Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Б. Шефтель, Метод группового расслоения, преобразование годографа и неинвариантные решения “небесного уравнения”, *ТМФ*, 2003, том 137, номер 3, 457–468

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf285>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 15:05:43

© 2003 г.

М. Б. Шефтель*

МЕТОД ГРУППОВОГО РАССЛОЕНИЯ, ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГОДОГРАФА И НЕИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ “НЕБЕСНОГО УРАВНЕНИЯ”

Вводится метод группового расслоения, применяемый для построения неинвариантных решений уравнений в частных производных в важном случае “небесного уравнения” из теории гравитационных инстантонов. Показано, что из условия коммутативности пары инвариантных дифференциальных операторов следует набор неинвариантных решений “небесного уравнения”. Во второй части статьи показано, как неинвариантное решение ультрагиперболического “небесного уравнения”, недавно построенное Маньясом и Мартинесом Алонсо, становится вполне очевидным после применения преобразования годографа к “небесному уравнению”. Ввиду присутствия дополнительных симметрий это решение оказывается условно инвариантным в отличие от прежде полученных неинвариантных решений. При попытке построить орбиту такого решения, применяя преобразование годографа к структуре группового расслоения, получаются два инвариантных соотношения, выполненных для решения в виде годографа, которые оказываются дополнительными по отношению к разрешающим уравнениям.

Ключевые слова: “небесное уравнение”, групповое расслоение, неинвариантные решения, преобразование годографа.

1. ВВЕДЕНИЕ

Стандартный метод построения точных решений уравнений в частных производных (УЧП) с помощью анализа группы симметрий состоит в осуществлении симметричной редукции, которая оставляет только *инвариантные решения*, т.е. решения, которые инвариантны по отношению к некоторой подгруппе группы симметрий данного УЧП [1], [2]. Недостаток стандартного симметричного анализа заключается в том, что при применении этого метода теряются все неинвариантные и значительное число инвариантных решений, а именно те из них, которые становятся неинвариантными решениями уравнений, полученных после симметричной редукции.

---

*Feza Gürsey Institute PO Box 6, Cengelkoy, 81220 Istanbul, Turkey; Северо-западный государственный технический университет, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: sheftel@gursey.gov.tr; sheftel@alla.usr.pu.ru

Кроме того, неинвариантные решения УЧП оказываются весьма важными в физических приложениях. Классическим примером служит так называемый $K3$ -инстантон в теории гравитации Эйнштейна, отвечающий поверхности Кюммера в дифференциальной геометрии. Соответствующая кэллорова метрика не имеет векторов Киллинга, но может быть построена, если известны неинвариантные решения комплексного уравнения Монжа–Ампера – задача, остающаяся неразрешенной в течение уже более 150 лет.

Недавно нами было найдено, что подходящим инструментом получения неинвариантных решений нелинейных УЧП, допускающих бесконечномерную группу симметрий, является метод группового расслоения. Этот метод состоит в исследовании совместности данных уравнений с дифференциальными связями, автоморфными относительно бесконечномерной подгруппы симметрий, которая действует транзитивно на подмногообразии общих решений этих уравнений. Исследуя условия совместности для этой автоморфной системы, т.е. разрешающие уравнения, можно найти явное расслоение полного многообразия решений данных уравнений в набор отдельных орбит. В отличие от стандартного метода симметрий, в данном процессе не теряются никакие решения, и можно выделять орбиты неинвариантных решений с помощью выбора подходящих решений разрешающей системы.

Идея метода, восходящего к Ли и Вессиоту [3] и насчитывающего уже более ста лет истории, была переосмыслена в современном виде Овсянниковым (тоже более 30 лет назад, см. работу [1] и библиографию в ней). Наша модификация метода состоит в использовании трех новых важных идей [4]–[6].

1. Использование *инвариантного перекрестного дифференцирования*, которое включает в себя операторы инвариантного дифференцирования и алгебру их коммутаторов, с целью получения разрешающих уравнений и построения их частных решений.

2. *Представление в коммутаторном виде* для разрешающей системы в терминах операторов инвариантного дифференцирования.

3. Метод *инвариантного интегрирования* при решении автоморфной системы.

Все эти идеи будут проиллюстрированы на физически важном примере “небесного уравнения”, также известного как уравнение Бойера–Финли [7]:

$$u_{z\bar{z}} = \kappa(e^u)_{tt} \iff u_{xx} + u_{yy} = \kappa(e^u)_{tt}, \quad \kappa = \pm 1, \quad (1.1)$$

где $u = u(t, z, \bar{z})$. Это уравнение представляет собой непрерывную версию уравнения решетки Тоды, или уравнения $SU(\infty)$ -поля Тоды [8]. Оно возникает в теории гравитационных инстантонов [9]–[11], в которой оно описывает самодуальные пространства Эйнштейна с евклидовой сигнатурой, имеющие всего один вращательный вектор Киллинга. Это уравнение также возникает в общей теории относительности [12] и в других физических теориях.

