Общероссийский математический портал

Ф. Магри, Цепи Лена́рда для классических интегрируемых систем, *ТМФ*, 2003, том 137, номер 3, 424–432

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf282>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 13:25:28

© 2003 г.

Ф. Магри*

ЦЕПИ ЛЕНАРДА ДЛЯ КЛАССИЧЕСКИХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ

Неожиданная роль цепей Ленарда в теории классических интегрируемых систем продемонстрирована на простом примере.

Ключевые слова: цепи Ленарда, интегрируемые системы, гамильтонова механика, оператор рекурсии.

1. ВВЕДЕНИЕ

Концепция оператора рекурсии возникла в теории солитонных уравнений. Как правило, оператор рекурсии рассматривается как удобное средство для построения иерархии законов сохранения, связанной обычно с этими уравнениями. Эти иерархии не играли до сих пор никакой роли в теории классических интегрируемых систем. Поэтому естественно поставить под сомнение роль оператора рекурсии в классических задачах.

Цель этой короткой заметки состоит в том, чтобы опровергнуть данное впечатление и показать, что концепция цепей Ленарда, понимаемая надлежащим образом, может играть важную роль в классической гамильтоновой механике. Основная идея заключается в том, что интегралы движения для многих классических систем, таких как система Неймана или волчок Ковалевской, естественным образом организованы в цепи, которые могут быть построены при помощи некоторого итеративного процесса. Наша цель здесь — объяснить если не происхождение, то существо этого процесса.

Открытие этого итеративного процесса явилось итогом длительного изучения геометрии систем, допускающих разделение переменных (разделимых систем), которое не будет обсуждаться в данной работе. При этом нам, к сожалению, не удастся увидеть глубинные корни рассматриваемого процесса, но зато наше изложение будет ясным и кратким.

План работы достаточно прост. В разделе 2 концепция оператора рекурсии рассматривается в несколько более определенном и математически точном виде, чем это обычно принято. В разделе 3 вводится подходящее обобщение концепции цепей Ленарда.

*Dipartimento di Matematica ed Applicazioni, Università di Milano Bicocca, Via degli Arcimboldi 8, 20126 Milan, Italy. E-mail: magri@matapp.unimib.it

В разделе 4 цепь Ленарда используется для построения интегралов движения Уленбека–Девани, которые играют значимую роль в теории геодезического потока в $\mathbb{R}^n$ и в теории систем Неймана. Мы могли бы выбрать для рассмотрения и другие более сложные примеры. Единственной причиной нашего выбора явилось желание сохранить простой и краткий стиль изложения.

2. ОПЕРАТОР РЕКУРСИИ

Концепция оператора рекурсии является более тонкой, чем обычно принято считать. В данном разделе концепция оператора рекурсии будет подробно представлена в контексте классической гамильтоновой механики. Рассмотрим $2n$ -мерное симплектическое многообразие (M, ω) и линейный эндоморфизм $N: TM \rightarrow TM$ на его касательном расслоении. Кручение эндоморфизма N обычно определяется как векторнозначная 2-форма $T_N: TM \times TM \rightarrow TM$, заданная выражением

$$T(X, Y) = [NX, NY] - N[NX, Y] - N[X, NY] + N^2[X, Y]$$

для любой пары векторных полей X и Y на многообразии M . Если кручение обращается в нуль, N называется *тензором Нийенхейса*. Для нас особенно важным является действие N на дифференциальные формы. Имеются два различных действия. Первое действие алгебраическое. Как любой эндоморфизм, действующий на векторные поля, N действует на 1-формы по правилу $N^*(\alpha)(X) = \alpha(NX)$.

С известными предосторожностями это действие может быть так же распространено на 2-формы. Обозначим через $\omega' = \omega \circ N$ билинейную форму вида

$$\omega'(X, Y) = \omega(NX, Y).$$

Здесь необходима осторожность, поскольку ω' , вообще говоря, не является более 2-формой: она может не быть антисимметричной. Поэтому удобно говорить, что эндоморфизм N алгебраически согласован с ω , если требование антисимметричности выполнено и ω' является 2-формой. Далее мы всегда неявно предполагаем выполнение данного условия.

