Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Михайлов, В. Ю. Новокшенов, Аналитическое описание солитонов, управляемых дисперсией, методом задачи Римана, *ТМФ*, 2003, том 137, номер 3, 433–444

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf283>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 18:28:37

© 2003 г.

А. В. Михайлов*, В. Ю. Новокшенов†

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СОЛИТОНОВ, УПРАВЛЯЕМЫХ ДИСПЕРСИЕЙ, МЕТОДОМ ЗАДАЧИ РИМАНА

Предложена простая явная формула для профиля оптического импульса, распространяющегося в волокне с управляемой дисперсией со средней нулевой дисперсией. Предполагается, что диссипация пренебрежимо мала, а дисперсия постоянна на соседних плечах волновода, что позволяет применить интегрируемые модели нелинейного уравнения Шредингера на каждом плече. Полученная формула описывает решения, называемые солитонами, управляемыми дисперсией, которые периодичны вдоль волновода и экспоненциально локализованы по времени.

Солитоны, управляемые дисперсией, параметризуются специальным классом спектральных данных, который найден из численных экспериментов. С помощью метода задачи Римана восстанавливается профиль солитона, управляемого дисперсией, по заданным спектральным данным. В пределе больших длин плеч такой солитон находится с помощью “асимптотического разделения” задачи Римана. Проведено сравнение аналитических формул с результатами численного счета.

Ключевые слова: солитоны, управляемые дисперсией, нелинейное уравнение Шредингера с периодической дисперсией, задача Римана, метод обратной задачи рассеяния.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается задача распространения нелинейного электромагнитного импульса в оптическом волноводе в отсутствие диссипации и с периодической дисперсией (так называемый волновод с управляемой дисперсией, УД-волновод). Комплексная амплитуда импульса удовлетворяет нелинейному уравнению Шредингера (НУШ)

$$iu_z + d(z)u_{tt} + 2|u|^2u = 0, \quad (1.1)$$

где дисперсия d – периодическая функция, $d(z + 2z_0) = d(z)$. Если средняя по периоду величина дисперсии равна нулю, а амплитуда импульса мала, в линейном приближении достигается полная компенсация хроматического распыления волнового пакета.

* Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, Москва, Россия; University of Leeds, Leeds, UK

† Институт математики УНЦ РАН, Уфа, Россия. E-mail: novik@imat.rb.ru

В этом случае отображение за период вдоль волновода станет тождественным, что даст полное восстановление профиля импульсов за период. Однако с целью уменьшения ошибок передачи и повышения отношения сигнал/шум необходимо поддерживать относительно высокую амплитуду импульсов, что приводит к необходимости учета нелинейности в аналитическом описании динамики в данной модели.

Решение этой достаточно сложной математической задачи представляет несомненный практический интерес для промышленных линий связи (см., например, [1]). Многие интересные результаты здесь получены с помощью численного счета. Наиболее серьезные аналитические результаты были достигнуты с помощью усредненного вариационного принципа (приближение Габитова–Турицына [2]). Обоснованию этого метода в случае нулевой средней дисперсии посвящены работы [3], где доказывается, что такой выбор управления дисперсией стабилизирует импульсы, предотвращая их разрушение, имеющее место при ненулевой (отрицательной) средней дисперсии. Случай положительной средней дисперсии рассмотрен в работе [4], где в пределе малого z_0 производилось усреднение в НУШ по быстрым осцилляциям $d(z)$. Численные результаты [5] указывают на невозможность существования УД-солитонов в случае отрицательной средней дисперсии. Лагранжева версия усреднения по периоду изложена в работе [6].

Наш подход к данной задаче совершенно другой. Мы предполагаем, что дисперсия кусочно-постоянна на соседних плечах волновода, имеющих длину z_0 : $d(z) = +1$ при $(n-1)z_0 < z \leq nz_0$ – “положительное плечо”, $d(z) = -1$ при $nz_0 < z \leq (n+1)z_0$ – “отрицательное плечо”, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Тогда НУШ (1.1) превращается в пару интегрируемых уравнений (см. ниже (2.1)). Схема интегрирования НУШ (обратная задача рассеяния (ОЗР)), впервые предложенная Захаровым и Шабатом [7] в 1971 г., является адекватным средством для описания динамики УД-солитона. Мы предполагаем также, что длина z_0 каждого плеча волновода достаточно велика, это позволяет использовать асимптотические методы для решения прямой и обратной задач рассеяния [8].

Мы переформулируем метод ОЗР в виде некоторой задачи Римана (ЗР), которая представляется более подходящей для аналитического описания профиля УД-солитона. Причина состоит в том, что данные рассеяния УД-солитона являются экспоненциально убывающими функциями, что затрудняет применение обычных асимптотических методов для решения ОЗР. Получающиеся в результате экспоненциально убывающие асимптотики выводятся здесь (так же, как и в других подобных задачах) из интегральных уравнений, эквивалентных ЗР (см. разделы 3, 4). Окончательный ответ дается в виде интеграла Фурье, что очень близко к результату работы [9].