В данной статье мы применяем основные идеи метода, включающие в себя указанные три идеи, и подробно исследуем основные этапы построения неинвариантных решений на примере “небесного уравнения”. В рамках этого подхода удастся явно построить семейство неинвариантных решений “небесного уравнения”, параметризованное двумя функциональными параметрами.

Далее в работе обсуждается новое неинвариантное решение ультрагиперболического “небесного уравнения” (1.1) с параметром $\kappa = 1$, недавно полученное Маньясом и Мартинецом Алонсо с помощью преобразования годографа связанных с этим уравнением систем уравнений гидродинамического типа [13] (обобщение подхода см. также в [14]). Укажем здесь, что если применить преобразование годографа собственно к “небесному уравнению”, то сразу становится ясным, какую дифференциальную связь надо наложить, чтобы непосредственно получить решение Маньяса и Мартинеца Алонсо, не используя гидродинамические системы или же общую теорему, выведенную в работе [13]. Будет показано, что у этого решения имеются дополнительные симметрии, зависящие от восьми произвольных функций от u , которые не являются симметриями “небесного уравнения”. Поэтому такое решение оказывается условно-инвариантным [15], но не инвариантным решением. Сходные рассуждения показывают, что симметрии решений, полученных Кальдербанком и Тодом [10] и Мартиной, Шефтелем и Винтерницем [5], совпадают с симметриями самого “небесного уравнения”, а потому эти решения, у которых не наблюдается дополнительных симметрий, не являются условно-инвариантными. Наконец, преобразование годографа будет применено к полной структуре группового расслоения. Это приведет к соотношениям между дифференциальными инвариантами, справедливым для решения из работы [13], что вместе с разрешающими уравнениями позволяет дать частичное описание орбит этого решения. Нами пока еще не построено решение разрешающей системы, которое отвечало бы орбите этого решения в виде годографа из работы [13]. Поскольку найденные нами дополнительные соотношения не образуют полного набора инвариантных дифференциальных связей, однозначно выделяющего решение в виде годографа, соответствующее решение разрешающей системы должно порождать орбиты более общих решений уравнения (1.1) как с параметром $\kappa = 1$, так и с параметром $\kappa = -1$. Это исследование проводится в настоящее время.

2. АЛГЕБРА СИММЕТРИЙ, ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ И АВТОМОРФНАЯ СИСТЕМА

Начнем с *алгебры симметрий* генераторов точечных преобразований “небесного уравнения” (1.1) [5]:

$$\begin{aligned} T &= \partial_t, & G &= t\partial_t + 2\partial_u, \\ X_a &= a(z)\partial_z + \bar{a}(\bar{z})\partial_{\bar{z}} - (a'(z) + \bar{a}'(\bar{z}))\partial_u, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $a(z)$ – произвольная голоморфная функция от z , а штрих обозначает производную функции по аргументу.

Алгебра Ли генераторов симметрий (2.1) задается коммутационными соотношениями

$$[T, G] = T, \quad [T, X_a] = 0, \quad [G, X_a] = 0, \quad [X_a, X_b] = X_{ab' - ba'}, \quad (2.2)$$

которые показывают, что генераторы X_a конформных преобразований образуют подалгебру алгебры Ли (2.2). Эта подалгебра бесконечномерна, поскольку генераторы X_a

зависят от функции $a(z)$. Соответствующие конечные преобразования образуют бесконечномерную подгруппу симметрий уравнения (1.1), поскольку вместо группового параметра они также содержат зависимость от произвольной голоморфной функции от z . Эта бесконечномерная *группа конформных симметрий* будет использоваться для построения группового расслоения.

Найдем затем *дифференциальные инварианты* подгруппы симметрий конформных преобразований. Они представляют собой инварианты для всех генераторов X_a , действующих в *продолженных пространствах*, а потому могут содержать зависимости от независимых переменных, неизвестных и от частных производных от этих неизвестных, допускаемых в данном порядке продолжения. *Порядок* дифференциального инварианта определяется как порядок старшей производной, зависимость от которой содержится в инварианте. Старший порядок N дифференциального инварианта должен быть выше или равен порядку уравнения ($N \geq 2$), и при этом должны возникать n функционально независимых инвариантов с $n > p + q$, где p и q — соответствующие числа независимых и зависимых переменных. Поэтому должно выполняться условие $p = 3$, $q = 1$, $n > 4$, $N \geq 2$.

Стандартное вычисление в случае $N = 2$ приводит к $n = 5$ функционально независимым дифференциальным инвариантам порядка не выше второго:

$$t, \quad u_t, \quad u_{tt}, \quad \rho = e^{-u} u_{z\bar{z}}, \quad \eta = e^{-u} u_{zt} u_{\bar{z}t}, \quad (2.3)$$

причем все они вещественны. Поэтому можно выразить “небесное уравнение” (1.1) исключительно в терминах дифференциальных инвариантов $u_{tt} = \kappa\rho - u_t^2$.