Второе действие тензора Нийенхейса N на формы менее очевидно. Это скорее дифференциальное, чем алгебраическое действие. Хотя оно может быть описано исключительно во внутренних терминах, мы предпочитаем дать его координатное описание, которое ближе к тому, как эта операция используется на практике. Пусть x^j — некоторая система координат на многообразии M , а N_k^j — компоненты тензора N в этих координатах. С помощью этих компонент определим новый дифференциал $d_N x^j$ для координатных функций, положив

$$d_N x^j = N_k^j dx^k.$$

Эта операция естественно распространяется на произвольные функции $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ следующим образом:

$$d_N f = \frac{\partial f}{\partial x^j} d_N x^j.$$

Операция распространяется далее на 1-формы $\alpha = \alpha_j dx^j$ стандартным образом; используя правило Лейбница, получаем

$$d_N \alpha = d_N \alpha_j \wedge dx^j + \alpha_j d_N dx^j.$$

Нам необходимо правило для вычисления $d_N dx^j$. Вот это правило:

$$d_N dx^j = -dd_N x^j.$$

Наконец, операция распространяется на формы высших порядков аналогичным образом. Итог нашего рассмотрения заключается в том, что с любым тензором Нийенхейса N на многообразии TM связан некоторый дифференциальный оператор d_N , который действует на формы, является оператором следующего, более высокого порядка, антикоммутирует с обычным оператором d ,

$$d \circ d_N + d_N \circ d = 0,$$

и удовлетворяет основному условию

$$d_N^2 = 0.$$

Этот оператор определяет еще одну когомологию на формах на многообразии M . Концепция цепей Ленада происходит из изучения этой когомологии.

Другое применение состоит в том, чтобы определить понятия ωN -многообразия и оператора рекурсии на ωN -многообразии. Будем говорить, что N согласован с симплектической 2-формой ω , если ω' является 2-формой и $d_N \omega$ обращается в нуль.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Оператор рекурсии на симплектическом многообразии – это тензор Нийенхейса, согласованный с симплектической 2-формой ω . В этом случае многообразие (M, ω, N) называется ωN -многообразием.

Простое следствие определения 1 состоит в том, что характеристический многочлен оператора N является квадратом многочлена

$$\Delta(\lambda) = \lambda^n - (p_1 \lambda^{n-1} + \dots + p_n)$$

степени n . Во избежание безынтесных ситуаций нужно потребовать, чтобы этот многочлен имел различные корни в некотором открытом плотном множестве в M , называемом множеством регулярных точек ωN -многообразия. В этом множестве $\Delta(\lambda)$ является минимальным многочленом оператора N .

3. ЦЕПИ ЛЕНАРДА

Прежде всего напомним, используя принятую терминологию, определение цепи Ленарда в том виде, как оно используется в настоящее время в литературе, посвященной солитонным уравнениям. Рассмотрим функцию $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющую условию

$$dd_N f = 0.$$

Это условие означает, что 1-форма $d_N f$ является замкнутой и, следовательно, локально-точной. Положим для удобства $f_1 = f$. В соответствии со сделанным выше замечанием можно утверждать, что существует другая функция f_2 такая, что

$$df_2 = d_N f_1.$$

Поскольку $d_N^2 = 0$, эта вторая функция удовлетворяет условию

$$dd_N f_2 = 0,$$

и поэтому процесс может быть продолжен. В результате получается последовательность функций $f_1, f_2, f_3, \dots$, которая называется классической цепью Ленарда, порожденной функцией $f_1 = f$.

В теории солитонных уравнений часто говорят, что эта рекуррентная процедура порождает бесконечную иерархию законов сохранения, связанную с такими уравнениями. Этим оправдано использование для N названия оператор рекурсии.

Однако предыдущее условие на функции f является излишне ограничительным. Цепи Ленарда могут быть связаны также и с функциями, для которых это условие нарушается. Это обстоятельство, похоже, ускользнуло от внимания исследователей, работающих в области солитонных уравнений. Тем не менее оно является основой для применения концепции цепей Ленарда к классическим интегрируемым системам, в противном случае класс возможных примеров был бы практически пустым.

Общую основу для понимания полной концепции цепей Ленарда обеспечивает теория “бидифференциальных идеалов” форм на ωN -многообразии. Для простоты мы представим здесь ближайший к классическому случай, откладывая анализ общего случая до другой статьи. Несмотря на простоту, этот случай очень важен с точки зрения классической теории. Он позволяет охватить большинство примеров, связанных с разделимыми и интегрируемыми гамильтоновыми системами.