Отметим также, что данные рассеяния, отвечающие УД-солитону, по форме очень напоминают данные рассеяния, возникающие в интегрируемых моделях статистической физики [10]. В частности, НУШ (2.1) (см. ниже) описывают одномерный газ бозонов с твердой сердцевиной, а низкотемпературные пределы его корреляционных функций выражаются через $u(t, z)$, где z – время, а $T = z_0^{-1}$ – температура. Данные рассеяния для u представляют собой гауссовы экспоненты от спектрального параметра вида (3.1)–(3.3) (см. раздел 3). Метод интегрирования такой модели был предложен в работе [11], однако

скейлинговый предел $T = z^{-1} \rightarrow 0$ никогда не обсуждался в контексте статистической физики.

2. ОСНОВНЫЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

Благодаря предположению о том, что дисперсия имеет кусочно-постоянный вид ($d(z) = \pm 1$), основное НУШ (1.1) принимает вид

$$iu_z \pm u_{tt} + 2|u|^2 u = 0, \quad u = u_{\pm}(t, z). \quad (2.1)$$

Знаки “плюс” и “минус” отвечают положительному и отрицательному плечам, соответственно. НУШ обоих знаков интегрируемы, соответствующие операторы Лакса имеют вид

$$L^{\pm} = \begin{pmatrix} \partial_t + \frac{i\lambda}{2} & \mp i\bar{u} \\ -iu & \partial_t - \frac{i\lambda}{2} \end{pmatrix}, \quad L^{\pm}\Psi = 0, \quad (2.2)$$

и отвечающая им ОЗР была найдена Захаровым и Шабатом более тридцати лет назад. Будем рассматривать импульсы, быстро убывающие при $|t| \rightarrow \infty$ и такие, что спектральная задача (2.2) не имеет дискретного спектра. Такими свойствами обладает большинство импульсов, применяемых в телекоммуникационных системах оптической связи [1]. Эволюция данных рассеяния по z в случае непрерывного спектра имеет вид [12]

$$\begin{aligned} \Psi &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ e^{i\lambda t/2} \end{pmatrix}, & t \rightarrow +\infty, \\ \Psi &\rightarrow \begin{pmatrix} b_{\pm}(\lambda)e^{\pm i\lambda^2 z}e^{-i\lambda t/2} \\ a_{\pm}(\lambda)e^{i\lambda t/2} \end{pmatrix}, & t \rightarrow -\infty, \end{aligned} \quad (2.3)$$

и удовлетворяет условию унитарности $|a_{\pm}|^2 \pm |b_{\pm}|^2 = 1$, а также условию аналитического продолжения функций $a_{\pm}$ в верхнюю полуплоскость $\text{Im } \lambda > 0$.

Предположим, что импульс $u(t, z)$ непрерывен на границе соседних плеч. Это означает, что он удовлетворяет последовательным задачам Коши для уравнения (2.1), когда решение на конце предыдущего плеча служит начальным условием на следующем плече. Поскольку оба НУШ (2.1) интегрируемы, глобальное решение существует при всех z в классе быстроубывающих функций.

Предположим, что плечи с положительной и отрицательной дисперсией имеют одинаковую длину z_0 , и $\varepsilon = z_0^{-1}$ является малым параметром в нашей задаче $\varepsilon \ll 1$.

Схема спектрального преобразования ОЗР представлена на рис. 1. В нашей предыдущей статье [13] мы предприняли попытку найти отображение за период $u_{n+1} = S(u_n)$ и вычислить УД-солитон как стационарную точку этого отображения. Здесь мы применим более прямой подход и укажем спектральные данные a и b , обеспечивающие следующие условия для профиля УД-солитона:

$$\begin{aligned} |u_{\text{DM}}(t, z)| &= O(e^{-C(z)|t|}), \quad C(z) > 0, \\ |u_{\text{DM}}(t, z)| &= |u_{\text{DM}}(t, z + 2z_0)|; \end{aligned} \quad (2.4)$$

Рис. 1

здесь u_{DM} обозначает УД-солитон. Из условий (2.4) будут выведены основные соотношения для спектральных данных $a_+(\lambda)$, $a_-(\lambda)$ и $b_+(\lambda)$, $b_-(\lambda)$, приводящие к z -периодичности $u_{\text{DM}}(t, z)$. В разделах 3 и 4 эти условия будут уточнены для получения асимптотики $u_{\text{DM}}(t, z)$ при $z_0 \gg 1$.