На следующем этапе надо выбрать общий вид автоморфной системы. Выберем $p = 3$ инвариантов t, u_t, ρ в качестве инвариантных независимых переменных, число которых совпадает с соответствующим числом в исходном уравнении (1.1), и потребуем, чтобы остающиеся инварианты были функциями от выбранных. Это задает общий вид *автоморфной системы*, которая включает в себя и исследуемое уравнение, выраженное в терминах инвариантов (2.3):

$$u_{tt} = \kappa\rho - u_t^2, \quad \eta = F(t, u_t, \rho). \quad (2.4)$$

Вещественная функция F в правой части уравнения должна быть определена из *разрешающих уравнений*, представляющих собой условия совместности для системы (2.4). Тогда будем говорить, что система (2.4) обладает *свойством автоморфности*, т.е. любое ее решение может быть получено из любого другого решения с помощью некоторого преобразования из группы конформных симметрий.

3. ОПЕРАТОРЫ ИНВАРИАНТНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ И БАЗИС ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИНВАРИАНТОВ

Следующей задачей является нахождение *операторов инвариантного дифференцирования*. Они представляют собой линейные комбинации полных производных D_t ,

$D_z, D_{\bar{z}}$ по независимым переменным $t, z, \bar{z}$ с коэффициентами, зависящими от локальных координат в продолженном пространстве. Эти комбинации выделяются тем специальным свойством, что при действии на любой (дифференциальный) инвариант они отображают его опять-таки в дифференциальный инвариант. Вследствие этого такие дифференциальные операторы коммутируют с любым бесконечно продолженным генератором $\hat{X}_a^\infty$ группы конформных симметрий. Будучи дифференциальными операторами первого порядка, они повышают порядок дифференциального инварианта на единицу. Полное число независимых операторов инвариантного дифференцирования очевидно равно трем, т.е. числу независимых переменных.

Тем самым получим *базис операторов инвариантного дифференцирования* [5], [6]:

$$\delta = D_t, \quad \Delta = e^{-u} u_{zt} D_z, \quad \bar{\Delta} = e^{-u} u_{zt} D_{\bar{z}}. \quad (3.1)$$

На следующем этапе следует найти *базис дифференциальных инвариантов*, который определяется как минимальный конечный набор (дифференциальных) инвариантов группы симметрий таких, что любой другой дифференциальный инвариант для этой группы может быть получен из этого базиса с помощью применения конечного числа инвариантных дифференцирований и операций взятия сложных функций. Доказательство существования и конечности такого базиса было дано Трессе [16], а в современном виде представлено Овсянниковым [1].

В данном примере базис дифференциальных инвариантов есть набор трех инвариантов t, u_t, ρ , в то время как два других инварианта u_{tt} и η уравнения (2.3) задаются соотношениями

$$u_{tt} = \delta(u_t), \quad \eta = e^{-u} u_{zt} u_{\bar{z}t} = \Delta(u_t) = \bar{\Delta}(u_t). \quad (3.2)$$

Все прочие функционально независимые инварианты старших порядков могут быть получены с помощью действия операторами инвариантного дифференцирования на элементы базиса $\{t, u_t, \rho\}$. В частности, в нашей конструкции будут использоваться следующие инварианты третьего порядка, получаемые из инварианта ρ второго порядка с помощью инвариантных дифференцирований:

$$\sigma = \Delta(\rho), \quad \bar{\sigma} = \bar{\Delta}(\rho), \quad \tau = \delta(\rho) \equiv D_t(\rho). \quad (3.3)$$

4. КОММУТАТОРНАЯ АЛГЕБРА ИНВАРИАНТНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Операторы δ, Δ и $\bar{\Delta}$, заданные соотношениями (3.1), образуют *коммутаторную алгебру*, которая представляет собой алгебру Ли над полем инвариантов группы конформных симметрий [1].

Эту алгебру можно упростить, если ввести два новых оператора инвариантного дифференцирования Y и $\bar{Y}$ вместо старых операторов Δ и $\bar{\Delta}$ и две новые переменные λ и $\bar{\lambda}$ вместо старых переменных σ и $\bar{\sigma}$:

$$\Delta = \eta Y, \quad \bar{\Delta} = \eta \bar{Y}, \quad \sigma = \eta \lambda, \quad \bar{\sigma} = \eta \bar{\lambda}. \quad (4.1)$$

Получаемая при этом алгебра имеет вид

$$\begin{aligned} [\delta, Y] &= \left(\kappa \bar{\lambda} - 3u_t - \frac{\delta(\eta)}{\eta} \right) Y, & [\delta, \bar{Y}] &= \left(\kappa \lambda - 3u_t - \frac{\delta(\eta)}{\eta} \right) \bar{Y}, \\ [Y, \bar{Y}] &= \frac{\tau + u_t \rho}{\eta} (Y - \bar{Y}). \end{aligned} \quad (4.2)$$

