dots, n, \infty$,

$$J_\ell(\mathbf{t}, \mathbf{D}) := \operatorname{Re} \oint_\ell \mu_{\text{as}}(\zeta) d\zeta = h_\ell \quad (3.1)$$

для всех $\mathbf{t} \in \mathcal{U}$, где $h_\ell = J_\ell(\mathbf{t}_0, \mathbf{D}_0) = \text{const}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\ell_\zeta = \pi(\ell)$ – проекция замкнутого пути $\ell \subset \Gamma$ с началом в точке (ζ_0, μ_0) на проколотую комплексную ζ -плоскость. Пусть целое число m_0 выбрано так, что $m_0 \ell_\zeta$ имеет замкнутое поднятие $\hat{\ell}$ на Γ для всех ветвей $\mu(\zeta_0)$. Рассмотрим аналитическое продолжение ВКБ-приближения (2.12) вдоль $\hat{\ell}$. Проекция $\pi(\hat{\ell}) = m_0 \ell_\zeta$ накрывается конечным числом пересекающихся канонических областей $\mathcal{C}_k$, $k = 1, \dots, s$, $\mathcal{C}_{s+1} = \mathcal{C}_1$, в каждой из которых (2.12) равномерно по ζ приближает точное решение $\Psi_k(\zeta)$ уравнения (2.8). Поскольку $\Psi_{k+1}(\zeta) = \Psi_k(\zeta)G_k$, где G_k не зависит ни от ζ , ни от $\mathbf{t} \in \mathfrak{T} \setminus \mathfrak{F}$, получаем

$$\mathcal{M}_{\hat{\ell}}(\Psi_{s+1}(\zeta)) = \Psi_1(\zeta)M_{\hat{\ell}}G_1 \dots G_s,$$

где $\mathcal{M}_{\hat{\ell}}$ – оператор аналитического продолжения вдоль $m_0 \ell_\zeta$, а $M_{\hat{\ell}}$ – матрица монодромии для $\Psi_1(\zeta)$ вдоль $m_0 \ell_\zeta$. Используя наше ВКБ-приближение для $\Psi_1(\zeta)$ и $\Psi_{s+1}(\zeta)$, находим

$$\exp \left\{ \delta^{-1} \oint_{\hat{\ell}} \Lambda(\zeta) d\zeta \right\} = (I + \mathcal{O}(\delta))G(\delta). \quad (3.2)$$

Поскольку кривая является несингулярной, правая часть (3.2) сохраняется, пока $\mathbf{t}$ остается в окрестности $\mathbf{t}_0$. Приравнявая главные порядки левой части для (3.2) при $\mathbf{t}_0$ и близлежащих точек $\mathbf{t}$, получаем (3.1).

Из теоремы 3.1 немедленно вытекает

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Пусть $\mathcal{U} \subset \mathfrak{T} \setminus \mathfrak{F}$ – открытая область и пусть выполнено (3.1). Если кривая $F(\zeta, \mu) = 0$ остается несингулярной в граничной точке $\mathbf{t}_1 \in \partial \mathcal{U}$, то существует открытая область $\mathcal{W} \subset \mathfrak{T} \setminus \mathfrak{F}$ такая, что $\mathcal{U} \subset \mathcal{W}$, $\mathbf{t}_1 \in \mathcal{W}$, и (3.1) верно для всех $\mathbf{t} \in \mathcal{W}$.