3. ЗР ДЛЯ УД-СОЛИТОНА

Задание класса данных рассеяния для солитонных уравнений является лучшим способом параметризации решений. Сейчас мы постулируем в явном виде этот класс для УД-солитона. Решив затем ОЗР в этом классе, убедимся (см. раздел 5), что он обеспечивает периодичность и экспоненциальную локализацию (2.4).

Пусть данные рассеяния удовлетворяют следующим условиям.

1.

$$|a_+(\lambda)|^2 = \frac{e^{\varepsilon^{-1}\sigma(\lambda)} - 1}{e^{\varepsilon^{-1}\sigma(\lambda)} + 1}, \quad (3.1)$$

где $\sigma(\lambda) = \sigma_2\lambda^2 + \sigma_4\lambda^4 + \dots + \sigma_{2N}\lambda^{2N}$ — положительно определенный полином, $\lambda^{-2}\sigma(\lambda) > 0$ для $\lambda \in \mathbb{R}$.

2.

$$b_+(\lambda, z) = b_+(\lambda)e^{iz\lambda^2}, \quad \text{Im } b_+(\lambda) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (3.2)$$

3.

$$\frac{b_-(\lambda)}{a_-(\lambda)} = \frac{|b_+(\lambda)|^2}{\alpha_\downarrow(\lambda)\alpha_\uparrow(\lambda)}, \quad |a_\pm|^2 \pm |b_\pm|^2 = 1, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (3.3)$$

где $\alpha_\downarrow(\lambda)$ и $\alpha_\uparrow(\lambda)$ — решения скалярной ЗР (3.12) (см. ниже), которые будут определены явно по $a_+(\lambda)$ в (3.13).

Ниже в разделе 4 будет поставлено некоторое дополнительное условие технического характера для полинома $\sigma(\lambda)$ с целью обоснования асимптотического разложения для УД-солитона.

Из условия унитарности $|a_+|^2 + |b_+|^2 = 1$ и соотношений (3.1), (3.2) следует, что

$$b_+^2(\lambda) = \frac{2}{e^{\varepsilon^{-1}\sigma(\lambda)} + 1}. \quad (3.4)$$

К сожалению, мы не можем доказать эквивалентность условий (3.1)–(3.3) свойствам (2.4) для УД-солитона, будет доказана лишь их достаточность. Выбор класса 1–3 продиктован численными экспериментами с различными профилями УД-солитонов и их данными рассеяния, найденными численным интегрированием прямого преобразования рассеяния (2.3). Далее подбиралась аналитическая аппроксимация функций $\ln((1 - |a_+(\lambda)|^2)/(1 + |a_+(\lambda)|^2))$ с помощью программы “Mathematica”. Команда “Rational Interpolation” дает очень хорошее приближение этой функции полиномом $\sigma(\lambda)$ даже для сравнительно малых степеней ($N = 4$ для исследованных примеров). Таким образом, формулы (3.1)–(3.3) могут рассматриваться как “экспериментальные данные”, которые мы закладываем в основу аналитической теории УД-солитонов. Ниже в разделе 5 будут доказаны свойства (2.4) для главного члена асимптотики решения, отвечающего (3.1)–(3.3).

Рассмотрим сначала восстановление профиля УД-солитона на “положительном” плече. Экспоненциальный характер асимптотик a_+ , b_+ и Ψ -функции по малому параметру требует применения специальных интегральных представлений для формулы обращения $\{a_+, b_+\} \rightarrow u_+$. Это приводит к ЗР, эквивалентной системе сингулярных интегральных уравнений, используемых ниже в разделе 4 для асимптотического анализа решений u_+ .

Пусть $\Phi_\uparrow = \Phi_\uparrow(\lambda, z, t)$ аналитичны по λ в верхней ($\text{Im } \lambda > 0$), а $\Phi_\downarrow$ – в нижней ($\text{Im } \lambda < 0$) полуплоскостях и удовлетворяют условию сопряжения (см. [14], с. 400)

$$\Phi_\downarrow = \Phi_\uparrow G_+, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (3.5)$$

где

$$G_+(\lambda, z, t) = \begin{pmatrix} |a_+(\lambda)|^2 & -ib_+^2(\lambda)e^{\varepsilon^{-1}\sigma(\lambda)-i\tau_+(\lambda)} \\ -ib_+^2(\lambda)e^{i\tau_+(\lambda)} & |a_+(\lambda)|^2 \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

$$\tau_+(\lambda) = -\lambda^2 z - \lambda t. \quad (3.7)$$

Стандартное условие нормировки имеет вид

$$\Phi_{\uparrow\downarrow} \rightarrow I, \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (3.8)$$