В терминах операторов δ , Y и $\bar{Y}$ общий вид (2.4) автоморфной системы представляется как

$$\delta(u_t) = \kappa \rho - u_t^2, \quad Y(u_t) = 1 \quad (\bar{Y}(u_t) = 1), \quad (4.3)$$

где первое уравнение есть “небесное уравнение”, а второе следует из второго соотношения в системе (3.2). Здесь в уравнениях (4.1) и в коммутационных соотношениях (4.2) положено $\eta = F$ в соответствии со вторым из уравнений системы (2.4). Тогда получим

$$Y = \frac{1}{F} \Delta, \quad \bar{Y} = \frac{1}{F} \bar{\Delta}, \quad Y(\rho) = \lambda, \quad \bar{Y}(\rho) = \bar{\lambda}. \quad (4.4)$$

5. РАЗРЕШАЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ

Разрешающая система уравнений представляет собой набор условий совместности между исследуемым уравнением и уравнениями, добавленными к нему для получения системы условий автоморфизмов. В нашем случае мы будем требовать совместности двух уравнений (4.3), что приводит к ограничениям для функции $F(t, u_t, \rho)$ в правой части второго уравнения в системе (2.4). Новым свойством, возникающим при указанной модификации метода, будет то, что построение происходит явно инвариантным образом с использованием *инвариантного перекрестного дифференцирования* [4]–[6], включающего операторы δ , Y и $\bar{Y}$. Получаемые при этом пять разрешающих уравнений имеют вид [5], [6]

$$\delta(F) = [\kappa(\lambda + \bar{\lambda}) - 5u_t]F, \quad (5.1)$$

$$F(Y(\bar{\lambda}) - \bar{Y}(\lambda)) = (\tau + u_t \rho)(\lambda - \bar{\lambda}), \quad (5.2)$$

$$\delta(\lambda) = Y(\tau) + 2u_t \lambda - \kappa \lambda^2, \quad (5.3)$$

$$\delta(\bar{\lambda}) = \bar{Y}(\tau) + 2u_t \bar{\lambda} - \kappa \bar{\lambda}^2, \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} F(Y(\bar{\lambda}) + \bar{Y}(\lambda)) &= -(\tau + u_t \rho)(\lambda + \bar{\lambda}) + \\ &+ 2\kappa[\delta(\tau) + 4u_t \tau + 2F + \kappa \rho^2 + 2u_t^2 \rho]. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Использованные здесь величины λ , $\bar{\lambda}$, τ определены выше (см. уравнения (3.3), (4.4)).

Уравнения (5.1)–(5.5) образуют замкнутую *разрешающую систему*, в которой дифференциальный инвариант второго порядка $\eta = F$ и дифференциальные инварианты третьего порядка λ , $\bar{\lambda}$ и τ суть неизвестные функции независимых переменных t , u_t , ρ .

Явный вид уравнений (5.1)–(5.5) можно получить, если использовать *редуцированные операторы* инвариантного дифференцирования (см. (3.1), (4.3), (4.4)):

$$\delta = \partial_t + (\kappa \rho - u_t^2) \partial_{u_t} + \tau \partial_\rho, \quad Y = \partial_{u_t} + \lambda \partial_\rho, \quad \bar{Y} = \partial_{u_t} + \bar{\lambda} \partial_\rho. \quad (5.6)$$

Коммутационные соотношения (4.2) выполнялись тождественно в случае операторов инвариантного дифференцирования. Напротив, в случае редуцированных операторов (5.6) эти коммутационные соотношения и даже тождество Якоби удовлетворяются только при условии выполнения разрешающих уравнений. Более того, теорема, доказанная в работе [5], утверждает, что коммутаторная алгебра (4.2) операторов инвариантного дифференцирования $\delta, Y, \bar{Y}$ вкупе с тождеством Якоби задает коммутационное представление для разрешающей системы.

6. РЕШЕНИЯ РАЗРЕШАЮЩЕЙ СИСТЕМЫ И “НЕБЕСНОГО УРАВНЕНИЯ”

Для того чтобы найти частные решения разрешающей системы, наложим различные упрощающие ограничения. Наиболее очевидные ограничения типа $\bar{Y} = Y$ или $F = 0$ приводят к инвариантным решениям. Эти решения или известны, или могут быть получены гораздо более простыми стандартными способами. Более слабое предположение, приводящее к неинвариантным решениям, состоит в том, чтобы считать операторы Y и $\bar{Y}$ коммутирующими:

$$[Y, \bar{Y}] = 0 \iff \tau = -u_t \rho, \quad (6.1)$$

но при этом $\bar{Y} \neq Y$, т.е. $\bar{\lambda} \neq \lambda$ и $F \neq 0$. С помощью этого анзаца можно найти *частное решение разрешающей системы* [5] ($2\kappa\rho - u_t^2 \geq 0$):

$$\tau = -u_t \rho, \quad \lambda = \kappa u_t + i\sqrt{2\kappa\rho - u_t^2}, \quad \bar{\lambda} = \kappa u_t - i\sqrt{2\kappa\rho - u_t^2}, \quad (6.2)$$

и нам не требуется знать выражение для F , чтобы найти решения уравнения (1.1).