Для дальнейшего полезно следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Для любого замкнутого пути ℓ на Γ_{as} , проколотой над $b^{(\nu)}$, $\nu = 1, \dots, n, \infty$, интеграл $J_\ell(\mathbf{t}, \mathbf{D})$ непрерывен по $(\mathbf{t}, \mathbf{D})$ вне фиксированных особенностей $\mathfrak{F}$, имеющих в (2.9), и является дифференцируемым по $(\mathbf{t}, \mathbf{D})$ вне дискриминантного множества $\mathfrak{S}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку контур ℓ является конечным, непрерывность $J_\ell(\mathbf{t}, \mathbf{D})$ следует из непрерывности $\mu_{\text{as}}(\zeta)$. Если точка $(\mathbf{t}_0, \mathbf{D}_0)$ расположена вне дискриминантного множества $\mathfrak{S}$, то существует такая открытая окрестность $\mathcal{V}$ точки $(\mathbf{t}_0, \mathbf{D}_0)$, что спектральная кривая (2.14) не вырождается при любых $(\mathbf{t}, \mathbf{D}) \in \mathcal{V}$. Тогда дифференцируемость $J_\ell(\mathbf{t}, \mathbf{D})$ в $(\mathbf{t}_0, \mathbf{D}_0)$ следует из непрерывной дифференцируемости $\mu_{\text{as}}(\zeta)$.

Из теоремы 3.1 и предложения 3.1 получаем

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Пусть $\mathcal{U}, \widehat{\mathcal{U}} \subset \mathfrak{T} \setminus \mathfrak{F}$ – смежные открытые области и пусть $(\partial\mathcal{U} \cap \partial\widehat{\mathcal{U}}) \subset \mathfrak{T} \setminus \mathfrak{F}$ не пусто. Если $J_\ell(\mathbf{t}, \mathbf{D}) = h_\ell$ для всех $\mathbf{t} \in \mathcal{U}$ и $J_\ell(\mathbf{t}, \mathbf{D}) = \hat{h}_\ell$ для всех $\mathbf{t} \in \widehat{\mathcal{U}}$, то $h_\ell = \hat{h}_\ell$.

В соответствии со следствиями 3.1 и 3.2, если спектральная кривая (2.14) несингулярна в начальной точке $(\mathbf{t}_0, \mathbf{D}_0)$, то модуляционное уравнение (3.1) выполнено в области $\mathcal{U}$, ограниченной точками, где спектральная кривая становится сингулярной. Применимость (3.1) к частному решению уравнений (2.9) за пределами этой границы зависит от некоторых тонких деталей начальных данных или, что эквивалентно, деталей соответствующих данных монодромии изомонодромной системы (2.8), (см. работу [2] и раздел 4 ниже).

Обсудим теперь существование такой функции $\mathbf{D}(\mathbf{t})$, что $J_\ell(\mathbf{t}, \mathbf{D}(\mathbf{t})) \equiv \text{const}$. Варьируя контур ℓ из (3.1), получаем систему уравнений $J_{\ell_j} = h_j$, где множество контуров ℓ_j образует базис гомологий римановой поверхности кривой Γ_{as} , проколотой над $b^{(\nu)}$. Например, беря в качестве ℓ малую окружность c_ν вокруг $(b^{(\nu)}, \mu_j(b^{(\nu)}))$, находим

$$\text{Im}(t_0^{(\nu)})_{jj} = -\frac{1}{2\pi} h_{c_\nu}^{(j)} = \text{const}, \quad (3.3)$$

что содержит (2.10) как частный случай при $h_{c_\nu}^{(j)} = 0$.

Для дальнейшего обсуждения (3.1) удобно наложить условия (3.3) и удалить $(N-1)(n+1)$ малых окружностей из “достаточного” набора контуров. Оставшиеся циклы ℓ_j , $j = 1, \dots, 2g$, образуют базис гомологий для Γ_{as} . Кроме того, используя (3.3), исключим постоянные параметры $\text{Im} t_0^{(\nu)}$ из множества неизвестных и будем предполагать, что пространство $\mathfrak{D}$ является g -мерным комплексным пространством модулярных параметров.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $(\mathbf{t}_0, D_0) \in \mathfrak{P} \setminus \mathfrak{S}$. Тогда в открытой окрестности $\mathcal{U} \subset \mathfrak{T} \setminus \mathfrak{F}$ точки $\mathbf{t}_0$ система (3.1), где ℓ пробегает базис гомологий $\{\ell_j\}_1^{2g}$ поверхности Γ_{as} , определяет единственную дифференцируемую в вещественном смысле комплексную вектор-функцию $D(\mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}})$ такую, что $D(\mathbf{t}_0, \bar{\mathbf{t}}_0) = D_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 3.1 и предложения 3.1 следует, что $J_{\ell_j}(\mathbf{t}, D)$ являются первыми интегралами вполне интегрируемой пфафовой системы $dJ = 0$:

$$\omega \begin{pmatrix} dD \\ d\bar{D} \end{pmatrix} = -\Omega \begin{pmatrix} d\mathbf{t} \\ d\bar{\mathbf{t}} \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

где ω и Ω – матрицы частичных производных $J_{\ell_j}(\mathbf{t}, D)$ по элементам векторов $D, \bar{D}$ и $\mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}$, соответственно. Черта здесь обозначает комплексное сопряжение. Пусть постоянная c_1 – определитель преобразования от естественного базиса $\{\partial(\mu_{\text{as}}) d\zeta / \partial D_j\}_{j=1}^g$ к

базису нормированных голоморфных дифференциалов и пусть $\widehat{B}$ – матрица B -периодов нормированных голоморфных дифференциалов. Поскольку

$$\omega = \begin{pmatrix} A & \bar{A} \\ B & \bar{B} \end{pmatrix}$$

– матрица A - и B -периодов голоморфных дифференциалов и их комплексно-сопряженных, $\det \omega = (-2i)^g |c_1|^2 \det(\operatorname{Im} \widehat{B}) \neq 0$. Таким образом, матрица ω обратима, пока кривая $F(\zeta, \mu) = 0$ остается несингулярной, и поэтому интегральное многообразие для (3.4) хорошо параметризовано параметрами деформации $(t, \bar{t}, \operatorname{Re} \alpha)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Если $h_{\ell_j} = J_{\ell_j}(\mathbf{t}_0, D_0) \neq 0$, то цикл ℓ_j не может стянуться, и окруженные ℓ_j точки ветвления не могут слиться. Таким образом, спектральная кривая остается несингулярной вдоль интегрального многообразия для (3.4) при условии, что $h_{\ell_j} \neq 0$ для всех $j = 1, \dots, 2g$. Это наблюдение обеспечивает применимость (3.1), (3.4) и существование $D(\mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}})$ в любой связной области $\mathcal{U} \subset \mathfrak{T} \setminus \mathfrak{F}$, содержащей начальную точку $\mathbf{t}_0$.

Пусть $J_\ell(\mathbf{t}, \mathbf{D})$ из (3.1) обращаются в нуль для *всех* замкнутых путей $\ell \subset \Gamma_{\text{as}}$:

$$\operatorname{Re} \oint_{\ell} \mu_{\text{as}}(\zeta) d\zeta = 0. \quad (3.5)$$

Эта система имеет смысл независимо от выбора начальной точки, поскольку нет необходимости фиксировать базис в гомологиях. Она традиционно называется *системой Бутру*. Напомним, что система (3.5) может быть не применима к частному решению уравнений (2.9) в некоторых секторах в $\mathfrak{P} \setminus \mathfrak{S}$, несмотря на то что сама система Бутру имеет смысл во всем пространстве параметров $\mathfrak{P}$ (с использованием предложения 3.1 система (3.5) в точках дискриминантного множества $\mathfrak{S}$ интерпретируется как продолжение из $\mathfrak{P} \setminus \mathfrak{S}$).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. При пересечении интегрального многообразия для (3.5) и дискриминантного множества $\mathfrak{S}$ по крайней мере один из циклов ℓ_j стягивается, и соответствующее вещественное уравнение (3.5) становится тривиальным, заменяясь комплексным условием слияния двух точек ветвления. Таким образом, вообще говоря, пересечение интегрального многообразия для (3.5) с $\mathfrak{S}$ имеет $\operatorname{codim}_{\mathbb{R}} = 1$ в пространстве параметров деформации.