ЗР (3.5)–(3.8) дает решение НУШ⁺ (уравнение (2.1) со знаком “+”) в виде вычета на бесконечности (см. [14], с. 396):

$$\Phi_\uparrow = I + \frac{\Phi_1(t, z)}{\lambda} + O(\lambda^{-2}), \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (3.9)$$

$$\Phi_1(t, z) = \begin{pmatrix} * & u_+(t, z) - g(t, z) \\ -\bar{u}_+(t, z) & * \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

где $g(t, z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\tau_+(\lambda)} d\lambda$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Мы используем здесь несколько необычную ЗР ввиду наличия нуля на вещественной оси $a_+(0) = 0$. Аналогичная ситуация имеет место в задаче вычисления низкотемпературного предела квантовых корреляционных функций в интегрируемых моделях статистической физики. В частности, НУШ (2.1) описывает одномерный газ бозонов с твердой сердцевиной. Соответствующая ЗР (3.5)–(3.7) была выведена в работе [11], где ε имеет смысл малой температуры, z – время, а $\sigma(\lambda) = \lambda^2 + h$ и $b_+(\lambda)$, определенные в (3.4), называются фермиевскими весовыми функциями. Однако в задачах статистической физики не изучался скейлинговый предел $\varepsilon = z^{-1} \rightarrow 0$, так что результаты книги [14] не могут применяться здесь напрямую.

Используемые ниже преобразования следуют методу Дейффа–Жу [10], предназначенному для асимптотического анализа ЗР с экспоненциально убывающими данными.

Процедура начинается с вывода эквивалентной системы сингулярных интегральных уравнений, используемых ниже в разделе 4 для “асимптотического разделения” задачи (3.5)–(3.8) при $\varepsilon \rightarrow 0$. Сначала нужно сделать единичным верхнедиагональный элемент матрицы сопряжения (3.6). Это может быть достигнуто с помощью перенормировки

$$\Phi(\lambda, z, t) = \chi(\lambda, z, t) \begin{pmatrix} \alpha(\lambda) & 0 \\ 0 & \alpha^{-1}(\lambda) \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

где $\alpha(\lambda)$ – кусочно-аналитическая функция в верхней и нижней полуплоскостях, удовлетворяющая скалярной ЗР

$$\begin{cases} \alpha_{\downarrow}(\lambda) = \alpha_{\uparrow}(\lambda) |a_+(\lambda)|^2, & \lambda \in \mathbb{R}, \\ \alpha(\infty) = 1. \end{cases} \quad (3.12)$$

Скалярная ЗР (3.12) имеет явное решение (см. [14])

$$\alpha_{\uparrow\downarrow}(\lambda) = \exp \left\{ \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\zeta}{\zeta - \lambda} \ln \frac{e^{\varepsilon^{-1}\sigma(\zeta)} - 1}{e^{\varepsilon^{-1}\sigma(\zeta)} + 1} \right\}, \quad (3.13)$$

где индексы $\uparrow$ и $\downarrow$ обозначают $\text{Im } \lambda > 0$ и $\text{Im } \lambda < 0$, соответственно.

Исходная ЗР (3.5)–(3.8) переформулируется для функции χ в виде

$$\begin{aligned} \chi_{\downarrow} &= \chi_{\uparrow} \tilde{G}, & \lambda \in \mathbb{R}, \\ \chi(\infty) &= I, \end{aligned} \quad (3.14)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{G}(\lambda, z, t) &= \begin{pmatrix} 1 & p(\lambda) \\ q(\lambda) & 1 + p(\lambda)q(\lambda) \end{pmatrix}, \\ p(\lambda) &= -i\alpha_{\downarrow}(\lambda)\alpha_{\uparrow}(\lambda)b_+^2(\lambda)e^{\varepsilon^{-1}\sigma(\lambda)-i\tau_+(\lambda)}, \\ q(\lambda) &= -i\alpha_{\downarrow}^{-1}(\lambda)\alpha_{\uparrow}^{-1}(\lambda)b_+^2(\lambda)e^{i\tau_+(\lambda)}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Систему сингулярных интегральных уравнений можно получить из ЗР (3.14), (3.15) стандартным образом, а именно, полагая $\chi_- - \chi_+ = \chi_+(\tilde{G} - I)$ и разрешая аддитивную задачу сопряжения с помощью интегральной формулы Коши

$$\chi_{\uparrow}(\lambda) = I + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi_{\uparrow}(\zeta)(\tilde{G}(\zeta) - I)}{\zeta - \lambda} d\zeta, \quad \text{Im } \lambda > 0.$$

Для второй строки матрицы $\chi_{\uparrow} = \begin{pmatrix} * & * \\ \chi_{21} & \chi_{22} \end{pmatrix}$ отсюда следует пара скалярных интегральных уравнений

$$\chi_{21}(\lambda) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q(\zeta)\chi_{22}(\zeta)}{\zeta - \lambda - i0} d\zeta, \quad (3.16)$$

$$\chi_{22}(\lambda) = 1 - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(\zeta)\chi_{21}(\zeta) + p(\zeta)q(\zeta)\chi_{22}(\zeta)}{\zeta - \lambda - i0} d\zeta. \quad (3.17)$$