Для воссоздания решений “небесного уравнения”, начиная с частного решения (6.2) разрешающей системы, будем использовать процедуру *инвариантного интегрирования*, которая сводится к преобразованию уравнений к виду *точной инвариантной производной* [5]. Тогда в таком уравнении можно опустить оператор инвариантного дифференцирования, добавив в него член, представляющий собой *произвольный элемент ядра* этого оператора и играющий роль константы интегрирования. Эта процедура описана детально в работах [5], [6].

В данной статье мы представляем только окончательный результат решения “небесного уравнения” [5] (см. также работу [10] относительно представления (6.4)):

$$u(t, z, \bar{z}) = \ln \left| \frac{(t + b(z))c'(z)}{c(z) + \bar{c}(\bar{z})} \right|^2, \quad \kappa = 1, \quad (6.3)$$

$$u(t, z, \bar{z}) = \ln \left| \frac{(t + b(z))c'(z)}{1 + |c(z)|^2} \right|^2, \quad \kappa = -1. \quad (6.4)$$

Здесь $b(z)$ и $c(z)$ суть произвольные голоморфные функции. Одна из них фундаментальна и параметризует частную орбиту решений, другая задается преобразованием конформной симметрии и поэтому может быть устранена. Для $b(z)$ и $c(z)$ общего вида эти решения оказываются неинвариантными [5].

7. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГОДОГРАФА “НЕБЕСНОГО УРАВНЕНИЯ” КАК КОРОТКИЙ ПУТЬ К ПОЛУЧЕНИЮ ЕГО ЧАСТНОГО РЕШЕНИЯ

Преобразование годографа состоит в перестановке ролей неизвестной переменной u и одной из независимых переменных t : $u = u(t, z, \bar{z}) \mapsto t = t(u, z, \bar{z})$. Преобразованное уравнение (1.1) при этом принимает вид

$$(t_z t_{\bar{z}} - \kappa e^u) t_{uu} = t_u (t_{\bar{z}} t_{uz} + t_z t_{u\bar{z}} - t_u t_{z\bar{z}} - \kappa e^u). \quad (7.1)$$

Имеет место очевидная упрощающая дифференциальная подстановка

$$t_z t_{\bar{z}} - \kappa e^u = 0, \quad (7.2)$$

допустимая лишь в случае $\kappa = 1$, поскольку $t_z t_{\bar{z}} > 0$. В самом деле, эта подстановка вместе с формулой (7.1) приводит к линейной зависимости функции t от переменных z и $\bar{z}$, а потому $t_z = e^{u/2+i\alpha(u)}$, $t_{\bar{z}} = e^{u/2-i\alpha(u)}$, что дает следующий окончательный результат для решения уравнения (7.1):

$$t = e^{u/2+i\alpha(u)} z + e^{u/2-i\alpha(u)} \bar{z} + h(u), \quad (7.3)$$

где $\alpha(u)$, $h(u)$ суть произвольные функции. Это и есть решение, приведенное в работе [13].

8. СИММЕТРИИ НЕИНВАРИАНТНЫХ РЕШЕНИЙ

Точечные симметрии уравнения (7.1) совпадают с симметриями (2.1) исходного уравнения (1.1), потому что преобразование годографа представляет собой также точечное преобразование. Так как решение (7.3) задает общее решение системы дифференциальных уравнений (7.1), (7.2), симметрии этого решения совпадают с точечными симметриями данной системы. С использованием пакета компьютерных программ “Liepde”, используемого вместе с пакетом для решений УЧП “Crack”, разработанным Вольфом в рамках компьютерной программы REDUCE 3.6 или 3.7, удалось найти генератор симметрии для решения (7.3), который содержит функциональную зависимость от восьми произвольных функций от u :

$$X = a(u)\partial_u + [2zg(u) + 2\bar{z}e^u b(u) + te(u) + h(u)]\partial_t + \\ + [tb(u) + zc(u) + d(u)]\partial_z + \{\bar{z}[2e(u) - a(u) - c(u)] + f(u) + tg(u)e^{-u}\}\partial_{\bar{z}}. \quad (8.1)$$

Поскольку настоящее решение зависит только от двух произвольных функций $\alpha(u)$, $h(u)$, очевидно, что должны существовать симметрии, допускаемые решением (7.3), относительно которых это решение будет инвариантно при каждом фиксированном значении параметров $\alpha(u)$, $h(u)$. Эти симметрии вовсе не являются симметриями “небесного уравнения”, а потому решение (7.3) задает условно-инвариантное (но не инвариантное) решение в определениях Леви и Винтерница [15].