Порождающие функции для цепей Ленарда нового типа суть функции, 2-форма Леви-Чивита $dd_N f$ которых принадлежит к идеалу, порождаемому df . Более точно, мы предполагаем существование функции a , называемой конформным фактором, такой, что

$$dd_N f = da \wedge df.$$

Более того, мы предполагаем, что конформный фактор удовлетворяет классическому условию

$$dd_N a = 0.$$

Выяснение происхождения этих условий лежит за пределами настоящей работы. Мы просто заметим, что они довольно естественны с точки зрения геометрии ωN -многообразия, и будем их разрабатывать. Вместе эти условия означают, что пара 1-форм $d_N a - a da$ и $d_N f - a df$ являются замкнутыми и, следовательно, локально-точными. Положим $a_1 = a$ и $f_1 = f$. Как и ранее, существует новая пара функций (a_2, f_2) такая, что

$$\begin{aligned} da_2 &= d_N a_1 - a_1 da_1, \\ df_2 &= d_N f_1 - a_1 df_1. \end{aligned}$$

Основное условие $d_N^2 = 0$ опять означает, что новые функции, в свою очередь, удовлетворяют условиям интегрируемости

$$\begin{aligned} dd_N f_2 &= da_2 \wedge df_1, \\ dd_N a_2 &= da_2 \wedge da_1. \end{aligned}$$

Первое условие обосновывается при помощи цепочки равенств

$$\begin{aligned} 0 &= d_N^2 f = d_N(df_2 + a_1 df_1) = \\ &= -dd_N f_2 + d_N a_1 \wedge df_1 - a_1 dd_N f_1 = \\ &= -dd_N f_2 + (d_N a_1 - a_1 da_1) \wedge df_1 = \\ &= -dd_N f_2 + da_2 \wedge df_1. \end{aligned}$$

Второе условие доказывается аналогично. Роль этих условий интегрируемости состоит в том, что они обеспечивают возможность повторения процесса. Действительно, эти условия означают, что пара 1-форм $d_N f_2 - a_2 df_1$ и $d_N a_2 - a_2 da_1$ являются замкнутыми и, следовательно, локально-точными. Соответственно существует третья пара функций (a_3, f_3) такая, что

$$\begin{aligned} df_3 &= d_N f_2 - a_2 df_1, \\ da_3 &= d_N a_2 - a_2 da_1. \end{aligned}$$

Ясно, что процесс может быть продолжен.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Последовательность пар функций (a_j, f_j) (возможно, бесконечная), определенных рекуррентными формулами

$$\begin{aligned} df_{j+1} &= d_N f_j - a_j df_j, \\ da_{j+1} &= d_N a_j - a_j da_j, \end{aligned}$$

называется цепью Ленарда, порожденной начальной парой функций (a_1, f_1) , которые удовлетворяют начальным условиям

$$\begin{aligned} dd_N a_1 &= 0, \\ dd_N f_1 &= da_1 \wedge df_1. \end{aligned}$$

Этот простой и конкретный результат уже достаточен для того, чтобы уяснить роль цепей Ленарда в классической теории интегрируемых систем, как показывает приведенный ниже пример. Дело в том, что функции Гамильтона для многих классических примеров интегрируемых систем (таких, как геодезические потоки, системы Неймана, три классических случая интегрируемых волчков, решетка Тоды, рациональная система Калоджеро и системы Штеккеля) удовлетворяют основному условию

$$dd_N h = dp_1 \wedge dh$$

при надлежащем выборе оператора рекурсии N и с конформным фактором $a = p_1$, совпадающим с первым коэффициентом минимального полинома для N . Данное обстоятельство, разумеется, не случайно. Действительно, приведенное выше условие является “фирменным знаком” многих классических разделимых в смысле Якоби систем.

Цепь рассуждений можно подытожить следующим образом. Свойство разделимости классической гамильтоновой системы налагает строгие ограничения на 2-форму $dd_N h$, которая связана с разделимым гамильтонианом h и оператором рекурсии, связанным, в свою очередь, с разделенными координатами. Для многих классических систем это ограничение имеет вид $dd_N h = dp_1 \wedge dh$. Как следствие гамильтониан h является порождающей функцией обобщенной цепи Ленарда, сопутствующая цепь конформных факторов которой задается коэффициентами минимального многочлена оператора N . Элементами цепи Ленарда являются интегралы движения, связанные с классической разделимой системой. В итоге интегралы движения для многих классических разделимых систем могут быть вычислены рекуррентно как элементы цепи Ленарда. Появление этих цепей в теории солитонных уравнений не случайно, оно является глубоким проявлением теории Якоби разделимых систем. Цепи Ленарда, таким образом, обретают “полные гражданские права” в классической механике.