Формулы обращения (3.10) и (3.12) переписываются в виде

$$u(t, z) = -\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \overline{\lambda \chi_{21}(\lambda, z, t)}. \quad (3.18)$$

4. “АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗДЕВАНИЕ” ЗР

Будем следовать асимптотической процедуре Дейффа–Жу, модифицированной в [11] и [14] для задач статистической механики в модели НУШ. Единственным отличием будет выбор полинома $\sigma(\lambda)$, который ранее имел вид $\lambda^2 + \beta$ (фермиевский вес) в статистической механике.

Уравнения (3.16) не могут быть решены в явном виде для произвольного полинома $\sigma(\lambda)$. Однако можно найти приближенное асимптотическое решение при $\varepsilon \rightarrow 0$ и вычислить главный член $u(t, z)$ из формулы (3.18).

Начнем с наложения дополнительного условия на полином $\sigma(\lambda)$, который параметризует данные рассеяния (3.1)–(3.3).

4. Для каждого корня λ_k в верхней полуплоскости уравнения $\sigma'(\lambda_k) = 0$ выполнена оценка

$$\text{Re } \sigma(\lambda_k) < -c|\lambda_k|^2, \quad c > 0, \quad \text{Im } \lambda_k > 0. \quad (4.1)$$

Оценим сначала интеграл в правой части уравнения (3.16). Заметим, что функция $q(\lambda)$ мероморфна в верхней полуплоскости. Это следует из ее определения (3.15) и скалярной ЗР (3.12):

$$\begin{aligned} q(\lambda) &= -2i \frac{\alpha_{\uparrow}^{-1}(\lambda)\alpha_{\downarrow}^{-1}(\lambda)}{e^{\varepsilon^{-1}\sigma(\lambda)} + 1} e^{i\tau(\lambda)} = \\ &= -2i \frac{\alpha_{\uparrow}^{-1}(\lambda)\alpha_{\downarrow}^{-1}(\lambda)|a_+(\lambda)|^2}{e^{\varepsilon^{-1}\sigma(\lambda)} - 1} e^{i\tau(\lambda)} = -2i \frac{\alpha_{\uparrow}^{-2}(\lambda)e^{i\tau(\lambda)}}{e^{\varepsilon^{-1}\sigma(\lambda)} - 1}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Из явной формулы (3.13) следует, что функция $\alpha_{\uparrow}$ имеет простой полюс в нуле:

$$\alpha_{\uparrow}(\lambda) = O(\lambda^{-1}), \quad \alpha_{\downarrow}(\lambda) = O(\lambda), \quad \lambda \rightarrow 0. \quad (4.3)$$

Таким образом, выражение (4.2) несингулярно в нуле и аналитично в полосе $0 < \operatorname{Im} \lambda < \operatorname{Im} \lambda_0$, где λ_0 – нуль знаменателя $e^{\varepsilon^{-1}\sigma(\lambda)} - 1$, ближайший к вещественной оси.

Это обстоятельство позволяет деформировать контур интеграла Коши (3.16) в верхнюю полуплоскость с учетом вычета в полюсе $\zeta = \lambda$ на вещественной оси:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q(\zeta)\chi_{22}(\zeta)}{\zeta - \lambda - i0} d\zeta = q(\lambda)\chi_{22}(\lambda) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \frac{q(\zeta)\chi_{22}(\zeta)}{\zeta - \lambda} d\zeta, \quad (4.4)$$

где контур $\mathcal{L}$ лежит в полосе $0 < \operatorname{Im} \lambda < \operatorname{Im} \lambda_0$.

Поскольку функция $q(\lambda)$ содержит быстроубывающую экспоненту, интеграл (4.4) может быть оценен методом наискорейшего спуска. Контур $\mathcal{L}$ должен быть деформирован так, чтобы проходить через стационарные точки экспоненты $\exp(iz\lambda^2 - it\lambda - \varepsilon^{-1}\sigma(\lambda))$, входящей в (4.2). Нам нужны только стационарные точки в верхней полуплоскости $\hat{\lambda}_k(z, t, \varepsilon)$, т.е. корни уравнения

$$2iz\hat{\lambda}_k - it - \varepsilon^{-1}\sigma'(\hat{\lambda}_k) = 0, \quad \operatorname{Im} \hat{\lambda}_k > 0. \quad (4.5)$$