Изучим аналогичным образом симметрии решений (6.3) и (6.4) “небесного уравнения” (1.1), полученные Кальдербанком и Тодом [10] и нами в статье [5]. Они представляют собой общие решения системы УЧП, состоящей из исходного уравнения (1.1) и дифференциальных уравнений

$$u_{z\bar{z}}t = 0, \quad u_{zz\bar{z}} = u_z u_{z\bar{z}} + e^u u_{zt} [\kappa u_t + i \sqrt{2\kappa e^{-u} u_{z\bar{z}} - u_t^2}]$$

с добавлением комплексно-сопряженного к последнему уравнению, что следует из аназа (6.2) с использованием определений (2.3), (3.3) величин τ , λ , $\bar{\lambda}$, ρ . Симметрии решений (6.3) и (6.4) с произвольными (не фиксированными!) функциями $b(z)$, $c(z)$ совпадают с симметриями системы этих четырех УЧП, которые оказываются в точности симметриями (2.1) исходного уравнения (1.1). Следовательно, эти решения при фиксированных $b(z)$, $c(z)$ общего положения не имеют симметрий, а потому не являются условно-инвариантными решениями¹⁾. Таким образом, метод группового расслоения представляется единственным регулярным методом, позволяющим получать такие решения.

9. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИНВАРИАНТОВ И ИНВАРИАНТНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Основная задача на этом этапе состоит в понимании того, как можно получить решение (7.3) с помощью метода группового расслоения, т.е. определить орбиты этого решения.

На первом этапе нужно построить преобразование годографа всей структуры группового расслоения. В этом разделе осуществляется преобразование годографа дифференциальных инвариантов и инвариантных дифференциальных операторов, а в следующем разделе будет построено преобразование годографа для разрешающих уравнений.

Поскольку преобразование годографа представляет собой точечное преобразование, оно сохраняет точечные симметрии, дифференциальные инварианты и операторы инвариантного дифференцирования. Изменим определения для дифференциальных инвариантов ρ , η и инвариантных дифференциальных операторов после преобразования годографа, и отныне будем отмечать волнистой чертой сверху старые инварианты и операторы.

Набор дифференциальных инвариантов до второго порядка включительно после преобразования годографа состоит из новой неизвестной $t = t(u, z, \bar{z})$, ее производных $t_u = 1/u_t$, $t_{uu} = -u_{tt}/u_t^3$ и еще двух инвариантов

$$\rho = e^{-u} [t_z t_{\bar{z}} t_{uu} + t_u^2 t_{z\bar{z}} - t_u (t_{\bar{z}} t_{uz} + t_z t_{u\bar{z}})], \quad \tilde{\rho} = e^{-u} u_{z\bar{z}} = -\frac{\rho}{t_u^3}, \quad (9.1)$$

$$\eta = e^{-u} (t_z t_{uu} - t_u t_{uz}) (t_{\bar{z}} t_{uu} - t_u t_{u\bar{z}}), \quad \tilde{\eta} = e^{-u} u_{zt} u_{\bar{z}t} = \frac{\eta}{t_u^6}. \quad (9.2)$$

¹⁾ Не следует смешивать свойство инвариантности частного решения при фиксированном выборе произвольных функций со свойством инвариантности его орбиты в случае, когда произвольные функции могут меняться при преобразовании симметрии. Орбита всегда представляет собой инвариантное многообразие.

Явно инвариантный вид записи преобразованного “небесного уравнения” (7.1) следующий:

$$t_{uu} = \kappa\rho + t_u. \quad (9.3)$$

Обозначим через D_u полную производную по переменной u при постоянных $z, \bar{z}$. Поскольку оператор инвариантного дифференцирования $\delta = D_t = (1/t_u)D_u$ есть полная производная по инварианту t , его определение не меняется: $\tilde{\delta} = \delta$. Определениями величин $\Delta, \bar{\Delta}$ становятся ($\tilde{\Delta} = -(1/t_u^4)\Delta, \tilde{\bar{\Delta}} = -(1/t_u^4)\bar{\Delta}$)

$$\Delta = e^{-u}(t_{\bar{z}}t_{uu} - t_u t_{u\bar{z}})(t_z D_u - t_u D_z), \quad \bar{\Delta} = e^{-u}(t_z t_{uu} - t_u t_{uz})(t_{\bar{z}} D_u - t_u D_{\bar{z}}). \quad (9.4)$$

Возьмем t, t_u, ρ в качестве независимых инвариантных переменных в соответствии с предыдущим выбором. Действие новых операторов инвариантного дифференцирования на независимые переменные принимает вид

$$\begin{aligned} \delta(t) = 1, \quad \delta(t_u) = \kappa \frac{\rho}{t_u} + 1, \quad \Delta(t) = \bar{\Delta}(t) = 0, \quad \Delta(t_u) = \bar{\Delta}(t_u) = \eta, \\ \delta(\rho) = \tau, \quad \Delta(\rho) = \sigma, \quad \bar{\Delta}(\rho) = \bar{\sigma}, \end{aligned} \quad (9.5)$$

где для величины $\delta(t_u)$ было использовано уравнение (9.3).

