Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Х. Виллароел, Случайные возмущения линейных солитонов уравнения
Кадамцева–Петвиашвили, *ТМФ*, 2003, том 137, номер 3, 469–483

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf286>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 12:11:05

© 2003 г.

Х. Виллароел*

СЛУЧАЙНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СОЛИТОНОВ УРАВНЕНИЯ КАДОМЦЕВА–ПЕТВИАШВИЛИ

Рассматриваются свойства локализованных решений уравнения Кадомцева–Петвиашвили, возмущенного случайным шумом. Установлено, что в случае белого шума бегущие волны асимптотически разрушаются; определены распределение местоположения и время прихода волны. Для обобщенного процесса Орнштейна–Уленбека показано, что единственным результатом воздействия шума является случайность асимптотического местоположения волны. В частности, если имеется достаточно сильный механизм ослабления шума, то случайная волна совпадает асимптотически с волной в невозмущенном случае. Рассмотрена также линеаризация соответствующей задачи Коши на плоскости, отвечающей начальным условиям такого рода.

Ключевые слова: стохастические интегрируемые уравнения, солитоны, случайные волны.

1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнение Кадомцева–Петвиашвили (КП)

$$U_t + U_{xxx} + 6UU_x + 3\partial_x^{-1}U_{yy} = 0, \quad U(x, y, t)|_{t=0} = U_0(x, y), \quad (1)$$

является важным, физически значимым уравнением, которое описывает двумерные волны на воде малой амплитуды, медленно изменяющиеся в направлении, перпендикулярном направлению распространения волны, при наличии поверхностного натяжения. Здесь

$$\partial_x^{-1}U(x, y, t) \equiv \int_{-\infty}^x U(x', y, t) dx', \quad U_x \equiv \partial_x U(x, y, t)$$

и т.д. Подробное обсуждение уравнения КП, его физических истоков, солитонных решений и интегрируемости можно найти в [1]. Полное математическое описание решения и его свойств дано в [2].

Естественная и интересная задача заключается в том, чтобы установить, как зависящий от времени случайный шум $\dot{\zeta}(t)$ воздействует на локализованные решения дифференциальных уравнений. В работе [3] было найдено решение уравнения Кортевега–де

*Universidad de Salamanca, Facultad de Ciencias, Plaza Merced, 37008 Salamanca, SPAIN.
E-mail: javier@usal.es

Фриза (КдФ), возмущенного аддитивно белым шумом $\dot{\zeta}(t) = \dot{W}(t)$, и были установлены свойства локализованных решений. Здесь $W(t)$ обозначает обычный процесс броуновского движения (БД), т.е. гауссов случайный процесс с нулевым средним и дисперсией, линейно растущей по времени, а $\dot{W}(t)$ – формальная производная по времени. Было показано, что белый шум приводит к исчезновению решения (в смысле среднего) на больших временах. Вслед за этой первой публикацией другие авторы [4] рассмотрели некоторые аспекты того, как введение шума (и белого, и окрашенного) влияет на решения уравнения КдФ. Уравнение Бюргерса было исследовано в работах [4]–[6]; были определены статистические средние некоторых его решений при $t \rightarrow \infty$. Общим явлением, обнаруженным во всех этих работах, было рассеяние солитона вследствие случайного шума вне зависимости от вида этого шума (белый или окрашенный) и от того, аддитивно или мультипликативно (т.е. в виде множителя при производных) он входил в уравнение.

В настоящей работе рассматривается уравнение КП, возмущенное случайным шумом $\dot{\zeta}(t)$, который входит в виде множителя при производной, т.е. рассматривается уравнение

$$u_t + u_{xxx} + 6uu_x + 3\partial_x^{-1}u_{yy} = u_x\dot{\zeta}(t), \quad u(x, y, t)|_{t=0} = u_0(x, y). \quad (2)$$

Интересными решениями уравнения (1) являются линейные солитоны, которые представляют собой локализованные решения, затухающие всюду, за исключением некоторой прямой на плоскости. Мы сосредоточим свое внимание на статистических свойствах таких решений. Линеаризация соответствующей задачи Коши на плоскости, отвечающей начальным условиям такого рода, рассматривается в разделе 5.

Физический белый шум соответствует БД: $\dot{\zeta}(t) \approx \dot{W}(t)$. Хотя процесс БД $W(t)$ является непрерывным, можно доказать, что $\dot{W}$ не существует в любой момент времени. Поэтому непротиворечивая теория стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) с белым (или любым другим негладким) шумом должна придавать смысл самому понятию СДУ. Как с математической, так и с физической точек зрения для этого естественно использовать теорию Ито, в которой не применимы обычные правила дифференцирования, или теорию Стратоновича, в которой классические правила дифференциального исчисления применимы. Интерпретация последней станет понятна из последующего изложения. Отметим, что возникающие при наличии шума общего вида случайные свойства уравнения Бюргерса (как в теории Ито, так и в теории Стратоновича) были установлены в [5]. Интересующийся читатель может обратиться к монографиям [7]–[9].

В данном случае мы обнаруживаем, что бегущие волны асимптотически разрушаются, и точно определяем скорость затухания волн по амплитуде. Мы изучаем также основные статистические свойства волны, такие как распределение ее местоположения и время прихода. При некоторых частных способах выбора окрашенного шума (для обобщенного процесса Орнштейна–Уленбека (ОУ)) мы показываем, что, напротив, единственным результатом воздействия шума является случайность асимптотического местоположения волны. В частности, если имеется достаточно сильный механизм ослабления шума $\dot{\zeta}(t)$, то случайная волна совпадает асимптотически с волной в невозмущенном случае. Это замечательное свойство, которое означает, что определенные виды шума

не разрушают локализованное решение и могут даже вовсе не оказывать никакого влияния на его асимптотическое поведение.