Выберем параметры z и t в пределах $|z|, |t| < \varepsilon^{-1/2}$. Тогда уравнение (4.5) является малой деформацией уравнения $\sigma'(\lambda) = 0$, и все ненулевые корни (4.5) близки к “недеформированным” корням (4.1):

$$|\lambda_k - \hat{\lambda}_k(z, t, \varepsilon)| = O(\varepsilon^{-1/2}), \quad |z|, |t| < \varepsilon^{-1/2}. \quad (4.6)$$

По условию 4 существует константа $0 < c_1 < c$ такая, что

$$\operatorname{Re}\{iz\hat{\lambda}_k^2 - it\hat{\lambda}_k - \varepsilon^{-1}\sigma(\hat{\lambda}_k)\} < -c_1\varepsilon^{-1/2}|\hat{\lambda}_k|^2, \quad |z|, |t| < \varepsilon^{-1/2}. \quad (4.7)$$

Оценка (4.7) означает, что вклады от остальных стационарных точек $\hat{\lambda}_k(z, t, \varepsilon)$ в интеграл (4.4) экспоненциально малы и имеют порядок $O(\varepsilon^{1/2}e^{-c_1\varepsilon^{-1/2}|\lambda_k|^2})$ для $\lambda_k = O(1)$.

Единственная стационарная точка, в которой оценка (4.7) не выполняется, это $\lambda_1 = 0$. Из уравнения (4.5) следует

$$\hat{\lambda}_1(z, t, \varepsilon) = O(\varepsilon^{1/2}),$$

так что нужно деформировать контур $\mathcal{L}$ в точку $\hat{\lambda}_1$. Для этого учтем полюсы $q(\lambda)$, лежащие между $\hat{\lambda}_1$ и вещественной прямой. Эти полюсы ζ_p являются нулями знаменателя $e^{\varepsilon^{-1}\sigma(\zeta)} - 1$ при $\zeta \rightarrow 0$, т.е. они находятся из уравнения

$$\sigma(\zeta_p) = 2\pi i\varepsilon, \quad \zeta_p = O(\sqrt{2\pi i p \varepsilon}), \quad p = 1, 2, \dots, P. \quad (4.8)$$

Поскольку

$$e^{\varepsilon^{-1}\sigma(\zeta)} - 1 = \varepsilon^{-1}\sigma'(\zeta_p)e^{\varepsilon^{-1}\sigma(\zeta_p)}(\zeta - \zeta_p) + \dots = O(\varepsilon^{-1/2}(\zeta - \zeta_p)),$$

интеграл (4.4) имеет разложение

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q(\zeta)\chi_{22}(\zeta)}{\zeta - \lambda - i0} d\zeta &= q(\lambda)\chi_{22}(\lambda) - \sum_{p=1}^P \operatorname{Res}_{\zeta_p} \frac{\alpha_{\uparrow}^{-2}(\zeta)e^{i\tau(\zeta)}\chi_{22}(\zeta)}{(e^{\varepsilon^{-1}\sigma(\zeta)} - 1)(\lambda - \zeta)} + \\ &+ q(\lambda)\chi_{22}(\lambda) + O(\varepsilon^{1/2}R(\lambda)), \end{aligned} \quad (4.9)$$

где

$$R(\lambda) = \sum_{p=1}^P (\lambda - \lambda_p)^{-1}. \quad (4.10)$$

Последняя оценка обеспечивает “асимптотическое разделение” уравнения (3.16)

$$\chi_{21}(\lambda) = -q(\lambda)\chi_{22}(\lambda) + O(\varepsilon^{1/2}R(\lambda)), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (4.11)$$

Подставляя (4.11) в уравнение (3.17), немедленно получаем

$$\chi_{22}(\lambda) = 1 + O(\varepsilon^{1/2}R(\lambda)e^{-\varepsilon^{-1}\sigma(\lambda)}), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (4.12)$$

Для $\operatorname{Im} \lambda > 0$ эта оценка вместе с (3.16) дает формулу

$$\chi_{21}(\lambda) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q(\zeta)(1 + O(\varepsilon^{1/2}R(\zeta)e^{-\varepsilon^{-1}\sigma(\zeta)}))}{\zeta - \lambda} d\zeta. \quad (4.13)$$

5. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ УД-СОЛИТОНА

Явный вид главного члена асимптотики χ_{21} (4.13) вместе с формулой обращения (3.18) дает асимптотику УД-солитона на “положительном” плече

$$\overline{u_+(t, z)} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\zeta^2 z - i\zeta t} d\zeta}{\alpha_{\uparrow}(\zeta)\alpha_{\downarrow}(\zeta)e^{\varepsilon^{-1}\sigma(\zeta)+1}}. \quad (5.1)$$

Докажем теперь свойства (2.4) для решения (5.1), которое претендует на статус УД-солитона.