Новые инвариантные операторы $Y = (1/\eta)\Delta$ и $\bar{Y} = (1/\eta)\bar{\Delta}$ обладают свойствами

$$Y(t) = 0, \quad \bar{Y}(t) = 0, \quad Y(t_u) = \bar{Y}(t_u) = 1, \quad Y(\rho) = \lambda, \quad \bar{Y}(\rho) = \bar{\lambda}. \quad (9.6)$$

10. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГОДОГРАФА РАЗРЕШАЮЩИХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим автоморфное уравнение

$$\eta = \Delta(t_u) = F(t, t_u, \rho) \quad (10.1)$$

вкупе с преобразованным “небесным уравнением” (9.3) и получим разрешающие уравнения как условия совместности для этих двух уравнений. Получающиеся при этом пять уравнений совпадают с преобразованием годографа для старых разрешающих уравнений с единственным изменением, вызванным различием в определениях дифференциальных инвариантов и инвариантных дифференциальных операторов:

$$\delta(F) = \frac{1}{t_u}[\kappa(\lambda + \bar{\lambda}) + 1]F, \quad (10.2)$$

$$F(Y(\bar{\lambda}) - \bar{Y}(\lambda)) = (\lambda - \bar{\lambda})\left(t_u \tau - 3\kappa \frac{\rho^2}{t_u} + \frac{2}{t_u}F - 2\rho\right), \quad (10.3)$$

$$\delta(\lambda) = Y(\tau) + \kappa \frac{\lambda}{t_u} \left(\frac{\rho}{t_u} - \lambda\right), \quad (10.4)$$

$$\delta(\bar{\lambda}) = \bar{Y}(\tau) + \kappa \frac{\bar{\lambda}}{t_u} \left(\frac{\rho}{t_u} - \bar{\lambda}\right), \quad (10.5)$$

$$\begin{aligned} F(Y(\bar{\lambda}) + \bar{Y}(\lambda)) = (\lambda + \bar{\lambda})\left(-t_u \tau + 4\frac{F}{t_u} + 3\kappa \frac{\rho^2}{t_u} + 2\rho\right) + \\ + 2\kappa t_u^2 \delta(\tau) - (12\rho + 4\kappa t_u)\left(\tau + \frac{F}{t_u^2} - \kappa \frac{\rho^2}{t_u^2} - \frac{\rho}{t_u}\right). \end{aligned} \quad (10.6)$$

Тем самым получаются четыре неизвестных F , λ , $\bar{\lambda}$ и τ при трех независимых переменных t, u, ρ . Здесь через $\delta, Y, \bar{Y}$ обозначены редуцированные операторы (см. (9.5), (9.6)):

$$\delta = \partial_t + \left(\kappa \frac{\rho}{t_u} + 1 \right) \partial_{t_u} + \tau \partial_\rho, \quad Y = \partial_{t_u} + \lambda \partial_\rho, \quad \bar{Y} = \partial_{t_u} + \bar{\lambda} \partial_\rho. \quad (10.7)$$

11. НА ПУТИ К ИНВАРИАНТНОМУ ОПИСАНИЮ РЕШЕНИЯ В ВИДЕ ГОДОГРАФА

Наша конечная цель состоит в нахождении полного набора независимых дополнительных соотношений между дифференциальными инвариантами, которые выполняются для решения в виде годографа из работы [13]. Объединяя их с разрешающими уравнениями, можно было бы прийти к частному решению разрешающей системы, которое выбирало бы орбиту этого решения и сделало возможным восстановление решения (7.3). Используя эти инвариантные соотношения при выборе противоположных знаков параметра κ , можно рассчитывать на получение новых неинвариантных решений евклидова “небесного уравнения” (1.1) при $\kappa = -1$, представляющих бóльший физический интерес.

К настоящему времени нам удалось найти только два дополнительных соотношения между дифференциальными инвариантами, которые удовлетворяются тождественно на решении (7.3):

$$t_u \tau + \frac{\Phi}{t_u} = \frac{1}{4} [(2\rho + t_u)(\lambda + \bar{\lambda}) - i\sqrt{4\Phi - t_u^2}(\lambda - \bar{\lambda})], \quad (11.1)$$

$$\Delta(\Phi) - \bar{\Delta}(\Phi) = \frac{i}{4} (4\Phi - t_u^2) [\sqrt{4\Phi - t_u^2}(\lambda + \bar{\lambda}) + i(2\rho + t_u)(\lambda - \bar{\lambda})], \quad (11.2)$$

где $\Phi = F - \rho^2 - t_u \rho$. Можно использовать первое из этих уравнений для исключения переменной τ из оставшихся уравнений. Оказывается, что этих дополнительных уравнений все еще недостаточно, чтобы решить разрешающие уравнения. В данный момент мы находимся в процессе поиска недостающих соотношений.

12. ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ОБЗОР

В работе было дано краткое описание нашего подхода к методу группового расслоения как к способу нахождения неинвариантных решений УЧП, допускающих бесконечномерную группу симметрий. Метод был проиллюстрирован на примере физически значимого “небесного уравнения” (или уравнения Бойера–Финли). Было показано, как из условия коммутативности двух операторов инвариантного дифференцирования получаются неинвариантные решения такого уравнения.

Далее в статье обсуждалось решение в виде годографа Маньяса и Мартинеца Алонсо. Было показано, как оно естественным образом возникает при применении преобразования годографа к “небесному уравнению” вне всякой связи с гидродинамическими системами. Оказалось, что это решение обладает дополнительными симметриями по

сравнению с исходным уравнением, следствием чего является условная инвариантность этого решения, выделяющая его из ранее полученных неинвариантных решений.

Конечной целью данной работы было построение полного набора независимых дополнительных соотношений между дифференциальными инвариантами, которым удовлетворяет решение в виде годографа из работы [13], и использование этих соотношений для построения такого частного решения разрешающей системы, которое выделяло бы орбиту решения в виде годографа. На этом пути можно надеяться на получение более общих решений разрешающих уравнений, если отказаться от одного из дополнительных соотношений между дифференциальными инвариантами и получить, как следствие, более общие решения “небесного уравнения” в виде годографа. Более того, эти дополнительные соотношения не должны быть чувствительны к выбору знака параметра κ , как это было в случае решений (6.3) и (6.4), а потому мы бы могли восстановить решения уравнения (7.1) при противоположном выборе знака $\kappa = -1$, что представляется невозможным при использовании метода работы [13]. Эта программа в полном объеме до сих пор не выполнена, и в данной работе представлены лишь некоторые промежуточные результаты.

Благодарности. Автор благодарит Е. Ферапонтова и Я. Нутку за полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] Л. В. Овсянников. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
- [2] П. Олвер. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989; *P. Winternitz*. Group theory and exact solutions of nonlinear partial differential equations. In: Integrable Systems, Quantum Groups and Quantum Field Theories. Proc. NATO Adv. Study Inst., 23rd Gift Int. Seminar on Recent Problems in Mathematical Physics (Salamanca, Spain, June 15–27, 1992). NATO ASI Ser. C: Math. Phys. Sci. V. 409. Eds. L. A. Ibort, M. A. Rodriguez. Dordrecht: Kluwer, 1993. P. 429–495.
- [3] S. Lie. Math. Annal. 1884. V. 24. P. 52–89; E. Vessiot. Acta Math. 1904. V. 28. P. 307–349.
- [4] Y. Nutku, M. B. Sheftel. J. Phys. A. 2001. V. 34. P. 137–156; ТМФ. 2001. Т. 127. С. 465–474.
- [5] L. Martina, M. B. Sheftel, P. Winternitz. J. Phys. A. 2001. V. 34. P. 9243–9263.
- [6] M. B. Sheftel. Method of group foliation and non-invariant solutions of invariant equations. In: Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2002. V. 43. Part 1. P. 215–224; Eur. Phys. J. B. 2002. V. 29. P. 203–206.
- [7] C. P. Boyer, J. D. Finley III. J. Math. Phys. 1982. V. 23. P. 1126–1130.
- [8] I. A. B. Strachan. J. Phys. A. 1996. V. 29. P. 6117–6124.
- [9] T. Eguchi, P. B. Gilkey, A. J. Hanson. Phys. Rep. 1980. V. 66. P. 213–393.
- [10] D. M. J. Calderbank, P. Tod. Diff. Geometry Appl. 2001. V. 14. P. 199–208.
- [11] Y. Nutku, M. B. Sheftel. A family of heavenly metrics. gr-qc/0105088.
- [12] R. S. Ward. Class. Q. Grav. 1990. V. 7. P. L95–L98.
- [13] M. Mañas, L. Martínez Alonso. A hodograph transformation which applies to the heavenly equation. nlin.SI/0209050.
- [14] E. V. Ferapontov, D. A. Korotkin, V. A. Shramchenko. Class. Q. Grav. 2002. V. 19. P. L1–L6.
- [15] D. Levi, P. Winternitz. J. Phys. A. 1989. V. 22. P. 2915–2924.
- [16] A. Tresse. Acta Math. 1894. V. 18. P. 1–88.