2. ОСНОВНЫЕ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим решение уравнения (2). Если шум удовлетворяет условию $\zeta(t)|_{t=0} = 0$, то, как можно убедиться при помощи прямого вычисления, решение $u(x, y, t)$ задачи с начальными условиями для стохастического уравнения (2) связано с решением $U(x, y, t)$ невозмущенной задачи с начальными условиями (1) соотношением

$$u(x, y, t) = U(x + \zeta(t), y, t). \quad (3)$$

Уравнение (1) обладает локализованными решениями, которые затухают всюду, за исключением некоторой прямой на плоскости: $\mathcal{L} = \{(x, y) \mid x - vy = x_0\}$ (здесь x_0, v – параметры, определяющие прямую). Такой класс решений задается формулой (3) с функцией

$$U(x, y, t) = 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \det F(x - vy, t), \quad (4)$$

где матрица (F_{lj}) размера $N \times N$ определена выражением

$$F_{lj}(x, t) = \delta_{lj} - iC_l \frac{e^{-(\chi_j + \chi_l)x + 8\chi_j(\chi_j^2 + 3v^2/4)t}}{\chi_j + \chi_l} \quad (5)$$

и $C_l, \chi_l > 0$, v – произвольные константы. Решения являются линейными солитонами; все они двигаются вдоль одного направления и обладают свойствами, аналогичными свойствам обычных солитонов. В частности, при $N = 1$ имеем

$$U(x, y, t) = 2\kappa^2 \operatorname{sch}^2[\kappa(x - vy - Vt - x_0)], \quad (6)$$

где $\chi_1 \equiv \kappa$, v – параметры, которые определяют амплитуду $2\kappa^2$ и скорость $V \equiv 4\kappa^2 + 3v^2$ солитона. Заметим, что хотя линейные солитоны известны уже с 1976 г. [10], они не получаются в рамках метода обратной задачи [11], поскольку находятся вне изучаемого в этих работах класса решений. Линеаризация соответствующей задачи Коши на плоскости для уравнений (1) или (2), отвечающей вещественным несингулярным данным, которые затухают всюду, за исключением прямой $\mathcal{L}$ на плоскости, требует новых идей, которые развиваются в разделе 5.

3. СОЛИТОНЫ, ВОЗМУЩЕННЫЕ БЕЛЫМ ШУМОМ

Исследуем теперь вопрос о том, как белый шум (т.е. шум вида $\zeta(t) \equiv W(t)$, где $W(t)$ – БД) влияет на свойства бегущей волны (6) уравнения (1). Решение вида бегущей волны для стохастического уравнения (2) является солитоном вида

$$u(x, y, t) = 2\kappa^2 \operatorname{sch}^2[\kappa(x - vy - Vt - x_0 + W(t))].$$

Эта волна локализована на (случайной) прямой $x - vy - x_0 = Z(t)$, где $Z(t) \equiv Vt - W(t)$ – БД с коэффициентом дрейфа $V \equiv 4\kappa^2 + 3v^2$; в начальный момент волна локализована на прямой $x - vy - x_0 = 0$.

Представляет интерес установить основные статистические свойства этого решения. Отметим, что при $v = 0$ мы получаем солитон уравнения КдФ и поэтому наши результаты существенны также и в этом случае. С физической точки зрения интересно определить минимальное время, за которое солитон впервые достигает некоторой заданной точки $\vec{b} \equiv (b_1, b_2)$ на плоскости. С математической точки зрения это время является случайной величиной $\tau_{\vec{b}}$, определяемой условием

$$\tau_{(b_1, b_2)} = \min\{t, 0 < t < \infty : b_1 - vb_2 = W(t) + Vt + x_0\}. \quad (7)$$

Отметим, что если только выполняется условие $b_1 - vb_2 = b'_1 - vb'_2$, то имеет место равенство $\tau_{(b_1, b_2)} = \tau_{(b'_1, b'_2)}$. Это есть отражение того обстоятельства, что все точки на прямой $X = \text{const}$ достигаются в один и тот же момент времени (здесь $X \equiv x - vy - x_0$). Можно доказать (см. приложение), что плотность вероятности $f_{\tau}(t)$, определяемая равенством $P(\tau_{(b_1, b_2)} \in (t, t + dt)) = f_{\tau}(t) dt$, дается выражением

$$f_{\tau}(t) = (2\pi t^3)^{-1/2} |B| e^{-(B-Vt)^2/(2t)}, \quad (8)$$

в котором $B \equiv b_1 - vb_2 - x_0$. Вероятность того, что волна, проходящая в начальный момент времени через точку $(x_0, 0)$, когда-либо достигнет точки $\vec{b} \equiv (b_1, b_2)$, выражается по-разному в зависимости от того, какой полуплоскости $L_{\pm} \equiv \{(x, y) : \mp X > 0\}$ принадлежит точка (b_1, b_2) . Имеем

$$P(0 \leq \tau_{\vec{b}} < \infty) = \int_0^{\infty} f_{\tau}(t) dt = \begin{cases} e^{-2|B|V}, & \text{если } \vec{b} \in L_+, \\ 1, & \text{если } \vec{b} \in L_-. \end{cases} \quad (9)$$

Это означает, что только точки нижней (относительно проходящей через точку $(x_0, 0)$ начальной прямой локализации) полуплоскости L_- будут достигаться с вероятностью единица. Точки верхней полуплоскости L_+ также достижимы, но соответствующие вероятности экспоненциально убывают с расстоянием. Отметим, однако, что среднее время, необходимое для достижения такой точки, бесконечно, поскольку

$$\langle \tau_{\vec{b}} \rangle = \int_0^{\infty} t f_{\tau}(t) dt = \begin{cases} \infty, & \text{если } \vec{b} \in L_+, \\ \frac{B}{V}, & \text{если } \vec{b} \in L_-. \end{cases} \quad (10)$$

Близкий вопрос состоит в нахождении вероятности того, что к некоторому заданному моменту времени t_1 волна уже появлялась на некоторой заданной прямой, проходящей через точку (b_1, b_2) плоскости. Заметим, что это имеет место тогда и только тогда, когда выполнено неравенство $M \geq B$, в котором случайная величина $M \equiv \max_{t \leq t_1} Z(t)$. Можно доказать, что искомая вероятность равна

$$\frac{2}{(2\pi t_1)^{1/2}} \int_B^{\infty} dz \left[e^{-(z-Vt_1)^2/(2t_1)} + 2V e^{-2Vz} \Phi\left(\frac{-z-Vt_1}{\sqrt{t_1}}\right) \right], \quad (11)$$

где

$$(2\pi)^{1/2}\Phi(z) \equiv \int_{-\infty}^z e^{-x^2/2} dx.$$

Все эти вероятности получены путем решения данного дифференциального уравнения в частных производных с начальными и граничными условиями. Детали вынесены в приложение.