Экспоненциальная локализация по t (первое условие (2.4)) уже фактически доказано в разделе 4. В самом деле, подынтегральное выражение (5.1) аналитично в верхней полуплоскости по ζ в силу (4.2). Деформируя контур интегрирования с вещественной оси к контуру $\mathcal{L}$, как описано в (4.8)–(4.10), применим снова метод наискорейшего спуска. Это доказывает оценку (2.4).

Доказательство периодичности по z проходит в два этапа. Во-первых, заметим, что $\overline{u_+(t, z)} = u_+(t, -z)$. Это следует из инволюции $\overline{\alpha_{\uparrow}(\zeta)\alpha_{\downarrow}(\zeta)} = \alpha_{\uparrow}(-\zeta)\alpha_{\downarrow}(-\zeta)$ и $\bar{\sigma}(\zeta) = \sigma(-\zeta)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\zeta^2 z + i\zeta t} d\zeta}{\bar{\alpha}_{\uparrow}(\zeta)\bar{\alpha}_{\downarrow}(\zeta)e^{\varepsilon^{-1}\sigma(\zeta)+1}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\zeta^2 z - i\zeta t} d\zeta}{\alpha_{\uparrow}(\zeta)\alpha_{\downarrow}(\zeta)e^{\varepsilon^{-1}\sigma(\zeta)+1}}.$$

Во-вторых, выведем асимптотику УД-солитона на “отрицательном” плече. Здесь процедура гораздо проще, чем в разделах 3 и 4, поскольку данные рассеяния a_- не имеют нулей в силу (3.3) и формул (3.4), (4.3). Тем самым можно использовать стандартную ЗР для НУШ[−] (уравнения (2.1) со знаком “−”):

$$\begin{aligned}\Phi_{\downarrow} &= \Phi_{\uparrow} G_{-}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \\ \Phi(\infty) &= I,\end{aligned}\tag{5.2}$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{-}(\lambda, z, t) &= \begin{pmatrix} 1 & p(\lambda) \\ q(\lambda) & 1 + p(\lambda)q(\lambda) \end{pmatrix}, \\ p(\lambda) &= b_{-}(\lambda)a_{-}^{-1}(\lambda)e^{-i\lambda^2 z + \lambda t}, \\ q(\lambda) &= -\overline{b_{-}(\lambda)a_{-}^{-1}(\lambda)}e^{i\lambda^2 z - \lambda t}.\end{aligned}\tag{5.3}$$

По условию (3.3) матричный элемент $q(\lambda)$ имеет ту же структуру, что и (3.15). Это позволяет использовать процедуру “раздевания”, аналогичную применяемой в разделах 3 и 4 для ЗР (5.2). Окончательно получаем главный член асимптотики УД-солитона на “отрицательном” плече в виде

$$\overline{u_{-}(t, z)} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b_{-}(\zeta)}{a_{-}(\zeta)} e^{i\zeta^2 z - i\zeta t} d\zeta = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\zeta^2 z - i\zeta t} d\zeta}{\bar{\alpha}_{\uparrow}(\zeta)\bar{\alpha}_{\downarrow}(\zeta)e^{\varepsilon^{-1}\sigma(\zeta)+1}}.\tag{5.4}$$

В завершение введем пилообразную фазовую функцию $\theta(z)$:

$$\theta(z) = \begin{cases} z, & \frac{nz_0}{2} \leq z < \frac{(n+1)z_0}{2}, \\ -z, & \frac{(n+1)z_0}{2} \leq z < \frac{(n+2)z_0}{2}, \end{cases}$$

и объединим (5.1), (5.4) в единую формулу

$$u_{\text{DM}}(t, z) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\zeta^2 \theta(z) + i\zeta t} d\zeta}{\alpha_{\uparrow}(\zeta)\alpha_{\downarrow}(\zeta)e^{\varepsilon^{-1}\sigma(\zeta)+1}}.\tag{5.5}$$

Ясно, что функция (5.5) периодична по z , так что свойство (2.4) выполнено и $u_{\text{DM}}(t, z)$ совпадает с (5.1) и (5.4) на “положительном” и “отрицательном” плечах, соответственно.

Формула (5.5) составляет основной результат данной работы.

ТЕОРЕМА. *Данные рассеяния НУШ (2.1) $a_{\pm}(\lambda)$, $b_{\pm}(\lambda)$, удовлетворяющие условиям (3.1)–(3.3) с некоторым полиномом $\sigma(\lambda)$, определяют УД-солитон $u_{\text{DM}}(t, z)$, имеющий асимптотику (5.5) в пределе большого периода коэффициента дисперсии.*

6. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Мы начали с прямого численного интегрирования НУШ (1.1) с целью получения примеров УД-солитонов. В качестве начального условия была выбрана функция

$$u(t, 0) = 0.18 \exp\left(-\frac{t^2}{16} + \frac{it^2}{4}\right). \quad (6.1)$$

Для интегрирования использовался стандартный метод дробных шагов с псевдоспектральной схемой, а также алгоритм фазовой коррекции, который обеспечивает сходимость от начального условия вида (6.1) к УД-солитону (см. [1], с. 156). Длина каждого плеча была взята достаточно большой ($z_0 = 200$), так что $\varepsilon = 0.005$.