ТЕОРЕМА 3.3. *Существует единственное решение $D(\mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}})$ системы Бутру (3.5).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приведем здесь набросок доказательства.

Единственность. При заданном $\mathbf{t}$ два решения D и D' определяют два дифференциала $\mu_{\text{as}} d\zeta$ и $\mu'_{\text{as}} d\zeta$, мероморфные на соответствующих римановых поверхностях Γ_{as} и Γ'_{as} . Разность $\phi = (\mu_{\text{as}} - \mu'_{\text{as}}) d\zeta$ является голоморфной на накрывающей римановой

поверхности $\mathcal{G}_{\text{as}}$, и $\text{Re } \oint_{\ell} \phi = 0$ для всех замкнутых путей $\ell \subset \mathcal{G}_{\text{as}}$. Однако дифференциалов ϕ с таким свойством нет.

Существование. Выберем точку $(\mathbf{t}_0, D_0) \in \mathfrak{P} \setminus \mathfrak{S}$ таким образом, чтобы $h_j^{(0)} = J_{\ell_j}(\mathbf{t}_0, D_0) \neq 0$ для всех контуров ℓ_j из базиса гомологий $\{\ell_j\}_1^{2g}$. Рассмотрим расширение системы (3.4), в котором $2g$ вещественных параметров $h = (h_1, \dots, h_{2g})^T$ добавлены к множеству независимых переменных:

$$\omega \left(\frac{dD}{d\bar{D}} \right) = -\Omega \left(\frac{dt}{d\bar{t}} \right) + dh.$$

Применяя аргументы, использованные в доказательстве теоремы 3.2 и принимая во внимание замечание 3.1, устанавливаем существование функции $D(\mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}, h)$ для всех $\mathbf{t} \in \mathcal{U} \subset \mathfrak{T} \setminus \mathfrak{F}$ и таких h , что $h_j \text{sgn}(h_j^{(0)}) > 0$, $j = 1, \dots, 2g$. Предположение о том, что $D(\mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}, h)$ не ограничена при $h \rightarrow 0$, приводит к противоречию. Из ограниченной последовательности $D^{(k)} = D(\mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}}, h^{(k)})$, $h^{(k)} \rightarrow 0$, выделим сходящуюся подпоследовательность: $\lim_{m \rightarrow \infty} D^{(k_m)} = D^*$. Тогда непрерывность интегралов $J_{\ell_j}(\mathbf{t}, D)$ по D дает $J_{\ell_j}(\mathbf{t}, D^*) = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Предполагая, что данные монодромии системы (2.8) находятся в общем положении и не зависят от скейлингового параметра δ^{-1} или что эта зависимость является достаточно слабой, можно доказать, что соответствующая спектральная кривая удовлетворяет системе Бутру (3.5). Здесь мы не доказываем это утверждение (см. в работе [2] дальнейшие подробности и доказательство этого утверждения в случае $N = 2$).

4. МОДУЛЯЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ И АСИМПТОТИКИ БИОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Модуляционные уравнения (3.1) и (3.5) для классических уравнений Пенлеве изучались в работах [2], [17]. Здесь мы отметим, что линейные ОДУ, связанные с классическими уравнениями Пенлеве [3]–[5], как и подобные уравнения, связанные с квазиклассическими ортогональными многочленами, имеют матричную размерность 2×2 [8] и, таким образом, все соответствующие спектральные кривые являются (гипер)эллиптическими. В данном разделе обсуждается спектральная кривая для (3×3) -матричного линейного ОДУ, которое появляется в теории биортогональных многочленов [9], [10] с кубическими потенциалами [18]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_n}{\partial \lambda}(\lambda) &= A_n(\lambda) \Psi_n(\lambda), & \Psi_{n+1}(\lambda) &= R_n(\lambda) \Psi_n(\lambda), \\ \frac{\partial \Psi_n}{\partial x} &= U_n(\lambda) \Psi_n, & \frac{\partial \Psi_n}{\partial y} &= V_n(\lambda) \Psi_n, & \frac{\partial \Psi_n}{\partial t} &= W_n(\lambda) \Psi_n, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где