Подведем итог. Каждая конкретная реализация решения стохастического уравнения КП с начальными условиями, соответствующими линейному солитону, также является линейным солитоном, положение $X = Z(t)$ которого является случайным. Время прихода случайного солитона имеет распределение, заданное формулой (8). Среднее время прихода (10) совпадает с аналогичным временем в отсутствие шума.

Проанализируем далее влияние шума на амплитуду солитона в среднем при больших временах. Это означает, что один и тот же эксперимент повторяется большое число раз и затем вычисляется среднее по всей серии экспериментов. В этом случае при $t \rightarrow \infty$ наблюдается стремление к нулю средней амплитуды солитона, как это имело место и в работах [3]–[6], [12]. Это затухание значительно более слабое вдоль линии локализации невозмущенного солитона. Его можно точно оценить.

А. Если x, y фиксированы, то средняя амплитуда затухает экспоненциально:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{t} e^{\beta t/2} \langle u(t, x, y) \rangle = 0 \quad (12)$$

для всех β , меньших некоторого граничного значения. Однако это затухание в общем случае отличается от затухания $\sim e^{-2\kappa V t}$ для невозмущенного солитона. В зависимости от значений соответствующих параметров получаем следующие два случая.

А1. Пусть x, y фиксированы и $V < 2\kappa$, тогда

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{2\pi t} e^{V^2 t/2} \langle u(t, x, y) \rangle &= 2\kappa^2 e^{V(x-vy-x_0)} \int dz e^{-Vz} \operatorname{sch}^2(\kappa z) = \\ &= 2 \frac{V e^{V(x-vy-x_0)}}{\kappa^2 \sin(\pi V/(2\kappa))}. \end{aligned} \quad (13)$$

Следовательно,

$$\langle u(t, x, y) \rangle \approx \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-V^2 t/2}.$$

А2. Пусть x, y фиксированы и $V \geq 2\kappa$. В этом случае формула (13) не позволяет сделать никакого заключения, поскольку соответствующий интеграл расходится. Однако для всех β таких, что $0 \leq \beta < V^2 - (V - 2\kappa)^2$, по-прежнему имеем (12), или

$$\langle u \rangle = o(t^{-1/2} e^{-\beta t/2}).$$

Действительно (напомним, что $X \equiv x - vy - x_0$),

$$\sqrt{2\pi t} e^{\beta t/2} \langle u(t, x, y) \rangle = 2\kappa^2 \int dz \varphi(t, z) \operatorname{sch}^2(\kappa z),$$

где обозначено

$$\varphi(t, z) \equiv \exp \left[-\frac{(X - Vt + z)^2}{2t} + \frac{\beta t}{2} \right].$$

Заметим, что выполнено неравенство

$$\varphi(t, z) \operatorname{sch}^2(\kappa z) \leq \exp \left[-V(X + z) + \sqrt{V^2 - \beta} |X + z| - 2\kappa |z| \right].$$

Требование сходимости интеграла приводит к выписанной выше границе для параметра β . Для завершения доказательства достаточно просто заметить, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, z) = 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Мы предполагаем, что в случае $V \geq 2\kappa$ указанная граница для параметра β является точной, т.е.

$$\langle u(t, x, y) \rangle = O \left(\frac{1}{\sqrt{t}} e^{-[V^2 - (V - 2\kappa)^2]t/2} \right).$$

Б. Пусть x, y удовлетворяют условию $x - vy - x_0 = Vt - \alpha\sqrt{t}$, где α — некоторая заданная константа. В этой области имеет место лишь слабое затухание:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{2\pi t} \langle u(t, x, y) \rangle = 2\kappa^2 e^{-\alpha^2/2} \int dz \operatorname{sch}^2(\kappa z) = 4\kappa e^{-\alpha^2/2}. \quad (14)$$

Суммируем полученные результаты:

$$\langle u(t, x, y) \rangle = \begin{cases} O \left(\frac{1}{\sqrt{t}} e^{-V^2 t/2} \right), & \text{если } x, y = \text{const}, V < 2\kappa, \\ O \left(\frac{1}{\sqrt{t}} e^{-[V^2 - (V - 2\kappa)^2]t/2} \right), & \text{если } x, y = \text{const}, V \geq 2\kappa, \\ O \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \right), & \text{если } x - vy - x_0 = Vt - \alpha\sqrt{t}. \end{cases} \quad (15)$$

Этот результат можно интерпретировать следующим образом. При больших временах центр солитона по-прежнему находится в среднем в том же положении, что и центр невозмущенного солитона $X = Vt$, но из-за влияния белого шума амплитуда солитона убывает в среднем как $O(1/\sqrt{t})$, в то время как его ширина ведет себя как $O(\sqrt{t})$.

4. УРАВНЕНИЕ КП С ДРУГИМИ ВИДАМИ ШУМА

Рассмотрим теперь кратко уравнение (2) с шумом $\zeta(t) \equiv \dot{\xi}$, определенным СДУ Ито

$$d\xi(t) = a(t, \xi) dt + b(t, \xi) dW(t), \quad \xi(0) = \xi_0, \quad (16)$$

где ξ_0 — константа и $a, b: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — некоторые заданные функции.

