Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Славнов, Не зависящая от регуляризации калибровочно-инвариантная перенормировка теории Янга–Миллса, *ТМФ*, 2002, том 130, номер 1, 3–14

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf287>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 18:14:44

© 2002 г.

А. А. Славнов*

НЕ ЗАВИСЯЩАЯ ОТ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ КАЛИБРОВОЧНО-ИНВАРИАНТНАЯ ПЕРЕНОРМИРОВКА ТЕОРИИ ЯНГА–МИЛЛСА

Предложенная недавно схема перенормировки применена к неабелевым калибровочным теориям. Полученные явно калибровочно-инвариантные выражения для перенормированных вершинных функций не зависят от используемой схемы промежуточной регуляризации.

1. ВВЕДЕНИЕ

Необходимым условием самосогласованности перенормированных неабелевых калибровочных теорий является выполнение соотношений между функциями Грина – тождеств Славнова–Тейлора (ТСТ), которые играют в квантовой теории роль, аналогичную калибровочной инвариантности классического действия [1], [2]. Хорошо известно, что симметрия классического действия может быть нарушена квантовыми поправками. Если симметрию нельзя восстановить переопределением зарядов, масс и постоянных нормировки волновых функций, это свидетельствует о наличии квантовой аномалии, и квантовая калибровочная теория является несамосогласованной.

Однако даже в отсутствие квантовых аномалий перенормировочная процедура может привести к нарушению калибровочной инвариантности, и для восстановления симметрии необходимо специально подбирать контрчлены, что является весьма трудоемкой задачей.

Нарушение симметрии связано с тем, что в процессе перенормировки на промежуточном этапе вводится ультрафиолетовая (УФ) регуляризация, которая может нарушать калибровочную инвариантность модели. В связи с этим предпочтительным является использование регуляризаций, сохраняющих калибровочную инвариантность, таких, как решеточная [3] и размерная [4], [5] регуляризации или метод высших ковариантных производных [6]–[8]. Особую популярность для вычислений в рамках теории возмущений приобрела размерная регуляризация, что обусловлено простой аналитической структурой регуляризованных интегралов. Однако эта регуляризация не применима к таким важным теориям, как стандартная модель, суперсимметричные модели

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия. E-mail: slavnov@mi.ras.ru

и вообще модели, включающие киральные фермионы. Инвариантная регуляризация для свободных от аномалий моделей с киральными фермионами, таких как модель Салама–Вайнберга и модели большого объединения, была построена недавно на основе объединения метода высших ковариантных производных с модифицированной регуляризацией Паули–Вилларса [9], [10].

Альтернативный подход к перенормировке не связан с использованием какой-либо специальной регуляризации и в принципе может быть применен к любой свободной от аномалий модели. В этом подходе вначале определяются перенормированные конечные функции Грина в соответствии с R -операцией Боголюбова–Парасюка [11], [12]. Эта процедура нарушает калибровочную инвариантность, однако, воспользовавшись произволом в выборе точки вычитания, можно подобрать конечные контрчлены так, чтобы обеспечить выполнение ТСТ для перенормированных функций Грина [13]–[15]. Достоинством этого подхода является его универсальность. Однако двухступенчатый характер процедуры и необходимость специального подбора конечных контрчленов сильно затрудняют вычисления. В частности, никому еще не удалось на этом пути построить инвариантную перенормировку суперсимметричных калибровочных моделей.

В данной работе будет описана новая процедура перенормировки неабелевых калибровочных теорий, которая объединяет положительные стороны обоих этих подходов. Она не чувствительна к регуляризации и в то же время приводит автоматически к перенормированным функциям Грина, удовлетворяющим ТСТ. Аналогичная процедура для абелевых моделей сформулирована в работе [16].