$$R_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{\lambda - a_{n,n}}{a_{n,n+1}} & -\frac{a_{n,n-1}}{a_{n,n+1}} & -\frac{a_{n,n-2}}{a_{n,n+1}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_n(\lambda) = -D_{n,n+2}R_{n+1}(\lambda)R_n(\lambda) - D_{n,n+1}R_n(\lambda) - D_{n,n} - D_{n,n-1}R_{n-1}^{-1}(\lambda),$$

$$D_{n,m} = t \operatorname{diag}(b_{n,m}, b_{n-1,m-1}, b_{n-2,m-2}).$$

Дальнейшие подробности можно найти в работе [18], где сформулирована задача Римана–Гильберта для $\Psi_n(\lambda)$. Фиксированные особенности соответствующей вполне интегрируемой системы отвечают бесконечным значениям параметров деформации x, y, t , а также $t = 0$. В интересующем нас здесь случае формальные показатели монодромии для точки $\lambda = \infty$, которая является единственной сингулярной точкой λ -уравнения (4.1), равны $n, -n/2, -n/2$. Асимптотики $\Psi_n(\lambda)$ при $n \rightarrow \infty$ имеют важное значение для теории связанных случайных матриц. Из скейлинговых замен (2.6) при $\varkappa = -1/r_\infty = -1/3$ и замечания 2.4 следует

$$\begin{aligned} \lambda &= \delta^{-1/3}\zeta, & x &= \delta^{-2/3}(x_0 + \delta x_1), \\ y &= \delta^{-2/3}(y_0 + \delta y_1), & t &= \delta^{-1/3}(t_0 + \delta t_1), & n &= \delta^{-1}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

что приводит к системе (2.8) со спектральной кривой

$$F(\zeta, \mu) = \mu^3 - t_0^3 \zeta^3 + \mu^2 \zeta^2 + x_0 \mu^2 + y_0 t_0^2 \zeta^2 - (t_0^3 - 1) \mu \zeta - \mu D_1 - \zeta D_2 - D_3 + \mathcal{O}(\delta) = 0. \quad (4.3)$$

Вообще говоря, эта кривая имеет 10 точек ветвления первого порядка и поэтому, по формуле Римана–Гурвица, ее род $g = 3$. Поскольку данные монодромии для $\Psi_n(\lambda)$ не зависят от n, x, y, t , кривая (4.3) для решения уравнения (4.1) в общем положении удовлетворяет (3.5), (см. замечание 3.3). По теореме 3.3 при заданных x_0, y_0, t_0 система (3.5) однозначно определяет модулярные параметры D_j , $j = 1, 2, 3$.

Анализ (3.5) оказывается значительно более сложным, чем аналогичный анализ для эллиптических кривых, связанных с классическими уравнениями Пенлеве (см. [17]). Здесь мы приведем результаты численного исследования интегрального подмногообразия для системы (3.5), параметризованного посредством $x_0 \in \mathbb{C}$ при $y_0 = \bar{x}_0$ и $t_0 = 1$, выполненного с помощью пакета MATLAB 6.1.

Граф на комплексной x_0 -плоскости, показанный на рисунке, где изображена проекция интегрального подмногообразия $y_0 = \bar{x}_0$, $t_0 = 1$ для (3.5) на плоскость x_0 , разделяет области с различными топологическими свойствами соответствующих графов Стокса. А именно, некоторые из циклов ℓ_j , существующие в соседних областях, стягиваются в точки на их общей границе. Наше численное исследование показывает, что