В этой связи возникает естественная задача об определении наиболее общего вида функций $a(t, z)$, $b(t, z)$, для которых последнее уравнение является “интегрируемым”.

Эта задача была решена в [13]. Рассмотрим частный случай, соответствующий обобщенному процессу ОУ или (окрашенному) шуму $\zeta(t) \equiv \dot{\xi}$, для которого $a(t, y) = -\gamma(t)y$, $b(t, y) = 1$, $\xi_0 = 0$. Таким образом,

$$d\zeta(t) = -\gamma(t)\zeta dt + dW(t),$$

где $\gamma(t) > 0$ – некоторая заданная функция времени. Если $\gamma = 0$, мы возвращаемся к рассмотренному в предыдущем разделе случаю БД. Если γ – ненулевая константа, мы получаем известный процесс ОУ. В остальных случаях $\zeta(t)$ может рассматриваться как обобщенный процесс ОУ.

Шум $\zeta(t) \equiv \zeta_t$ можно получить, заметив, что его плотность вероятности $f(t, x) \equiv f_t(x)$, которая определена формулой

$$P[\zeta(t) \in I] = \int_I f_t(x') dx',$$

является решением уравнения Фоккера–Планка (см. [7]–[9])

$$\frac{\partial f_t(x)}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_t(x)}{\partial x^2} - \gamma(t) \frac{\partial}{\partial x} [x f_t(x)] = 0. \quad (17)$$

Пусть $f_0(x)$ обозначает начальную плотность: $\lim_{t \rightarrow +0} f_t(x) = f_0(x)$. Решение уравнения дается формулой

$$f_t(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t, x|x') f_0(x') dx', \quad (18)$$

где $f(t, x|x')$ – функция Грина для оператора Фоккера–Планка, т.е. решение уравнения (17) с начальным условием $\lim_{t \rightarrow +0} f(t, x|x') = \delta(x - x')$. Решив соответствующую задачу, находим

$$f(t, x|x') = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Sigma^2}} \exp \left[-\frac{(x - x'e^{-\Gamma(t)})^2}{\Sigma^2(t)} \right], \quad (19)$$

где

$$\Gamma(t) = \int_0^t \gamma(s) ds, \quad \Sigma^2(t) = e^{-2\Gamma(t)} I(t), \quad I(t) \equiv \int_0^t e^{2\Gamma(s)} ds. \quad (20)$$

Используя (19), (20), находим корреляционную функцию

$$K(t_1, t_2) \equiv \langle \zeta_{t_1} \zeta_{t_2} \rangle - \langle \zeta_{t_1} \rangle \langle \zeta_{t_2} \rangle = e^{-\Gamma(t_1) - \Gamma(t_2)} [I(t_1) + \sigma_0^2], \quad t_2 \geq t_1, \quad (21)$$

где σ_0^2 – начальная дисперсия.

Особенный интерес представляет случай $0 < \gamma = \text{const}$ (классический процесс ОУ). В этом случае имеем

$$\Gamma(t) = \gamma t, \quad 2\gamma \Sigma^2(t) = 1 - e^{-2\gamma t}.$$

В отличие от БД, это сильно эргодический процесс, который вне зависимости от начального распределения $f_0(x)$ сходится при $t \rightarrow \infty$ к гауссовой случайной величине с нулевым средним и дисперсией $1/(2\gamma)$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{\pi} f_t(x) = \sqrt{\gamma} e^{-\gamma x^2}.$$

Следствием последнего свойства является сходимость линейного солитона $u(t, x, y)$ при $t \rightarrow \infty$ к случайной величине:

$$u(x, y, t) = 2\kappa^2 \operatorname{sch}^2[\kappa(X + \zeta_t - Vt)] \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 2\kappa^2 \operatorname{sch}^2[\kappa(X + \zeta_\infty - Vt)]. \quad (22)$$

Таким образом, шум не разрушает солитон, а приводит лишь к тому, что асимптотическое положение солитона $X = Vt - \zeta_\infty$ становится случайной величиной, которая имеет гауссово распределение со средним, соответствующим положению невозмущенного солитона $X_{\text{нр}} = Vt$, и дисперсией $1/(2\gamma)$.

Гораздо больше можно сказать в том случае, если ζ_0 имеет такую же плотность распределения, как ζ_∞ , т.е.

$$\sqrt{\pi}f_0(x) = \sqrt{\pi}f_\infty(x) = \sqrt{\gamma}e^{-\gamma x^2}. \quad (23)$$

В этом случае шум $\zeta(t)$ имеет то же самое распределение в любой момент времени: $f_t(x) = f_0(x)$, и корреляционная функция дается выражением $K(t_1, t_2) = e^{-\gamma|t_2 - t_1|}$. Поведение средней амплитуды $\langle u(t, x, y) \rangle$ также может быть детально описано. Заметим, что

$$\langle u(t, x, y) \rangle \equiv 2\kappa^2 \int dz \frac{\sqrt{\gamma}e^{-\gamma z^2}}{\sqrt{\pi} \operatorname{ch}^2[\kappa(X + z - Vt)]}. \quad (24)$$

Таким образом, $\langle u(t, x, y) \rangle$ зависит только от переменной подобия $\xi \equiv X - Vt \equiv x - Vy - x_0 - Vt$. Нетрудно доказать, что средняя амплитуда достигает максимума на траектории невозмущенного солитона $\xi = 0$, на которой она дается в любой момент времени выражением

$$\langle u(\xi) |_{\xi=0} \rangle = 2\kappa^2 C, \quad C(\kappa) \equiv \int dz \frac{\sqrt{\gamma}e^{-\gamma z^2}}{\sqrt{\pi} \operatorname{ch}^2 \kappa z} < 1, \quad (25)$$