4. ГЕОДЕЗИЧЕСКИЙ ПОТОК В $\mathbb{R}^n$

В данном разделе мы проиллюстрируем предыдущие утверждения. Мы исследуем классический пример, изученный Якоби в его тринадцатой “Лекции по динамике”, с точки зрения геометрии ωN -многообразий. В этой работе Якоби доказал, что движение свободной частицы в пространстве $\mathbb{R}^n$ разделимо в эллиптических координатах. Не следует думать, что этот пример слишком прост и потому не представляет интереса. Как ясно понимал сам Якоби, этот пример типичен для обширного класса алгебраически интегрируемых гамильтоновых систем. Для нас это очень удобный пример для демонстрации того, как цепи Ленарда появляются в классической механике.

Хорошо известно, что эллиптические координаты $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ определяются как нули полинома

$$\Delta(\lambda) = a(\lambda) \left[1 + \sum_{j=1}^n \frac{x_j^2}{\lambda - a_j} \right] = (\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_n),$$

где $(x_1, \dots, x_n)$ — декартовы координаты точки в $\mathbb{R}^n$, а

$$a(\lambda) = (\lambda - a_1)(\lambda - a_2) \dots (\lambda - a_n)$$

— полином, корни которого суть попарно различные положительные константы $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Первый шаг в нашей интерпретации результатов Якоби состоит в том, чтобы ввести подходящий тензор Нийенхейса, связанный с эллиптическими координатами. Для этого мы заметим, что координатные функции $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ в общем случае функционально независимы. Поэтому их дифференциалы могут быть использованы в качестве базиса (натурального базиса) в касательном пространстве. Этот базис можно рассматривать как базис из собственных векторов некоторого линейного эндоморфизма $L^*: T^*M \rightarrow T^*M$; последний будет полностью определен, если зафиксировать его собственные значения в соответствии с формулой

$$L^* d\lambda_j = \lambda_j d\lambda_j.$$

Этот эндоморфизм называется естественным эндоморфизмом, связанным с эллиптическими координатами. Используя данное определение, нетрудно показать, что кручение эндоморфизма L равно нулю, и, таким образом, он действительно является тензором Нийенхейса.

Нетрудно также получить вид L^* в исходных декартовых координатах. Для этого достаточно продифференцировать равенство, определяющее эллиптические координаты, и применить эндоморфизм L^* к обеим его частям. В результате получим

$$a(\lambda) \sum_{j=1}^n \frac{2x_j L^* dx_j}{\lambda - a_j} = -\Delta(\lambda) \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j d\lambda_j}{\lambda - \lambda_j}.$$

Это соотношение определяет n 1-форм $L^* dx_j$. Для того чтобы разделить неизвестные, вычислим предыдущее выражение при $\lambda = a_j$. Используя вытекающее из определения эллиптических координат тождество

$$\Delta(a_j) = x_j^2 \prod_{l \neq j} (a_j - a_l),$$

получаем

$$2L^* dx_j = -x_j \sum_{l=1}^n \frac{\lambda_l d\lambda_l}{a_j - \lambda_l}.$$

Аналогично из определения эллиптических координат получаем

$$2dx_j = -x_j \sum_{l=1}^n \frac{d\lambda_l}{a_j - \lambda_l}.$$

Вычитая полученные соотношения друг из друга, имеем

$$L^* dx_j - a_j dx_j = \frac{1}{2} x_j \sum_{l=1}^n d\lambda_l.$$

С другой стороны,

$$\sum_{l=1}^n d\lambda_l = - \sum_{j=1}^n dx_j^2.$$

Это выражение позволяет полностью исключить эллиптические координаты и получить окончательный результат:

$$L^* dx_j - a_j dx_j = -x_j \sum_{l=1}^n x_l dx_l.$$

Это и есть тензор Нийенхейса, связанный с эллиптическими координатами в пространстве $\mathbb{R}^n$. Его можно с пользой применять в любой задаче, связанной с разделением переменных в уравнении Гамильтона–Якоби в эллиптических координатах. Чтобы использовать тензор Нийенхейса L в полной мере, необходимо продолжить нашу геометрическую конструкцию немного дальше и перейти от пространства $\mathbb{R}^n$ к его кокасательному расслоению. Это обязательно, поскольку функция Гамильтона свободной частицы