Рис. 2

Решив численно прямую задачу рассеяния с потенциалом $u(t, z)$, мы убедились, что она не имеет дискретных собственных значений.

Рис. 3

Далее были вычислены данные рассеяния $a_{\pm}(\lambda)$, $b_{\pm}(\lambda)$ путем численного интегрирования системы (2.2), (2.3) с заданным УД-солитонным потенциалом $u(t, z)$. Затем профили $|a_{\pm}(\lambda)|$ были аналитически аппроксимированы экспонентами (3.1), как объяснено выше в разделе 3. Полученный таким образом полином $\sigma(\lambda)$ имеет вид

$$\sigma(\lambda) = 0.1948\lambda^2 + 3.9468\lambda^4 + 10.7317\lambda^6.$$

Сравнение численного (сплошная линия) и приближенного аналитического (штриховая линия) профилей функции $|a_+(\lambda)|$ показано на рис. 2.

Мы сравнили также численные профили импульса в середине плеча ($z = 0$) и на стыке плеч ($z = \pm z_0/2$) (сплошная линия) с соответствующими аналитическими выражениями (5.5), полученными из “асимптотического разделения” ЗР (штриховая линия). Результаты представлены на рис. 3.

Это показывает хорошее согласие прямого численного моделирования УД-солитона уравнения (1.1) с нашими аналитическими результатами.

Благодарности. Работа была частично поддержана грантами РФФИ № 02-01-00144 и ИНТАС № 99-1782. Один из авторов (В.Ю.Н.) выражает благодарность Математическому институту Исаака Ньютона (Кембридж) за поддержку и гостеприимство.

Список литературы

- [1] Optical Solitons: Theoretical Challenges and Industrial Perspectives. Eds. V.E. Zakharov, S. Wabnitz. Berlin: Springer, 1999.
- [2] *I. R. Gabitov, S. K. Turitsyn.* Opt. Lett. 1996. V. 21. P. 327; *В. Е. Захаров, С. В. Манаков.* Письма в ЖЭТФ. 1999. Т. 70. С. 573; *С. К. Турицын, В. К. Мезенцев.* Письма в ЖЭТФ. 1998. Т. 67. С. 616.
- [3] *J. H. Nijhof, W. Forysiak, N. J. Doran.* IERE J. Quantum Electr. 2000. V. 6. P. 330; *D. E. Pelinovsky, V. Zharnitsky.* SIAM J. Appl. Math. 2003. V. 63. P. 745; *V. Zharnitsky, E. Grenier, C. K. R. T. Jones, S. Turitsyn.* Physica D. 2001. V. 152–153. P. 794; *T. Yang, W. L. Kath.* Physica D. 2001. V. 149. P. 80.
- [4] *M. J. Ablowitz, G. Biondini.* Opt. Lett. 1998. V. 23. P. 1668.
- [5] *P. M. Lushnikov.* Opt. Lett. 2001. V. 26. P. 1535.
- [6] *T. Hirooka, A. Hasegawa.* Opt. Lett. 1998. V. 23. P. 768.
- [7] *В. Е. Захаров, А. Б. Шабат.* ЖЭТФ. 1971. Т. 61. С. 118.
- [8] *В. Е. Захаров, С. В. Манаков.* ЖЭТФ. 1976. Т. 71. С. 203; *В. Ю. Новокшенов.* ДАН СССР. 1980. Т. 251. С. 799.
- [9] *J. H. B. Nijhof, S. K. Turitsyn, N. J. Doran.* Dispersion-managed solitons and the inverse scattering transform. In: Nonlinear Guided Waves and Their Applications. OSA Technical Digest. Washington: OSA, 1999. P. 313.
- [10] *P. A. Deift, A. R. Its, X. Zhou.* Ann. Math. 1997. V. 146. P. 149.
- [11] *F. Göhmann, A. G. Izergin, V. E. Korepin, G. G. Pronko.* Int. J. Mod. Phys. B. 1998. V. 12. P. 2409.
- [12] *В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский.* Теория солитонов. Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.
- [13] *А. В. Михайлов, В. Ю. Новокшенов.* Письма в ЖЭТФ. 2001. Т. 73. С. 287.
- [14] *Н. М. Боголюбов, А. Г. Изергин, В. Е. Корепин.* Корреляционные функции интегрируемых систем и квантовый метод обратной задачи. М.: Наука, 1992.