и что амплитуда солитона убывает до нуля при возрастании ξ , т.е. при увеличении расстояния до прямой $\xi = 0$. Удобно ввести функцию $R(\xi; \kappa; \gamma) \equiv \langle u(\xi) \rangle / U(\xi)$. Заметим, что $R(\xi; \kappa; \gamma)|_{\xi=\infty} = e^{\kappa^2/\gamma}$ и $R(\xi; \kappa; \gamma)|_{\xi=0} = C(\kappa)$. Эта величина характеризует, насколько затухает солитон в результате возмущения случайным шумом. Имеем

$$\begin{aligned} \lim_{\kappa \rightarrow 0} C(\kappa) &= 1, \\ \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \kappa^n C(\kappa) &= 0 \quad \forall n \geq 0 \quad \text{или} \quad C(\kappa) = o(\kappa^{-n}), \quad \kappa \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (26)$$

Подведем итог. Положение солитона в среднем совпадает с положением невозмущенного солитона. Единственным эффектом, к которому приводит шум, является уменьшение амплитуды солитона. Чем больше амплитуда солитона, тем больше связанный со случайным шумом коэффициент ослабления C^{-1} .

Вернемся к рассмотрению случая, когда шум $\zeta(0)$ произвольный. Из того факта, что $\zeta(t)$ стремится к ζ_∞ при $t \rightarrow \infty$, следует, что асимптотические результаты сохраняются и что поведение амплитуды солитона на больших временах с точностью до константы повторяет поведение невозмущенного солитона. Более конкретно:

а) при фиксированных x, y имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle u(t, x, y) \rangle}{U(t, x, y)} = R(\xi; \kappa; \gamma)|_{\xi=\infty} \equiv e^{\kappa^2/\gamma}; \quad (27)$$

б) вдоль траектории невозмущенного солитона $X = Vt$ имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle u(t, x, y) \rangle}{U(t, x, y)} = R(\xi; \kappa; \gamma)|_{\xi=0} \equiv C(\kappa). \quad (28)$$

Проведенный выше анализ может быть распространен на случай функции $\gamma(t)$ общего вида посредством вычисления предела распределения (18) с учетом (19). Имеют место следующие результаты. Если $l \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) > 0$, то при $t \rightarrow \infty$ независимо от начального распределения $\zeta(t)$ сходится к величине ζ_∞ и $u(t, x, y) \rightarrow 2\kappa^2 \operatorname{sch}^2[\kappa(\zeta_\infty + \xi)]$. При $l \neq \infty$ величина ζ_∞ имеет гауссово распределение с нулевым средним и дисперсией $1/(2l)$. Отсюда следует, что после замены $\gamma \rightarrow l$ формулы (27), (28) по-прежнему будут справедливы.

Интересный результат получается в случае $l = \infty$. В этом случае $\zeta(t)$ стремится к нулю и, следовательно, $u(t, x, y)$ стремится к невозмущенному солитону $U(t, x, y) \equiv 2\kappa^2 \operatorname{sch}^2(\kappa\xi)$. В частности,

$$\langle u(x, y, t) \rangle \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \begin{cases} 0, & \xi \neq 0, \\ 2\kappa^2, & \xi = 0. \end{cases} \quad (29)$$

Это замечательный результат. Он означает, что если имеется достаточно сильный механизм $\gamma(t)$ ослабления шума, то случайная волна при больших временах ведет себя в точности так же, как невозмущенный солитон $U(t, x, y)$.

5. ЗАДАЧА С НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КП

В работах [10], [11] была рассмотрена задача Коши с затухающими данными для уравнения (1) и была обнаружена ее связь с линейной спектральной задачей

$$L\Psi \equiv [-\partial_y + \partial_{xx} + u(x, y)]\Psi(x, y) = 0. \quad (30)$$

Как уже отмечалось, локализованными решениями уравнения КП являются линейные солитоны, которые не затухают вдоль некоторой прямой. Здесь мы приведем наши результаты [14], относящиеся к линеаризации задачи Коши на плоскости для уравнения (2), соответствующей физическим данным, которые являются вещественными, не-сингулярными и затухают на бесконечности всюду, за исключением прямой $\mathcal{L}$ на плоскости: $\mathcal{L} = \{(x, y) \mid x - vy = x_0\}$ (здесь x_0, v – параметры, определяющие прямую), т.е. $\lim_{x, y \rightarrow \infty} u(x, y) = 0$ при $(x, y) \notin \mathcal{L}$ и $\lim_{x, y \rightarrow \infty} u(vy + x_0, y) = u_\infty(x_0)$ при $(x, y) \in \mathcal{L}$.

Здесь $u_\infty(x_0)$ — некоторая заданная функция, которая предполагается гладкой и затухающей: $\lim_{x_0 \rightarrow \infty} u_\infty(x_0) = 0$. Для того чтобы применить метод обратной задачи рассеяния, заметим, что уравнение (2) может быть получено как условие совместности уравнения (30) и уравнения

$$M\Psi \equiv \left(\partial_t + 4\partial_{xxx} + 6\left(u - \frac{\zeta}{6}\right)\partial_x + 3u_x + 3(\partial_y \partial_x^{-1} u) + 4\left(\frac{v}{2} + ik\right)^3 \right) \Psi = 0. \quad (31)$$

(Относительно некоторых результатов, полученных с привлечением метода обратной задачи для оператора теплопроводности с односолитонным потенциалом, см. [15].)

Рассмотрим новую функцию $\nu(x, y, k)$, включающую спектральный параметр k , такую, что

$$\Psi(x, y) = \nu(x, y, k) \exp \left[-\frac{v}{2}x + \left(\frac{v^2}{4} - k^2 \right) y \right],$$

и новые координаты $x' \equiv x - vy$, $y' \equiv y$. Мы видим, что в новой системе (если опустить штрихи в обозначениях координат) спектральная задача (30), связанная с уравнением КП, без труда переписывается в виде

$$\hat{L}\nu(x, y, k) = -U(x, y)\nu(x, y, k), \quad \hat{L} \equiv -\partial_y + \partial_{xx} + k^2 + u_\infty(x), \quad (32)$$

где $U(x, y) \equiv u(x, y) - u_\infty(x_0)$. Мы требуем также, чтобы $u_\infty(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$.