$$2h = \sum_{j=1}^n y_j^2$$

существует в $T^*\mathbb{R}^n$. Роль связующего звена выполняет процедура “полного подъема”. На практике нужно действовать следующим образом. Прежде всего, дифференциальный оператор d_L , связанный с тензором Нийенхейса L , используется для того, чтобы ввести новую 1-форму Лиувилля

$$\theta' = \sum_{j=1}^n dy_j d_L x_j.$$

Затем вводятся новая 2-форма $\omega' = d\theta'$ и соответствующее тензорное поле $N: TT^*\mathbb{R}^n \rightarrow TT^*\mathbb{R}^n$, определенное равенством $\omega' = \omega \circ N$. Простое вычисление дает явный вид этого нового тензорного поля в декартовых координатах. Соответствующие дифференциалы равны

$$\begin{aligned} d_N x_j &= a_j dx_j - x_j \sum_{k=1}^n x_k dx_k, \\ d_N y_j &= a_j dy_j - x_j \sum_{k=1}^n x_k dy_k + \sum_{k \neq j} (y_j x_k - x_j y_k) dx_k. \end{aligned}$$

Можно доказать, что N есть тензор Нийенхейса, согласованный с канонической симплектической 2-формой ω на $T^*\mathbb{R}^n$. Соответственно многообразие $T^*\mathbb{R}^n$ является ωN -многообразием. Это свойство является общим для фазовых пространств всех других разделимых систем.

Чтобы понять роль этой ωN -структуры в изучении геодезического потока в $\mathbb{R}^n$, вычислим 2-форму Леви-Чивита $dd_N h$ от гамильтониана и обнаружим, что она удовлетворяет условию

$$dd_N h = dp_1 \wedge dh.$$

Поэтому она удовлетворяет начальному условию для обобщенных цепей Ленарда, которые обсуждались в предыдущем разделе. (Второе условие $dd_N p_1 = 0$ для первого коэффициента p_1 минимального многочлена $\Delta(\lambda)$ любого тензорного поля Нийенхейса выполняется автоматически.) Теперь мы можем построить цепь Ленарда, начиная с гамильтониана h геодезического потока. Эта цепь является конечной. Действительно, она прерывается после n шагов. Если мы попробуем осуществить следующую итерацию, то получим точный нуль:

$$\begin{aligned} d_N h_n - p_n dh_1 &= 0, \\ d_N p_n - p_n dp_1 &= 0. \end{aligned}$$

Такой результат есть следствие выбора специального конформного фактора $a = p_1$. Отсюда следует, что все члены цепи Ленарда можно собрать в полином

$$h(\lambda) = h_1 \lambda^{n-1} + h_2 \lambda^{n-2} + \dots + h_n.$$

Коэффициенты этого полинома суть тензоры Киллинга для евклидовой метрики в $\mathbb{R}^n$. Они связаны с интегралами движения Уленбека–Девани

$$F_k = y_k^2 + \sum_{l,k} \frac{(y_k x_l - y_l x_k)^2}{a_k - a_l}$$

геодезического потока простой формулой

$$h(\lambda) = a(\lambda) \sum_{k=1}^n \frac{F_k}{\lambda - a_k}.$$

Детали этого вычисления мы опускаем.

Мы надеемся, что приведенный простой пример убеждает читателя, что концепция цепей Ленарда, понятая и расширенная надлежащим образом, играет важную роль в классической теории интегрируемых систем. Появление цепей Ленарда является неизбежным следствием строгой взаимосвязи между теорией разделения переменных в уравнении Гамильтона–Якоби и геометрией ωN -многообразия. Фазовые пространства разделимых систем являются ωN -многообразиями и, следовательно, снабжены оператором рекурсии. Этот оператор позволяет построить находящиеся в инволюции интегралы движения для разделимой системы с помощью итеративной процедуры. Конкретный вид этой процедуры может меняться: он определяется конкретным видом уравнения, которому удовлетворяет 2-форма Леви-Чивита $dd_N h$, соответствующая гамильтониану разделимой системы. Благодаря этим связям мы можем утверждать, что цепи Ленарда – не случайный курьез в теории солитонных уравнений, а “фирменный знак” всех разделимых систем.