в точках самой центральной треугольной области на рисунке кривая (4.3), подчиненная условиям (3.5), имеет род $g = 0$, и соответствующий граф Стокса не противоречит данным задачи Римана–Гильберта из [18]. Из последнего наблюдения следует применимость (3.5) к асимптотическому анализу Ψ -функции для биортогональных многочленов. В частности, типичная конфигурация точек ветвления, следующая из (3.5), подсказывает, что при $x_0 \neq 0$ асимптотика для $\Psi_n(\lambda)$ включает в некоторых областях комплексной λ -плоскости экспоненциальную функцию, функцию Эйри и функцию параболического цилиндра. Для x_0 на границе центральной треугольной области на рисунке асимптотика включает также Ψ -функцию, связанную с первым трансцендентом Пенлеве. При $x_0 = 0$, кроме экспоненты и функции Эйри, асимптотическое описание требует также специальной функции третьего порядка. Для значений x_0 вне этой треугольной области соответствующие графы Стокса не выглядят согласованными с данными задачи Римана–Гильберта из [18]. Поэтому маловероятно, чтобы при x_0 вне центральной треугольной области система (3.5) была применима к асимптотике биортогональных многочленов. Подробное описание асимптотики биортогональных многочленов, однако, выходит за рамки данной работы и будет рассмотрено отдельно.

Благодарности. Работа частично поддержана со стороны EPSRC и РФФИ (грант № 02-01-00268). Автор благодарит А. Р. Итса за замечания, Т. Граву за обсуждения и А. С. Фокаса за поддержку. Автор благодарен также коллективу DAMTP, Кембриджский университет, за гостеприимство во время его визита, когда была выполнена данная работа.

Список литературы

- [1] Э. Л. Аймс. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков: ДНТБУ, 1939.
- [2] A. A. Караев. CRM Proc. Lect. Notes. 2002. V. 32. P. 157–179; nlin.SI/0105002.
- [3] M. Jimbo, T. Miwa, K. Ueno. Physica D. 1981. V. 2. P. 306–352.
- [4] H. Flaschka, A. C. Newell. Commun. Math. Phys. 1980. V. 76. P. 65–116.
- [5] A. R. Its, V. Yu. Novokshenov. Lecture Notes in Mathematics V. 1191. Berlin–Heidelberg–New York–Tokyo: Springer, 1986.
- [6] M. L. Mehta. Random matrices. New York–London: Academic Press, 1967.
- [7] P. Nevai. J. Approx. Theory. 1986. V. 48. P. 3–167.
- [8] A. P. Имс, A. B. Кутаев, A. C. Фокас. УМН. 1990. Т. 45. № 6. С. 135–136; A. S. Fokas, A. R. Its, A. V. Kitaev. Commun. Math. Phys. 1991. V. 142. P. 313–344; 1992. V. 147. P. 395–430.
- [9] N. M. Ercolani, K. T.-R. McLaughlin. Physica D. 2001. V. 152–153. P. 232–268.
- [10] M. Bertola, B. Eynard, J. Harnad. Commun. Math. Phys. 2002. V. 229. P. 73–120; nlin.SI/0108049.
- [11] P. Zinn-Justin. Nucl. Phys. B. 2002. V. 634. P. 417–432; math-ph/0202045.
- [12] М. В. Федорюк. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983.
- [13] В. Вазов. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968.
- [14] М. В. Федорюк. Дифф. уравнения. 1986. Т. 22. С. 961–967.
- [15] M. Jimbo, T. Miwa. Physica D. 1981. V. 2. P. 407–448; V. 4. P. 26–46.
- [16] R. Garnier. Ann. Sci. Ecole Norm. Super. 1917. V. 34. P. 239–253; H. Flaschka, A. C. Newell. Physica D. 1981. V. 3. P. 203–221.
- [17] A. A. Караев. Зап. научн. семин. ПОМИ. 1994. Т. 209. С. 60–101; A. A. Караев. Scaling limits in the fourth Painlevé transcendent. PDMI Preprint 15/1996; Discriminant set for the scaling limits in the third Painlevé transcendent. PDMI Preprint 21/1997.
- [18] A. A. Караев. J. Phys. A. 2003. V. 36. P. 4629–4640; nlin.SI/0207036.