Следуя [14], обсудим далее, как построить функцию Грина для оператора $\hat{L}$:

$$\hat{L}G = (-\partial_y + \partial_{xx} + k^2 + u_\infty(x))G(x, x', y, k) = -\delta(x - x')\delta(y). \quad (33)$$

Определим решения $\phi_\pm(x, k)$, $\psi_\pm(x, k)$ уравнений

$$(\partial_{xx} + k^2 + u_\infty(x))\phi(x, k) = 0, \quad (\partial_{xx} + k^2 + u_\infty(x))\psi(x, k) = 0 \quad (34)$$

следующими условиями:

$$\phi_\pm(x, k) = e^{\mp ikx}, \quad x \rightarrow -\infty, \quad \psi_\pm(x, k) = e^{\pm ikx}, \quad x \rightarrow +\infty. \quad (35)$$

Если $u_\infty(x)$ удовлетворяет условию

$$\int (1 + |x|^2) |u_\infty(x)| dx < \infty,$$

то введенные функции существуют, являются аналитическими функциями спектрального параметра $k \equiv k_R + ik_I$ в $C_\pm$ (в верхней/нижней комплексной полуплоскости k) и имеют пределы на границе $\{k_I = 0\}$ [16]. Эти предельные функции удовлетворяют следующему соотношению:

$$\phi_+(x, k) = a(k)\psi_-(x, k) + b(k)\psi_+(x, k), \quad k \in \mathbb{R}, \quad (36)$$

с некоторыми функциями $a(k)$, $b(k)$. Можно доказать, что функция $a(k)$ является аналитической функцией по k в верхней полуплоскости, которая имеет конечное множество $\{k_j \equiv i\chi_j, \chi_j \in \mathbb{R}^+\}_{j=1,\dots,N}$ простых нулей. Если $\psi_j(x) \equiv \psi_+(x, k_j)$, то $\phi_+(x, k_j) = \beta_j \psi_j(x)$ с некоторой комплексной константой β_j . Обозначим $a_+(k) \equiv a(k)$, $a_-(k) = -a_+(-k)$.

Определим далее

$$G_c(x, x', y, k) = G_{c+}(x, x', y, k)\theta(k_I) + G_{c-}(x, x', y, k)\theta(-k_I), \quad (37)$$

где

$$\begin{aligned} G_{c\pm} &= \frac{1}{2\pi} \int_{C'_\pm} e^{-y(p^2 + 2kp)} g_\pm(x, x', p+k) \times \\ &\times [\theta(y)(\chi_{A_+}\theta(k_R) + \chi_{A_-}\theta(-k_R)) - \theta(-y)(\chi_{A_+^c}\theta(k_R) + \chi_{A_-^c}\theta(-k_R))] dp, \\ g_+(x, x', k) &\equiv \frac{\phi_+(x, k)\psi_+(x', k)}{a_+(k)}, \quad k_I > 0, \\ g_-(x, x', k) &\equiv -\frac{\phi_-(x', k)\psi_-(x, k)}{a_-(k)}, \quad k_I < 0, \\ A_+ &\equiv (-\infty, -2k_R) \cup (0, \infty), \quad A_- \equiv (-\infty, 0) \cup (-2k_R, \infty), \\ A_+^c &\equiv R - A_+ = [-2k_R, 0], \quad A_-^c \equiv R - A_- = [0, -2k_R], \end{aligned}$$

χ_A — характеристическая функция множества $A \subset \mathbb{R}$ и $C'_\pm$ — контуры, проходящие вдоль вещественной оси и обходящие точку $p = -k_R$ по малой полуокружности в нижней (для знака $+$) или верхней (для знака $-$) полуплоскости. Пусть также

$$G_d(x, x', y, k) = i \sum_{|k_j| \geq |k_I|} C_j e^{(k^2 + \chi_j^2)y} \psi_j(x) \psi_j(x') \theta(-y) \quad (38)$$

(дискретная часть функции Грина). Наконец, рассмотрим

$$G(x, x', y, k) = G_c(x, x', y, k) + G_d(x, x', y, k). \quad (39)$$

Можно проверить, что построенная функция Грина удовлетворяет (33).

Рассмотрим решение $\nu(x, y, k)$ задачи (32), определяемое интегральным уравнением

$$\nu(x, y, k) = h(x, k) + \int dx' dy' G(x, x', y - y', k) U \nu(x', y', k), \quad (40)$$

где

$$h(x, k) = \begin{cases} \frac{\phi_+}{a}(x, k), & k_I > 0, \\ \psi_-(x, k), & k_I < 0. \end{cases}$$

Определим $\nu_\pm$ формулой

$$\nu = \begin{cases} \nu_+(x, k), & k_I > 0, \\ \nu_-(x, k), & k_I < 0. \end{cases}$$

Обратная задача включает в себя восстановление собственной функции $\nu(k)$ по соответствующим данным. Действуя на выражение (40) оператором $\partial/\partial\bar{k}$, мы получаем следующее интегральное уравнение для $\partial\nu_{\pm}/\partial\bar{k}$, соответствующее $k \in C_{\pm}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\nu_{\pm}}{\partial\bar{k}}(k) = & \pi \sum_{j=1}^N C_j \psi_j(x) \delta(k_R) \delta(k_I - \chi_j) + e^{iqy} F_{\pm}(k) h_{\pm}(x, -\bar{k}) + \\ & + \int dx' dy' G_{\pm}(x, x', y - y', k) U \frac{\partial\nu_{\pm}(k)}{\partial\bar{k}}, \end{aligned} \quad (41)$$

где функции

$$\begin{aligned} F_+(k) &\equiv \lambda \int dx dy e^{-iqy} U \nu_+(x, y, k) \psi_+(x, -\bar{k}), \\ F_-(k) &\equiv -\frac{\lambda}{a_-(-\bar{k})} \int dx dy e^{-iqy} U \nu_-(x, y, k) \phi_-(x, -\bar{k}) \end{aligned}$$

определяют двумерные данные рассеяния задачи и $\lambda \equiv -\text{sign } k_R/(2\pi)$, $q \equiv 4k_R k_I$. Отсюда следует, что

$$\frac{\partial\nu_{\pm}}{\partial\bar{k}} = \pi \sum_{j=1}^N C_j \nu_-(-i\chi_j) \delta(k_R) \delta(k_I - \chi_j) + e^{iqy} F_{\pm}(k) \nu_{\pm}(-\bar{k}). \quad (42)$$

Функция $\nu(x, y, k)$ имеет скачок на вещественной оси, для которого выполнено равенство

$$[\nu_+ - \nu_-](x, y, k) = \rho(k) \nu_-(x, y, -k). \quad (43)$$

Удобно определить функцию $\mu(x, y, k) \equiv \nu(x, y, k) e^{ikx}$ и выразить ее отклонение от голоморфности как

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mu}{\partial\bar{k}} = & \pi \sum_{j=1}^N C_j e^{-2\chi_j x} \mu_-(-i\chi_j) \delta(k_R) \delta(k_I - \chi_j) + e^{i[qy + (k + \bar{k})x]} \times \\ & \times \sum_{\pm} F_{\pm}(k) \mu_{\pm}(-\bar{k}) \theta(\pm k_I) - \frac{\rho(k)}{2i} e^{2ikx} \mu_-(-k) \delta(k_I). \end{aligned} \quad (44)$$

Как только отклонение от голоморфности функции μ найдено, уравнение обратной задачи следует из выражения

$$\begin{aligned} \mu(k) = & 1 + \sum_{j=1}^N C_j e^{-2\chi_j x} \frac{\mu_-(-i\chi_j)}{k - i\chi_j} + \\ & + \frac{1}{2\pi i} \sum_{\pm} \int_{C_{\pm}} F_{\pm}(z) \mu_{\pm}(-\bar{z}) \frac{e^{i[qy + 2z_R x]}}{z - k} dz \wedge d\bar{z} + \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dz_R \frac{\rho(z_R) e^{2izx} \mu_-(-z_R)}{z_R - k}. \end{aligned} \quad (45)$$

Наконец, учитывая, что уравнение (2) является условием совместности уравнений (30) и (31), мы получаем эволюцию данных рассеяния в виде

$$F_{\pm}(k, t) = F_{\pm}(k, 0) \exp \left\{ 4 \left[\left(\frac{v}{2} - i\bar{k} \right)^3 - \left(\frac{v}{2} + ik \right)^3 \right] t + 2ik_R \zeta(t) \right\} \quad (46)$$

и

$$\begin{aligned} \rho(k, t) &= \rho(k, 0) \exp \left\{ 4 \left[\left(\frac{v}{2} - ik \right)^3 - \left(\frac{v}{2} + ik \right)^3 \right] t + 2ik_R \zeta(t) \right\}, \\ C_j(t) &= C_j(0) \exp \left\{ 4 \left[\left(\frac{v}{2} + \chi_j \right)^3 - \left(\frac{v}{2} - \chi_j \right)^3 \right] t - 2\chi_j \zeta(t) \right\}. \end{aligned} \quad (47)$$

Следовательно, воздействие шума на спектральные данные вызывает случайные осцилляции фазы непрерывных данных.

После возвращения к исходным координатам (т.е. после перехода от штрихованных координат к нештрихованным) и внесения временной эволюции мы получаем потенциал в виде

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[2i \sum_{j=1}^N C_j(0) \exp \left\{ -2\chi_j(x - vy + \zeta) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 4 \left[\left(\frac{v}{2} + \chi_j \right)^3 - \left(\frac{v}{2} - \chi_j \right)^3 \right] t \right\} \mu_{-}(-i\chi_j) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\pi} \sum_{\pm} \int_{C_{\pm}} F_{\pm}(z) \mu_{\pm}(-\bar{z}) \exp \left\{ i[qy + 2z_R(x - vy + \zeta(t)) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 4 \left[\left(\frac{v}{2} - i\bar{k} \right)^3 - \left(\frac{v}{2} + ik \right)^3 \right] t \right\} dz \wedge d\bar{z} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz \rho(z) \exp \left\{ 2iz(x - vy + \zeta) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 4 \left[\left(\frac{v}{2} - ik \right)^3 - \left(\frac{v}{2} + ik \right)^3 \right] t \right\} \mu_{-}(-z) \right], \end{aligned} \quad (48)$$

что влечет за собой соотношение $u(x, y, t) = U(x + \zeta(t), y, t)$ между решениями невозмущенного и возмущенного уравнений.

Для получения солитонов нужно положить $F_{+}(k) = F_{-}(k) = \rho(k) = 0$. При этом уравнения для восстановления собственной функции μ в штрихованных координатах имеют вид

$$\mu(-i\chi_l) = 1 \sum_{j=1}^N C_j e^{-2\chi_j x'} \frac{\mu_{-}(-i\chi_j)}{k_l + k_j}. \quad (49)$$

Решая эту систему, мы находим, что солитоны даются формулами (4), (5).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Для доказательства формул (9) и (11) рассмотрим процесс БД $Z(t) \equiv -W(t) + Vt$ с коэффициентом дрейфа V и поглощающим барьером, расположенным в точке $x = b$. Последнее означает, что достигнув однажды данной точки, процесс останавливается. Известно [7], что в этом случае плотность $\tilde{f}(t, x)$ является решением следующей граничной задачи:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V \frac{\partial}{\partial x} \right) \tilde{f}(t, x) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +0} \tilde{f}(t, x) = \delta(x),$$

$$\tilde{f}(t, x)|_{x=-\infty} = \tilde{f}(t, x)|_{x=b} = 0.$$

Для решения этого уравнения прежде всего положим $\tilde{f}(t, x) = e^{Vx - V^2 t / 2} \psi(t, x)$, после чего будем иметь

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \psi(t, x) = 0,$$

$$\psi(t, x)|_{t=0} = \delta(x), \quad \psi(t, x)|_{x=-\infty} = \psi(t, x)|_{x=b} = 0.$$

Последнее уравнение можно решить методом изображений. Имеем

$$\psi(t, x) = (2\pi t)^{-1/2} [e^{-x^2/(2t)} - e^{-(x-2b)^2/(2t)}]$$

и

$$\tilde{f}(t, x) = (2\pi t)^{-1/2} [e^{-(x-Vt)^2/(2t)} - e^{-[(x-2b-Vt)^2 - 4Vtb]/(2t)}].$$

Заметим далее, что если τ_b — время первого достижения процессом барьера b , то выполнено равенство

$$P\{\tau_b \leq t\} + \int_{-\infty}^b \tilde{f}(t, x) dx = 1,$$

которое является отражением того очевидного факта, что в момент времени t процесс $Z(t)$ либо уже достиг поглощающего барьера в точке $x = b$ (и остановился), либо находится где-то в полубесконечном интервале $(-\infty, b)$. При помощи вычислений получаем

$$f_\tau(t) = - \int_{-\infty}^b \frac{\partial}{\partial t} \tilde{f}(t, x) dx = \int_{-\infty}^b \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V \frac{\partial}{\partial x} \right) \tilde{f}(t, x),$$

$$f_\tau(t) = (2\pi t^3)^{-1/2} |b| e^{-(b-Vt)^2/(2t)}.$$

Определим, наконец, плотности распределения величины $M \equiv \max_{t \leq t_1} Z(t)$. Заметим, что $M \geq b \Leftrightarrow \tau_b \leq t$, и, следовательно,

$$P\{M \geq b\} = P\{\tau_b \leq t\} = 1 - \int_{-\infty}^b \tilde{f}(t, x) dx.$$

Если обозначить через $f_M(b)$ соответствующую плотность распределения, то

$$f_M(b) \equiv -\frac{\partial}{\partial b} P\{M \geq b\} = - \int_{-\infty}^b \frac{\partial}{\partial b} \tilde{f}(t, x) dx.$$

Окончательный результат получаем после утомительного интегрирования в квадратах.

Благодарности. Работа была частично поддержана BFM (грант 2002-02609) и Junta de Castilla-Leon, Испания (грант SA078/03).

Список литературы

- [1] *M. J. Ablowitz, P. A. Clarkson.* Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1991; *М. Абловитц, Х. Кузур.* Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987; *M. J. Ablowitz, A. S. Fokas.* Comments on the inverse scattering transform and related nonlinear evolution equations. In: Nonlinear Phenomena. Proc. CIFMO School and Workshop (Oaxtepec, Mexico, November 29–December 17, 1982). Lect. Notes Phys. V. 189. Ed. K. B. Wolf. Berlin: Springer, 1983. P. 3–24; *A. S. Fokas, M. J. Ablowitz.* The inverse scattering transform for multidimensional $(2 + 1)$ problems. In: Nonlinear Phenomena. Proc. CIFMO School and Workshop (Oaxtepec, Mexico, November 29–December 17, 1982). Lect. Notes Phys. V. 189. Ed. K. B. Wolf. Berlin: Springer, 1983. P. 137–183.
- [2] *M. J. Ablowitz, J. Villaroel.* Initial value problems and solutions of the Kadomtsev–Petviashvili equation. In: New Trends in Integrability and Partial Solvability. Proc. NATO Advanced Research Workshop (Cádiz, Spain, June 13–15, 2002). Kluwer (in press).
- [3] *M. Wadati.* J. Phys. Soc. Japan. 1983. V. 52. P. 2642.
- [4] *H. Konno.* J. Phys. Soc. Japan. 1985. V. 54. P. 4475; *A. Orłowski, K. Sobczyk.* Rep. Math. Phys. 1989. V. 27. P. 59.
- [5] *J. Villaroel.* Stud. Appl. Math. 2004. V. 112. P. 87.
- [6] *S. de Lillo.* Phys. Lett. A. 1994. V. 188. P. 305.
- [7] *W. Horsthemke, R. Lefever.* Noise-Induced Transitions. Theory and Applications in Physics, Chemistry, and Biology. Springer Ser. Synergetics. V. 15. Berlin: Springer, 1984; *R. N. Bhat-tacharya, E. C. Waymire.* Stochastic Processes with Applications. Wiley Ser. Probability. New York: Wiley, 1990.
- [8] *G. Roepstorff.* Path Integral Approach to Quantum Physics. Berlin: Springer, 1996.
- [9] *V. Konotop, L. Vázquez.* Nonlinear Random Waves. Singapore: World Scientific, 1994.
- [10] *В. Дрюма.* Письма в ЖЭТФ. 1974. Т. 19. С. 753.
- [11] *A. S. Fokas, M. J. Ablowitz.* Stud. Appl. Math. 1983. V. 69. P. 211; *M. J. Ablowitz, D. Bar Yaacov, A. S. Fokas.* Stud. Appl. Math. 1983. V. 69. P. 135.
- [12] *V. Belashov.* Phys. Lett. A. 1995. V. 197. P. 282.
- [13] *J. Villaroel.* J. Comp. Appl. Math. 2003. V. 158. № 1. P. 225.
- [14] *J. Villarroel, M. J. Ablowitz.* Stud. Appl. Math. 2002. V. 109. P. 151.
- [15] *M. Boiti, F. Pempinelli, A. Pogrebkov.* Inverse Problems. 1997. V. 13. P. L7; *M. Boiti, F. Pempinelli, A. Pogrebkov, B. Prinari.* Inverse Problems. 2001. V. 17. P. 937; *Phys. Lett. A.* 2001. V. 285. P. 307.
- [16] *P. Deift, E. Trubowitz.* Commun. Pure Appl. Math. 1979. V. 32. P. 121; *L. Faddeev.* J. Math. Phys. 1963. V. 4. P. 72.