2. ОБЩАЯ СХЕМА ИНВАРИАНТНОЙ ПЕРЕНОРМИРОВКИ

Перенормировочная процедура в квантовой теории поля наиболее естественно формулируется с помощью R -операции [11], [17]. Согласно R -операции УФ-расходимости устраняются путем рекуррентной вычитательной процедуры, что эквивалентно введению в лагранжиан локальных контрчленов. R -операция включает два элемента: определение вычитающего оператора, который устраняет расходимость из подграфа в целом, и комбинаторную структуру, определяющую, в какой последовательности нужно вычитать расходимости из подграфов.

В предлагаемой схеме комбинаторная часть полностью совпадает с обычной R -операцией, но меняется определение вычитающего оператора. В обычной схеме УФ-расходимости диаграммы в целом устраняются путем вычитания значения соответствующей диаграммы при фиксированных внешних импульсах. Однако очевидно, что устранить логарифмические или линейные расходимости можно также, вычитая значение соответствующей вершинной функции при одном фиксированном внешнем импульсе. Фиксированный внешний импульс можно положить равным нулю. В случае линейных расходимостей нужно провести симметризованное вычитание.

Описанная процедура устраняет УФ-расходимости, но очевидным образом нарушает локальность. Локальность можно восстановить, если заметить, что в неабелевых калибровочных теориях продольная часть вершинных функций с тремя и четырьмя внешними векторными линиями выражается через двухточечные функции Грина полей $\mathbf{Y}_n$

га–Миллса и духовых полей и вершины взаимодействия духовых полей с калибровочными. Это позволяет получить дифференциальные ТСТ, которые выражают значения соответствующих функций при нулевом импульсе одного из внешних калибровочных полей через корреляторы, у которых число внешних калибровочных полей на единицу меньше.

Таким образом, возникает следующая явно инвариантная схема перенормировки. Вначале обычным образом делаются вычитания однопетлевых двухточечных корреляторов полей Янга–Миллса и духовых полей. Единственное условие, которому при этом нужно удовлетворить, – это условие поперечности собственной энергии поля Янга–Миллса. Оно легко обеспечивается путем обычных локальных вычитаний.

Далее делается обычное локальное вычитание в однопетлевой вершине, описывающей взаимодействие поля Янга–Миллса с духовыми полями. Тем самым мы исчерпали независимые перенормировки вершин, и следующую вершину, описывающую взаимодействие трех полей Янга–Миллса, мы перенормируем так, что она автоматически удовлетворяет ТСТ.

Перенормированная однопетлевая трехточечная функция полей Янга–Миллса определяется условием

$$\Gamma^r(p, q) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} [\Gamma_\Lambda(p, q) - \Gamma_\Lambda(p, 0) - \Gamma_\Lambda(0, q) + F_\Lambda^r(p, 0) + F_\Lambda^r(0, q)]. \quad (1)$$

В этом равенстве индекс Λ обозначает, что введена некоторая произвольная УФ-регуляризация. Индексы вершинных функций опущены, а F^r – функционал перенормированных двухточечных корреляторов, а также вершин взаимодействия полей Янга–Миллса с духовыми такой, что при некотором выборе конечных контрчленов, в пределе, когда регуляризация снята, справедливо равенство

$$\Gamma^r(p, 0) - F^r(p, 0) = 0. \quad (2)$$

Индекс r всюду обозначает перенормированные функции. Равенство (2) есть не что иное, как перенормированное дифференциальное ТСТ, гарантирующее калибровочную инвариантность перенормированной теории.

Вершинная функция (1) очевидным образом удовлетворяет ТСТ. При этом нет нужды специально заботиться о выборе контрчленов. Равенство (1) автоматически обеспечивает нужный выбор.

Функция $\Gamma^r(p, q)$ конечна как при конечном Λ , так и в пределе $\Lambda \rightarrow \infty$. Наконец, локальность вычитания следует из того, что в любой свободной от аномалии модели разность

$$\Gamma(p, 0) - F^r(p, 0) \quad (3)$$

в пределе снятой регуляризации представляет собой полином (с коэффициентами, расходящимися в пределе $\Lambda \rightarrow \infty$). Это следует из того факта, что $\Gamma^r(p, 0)$ получается из $\Gamma(p, 0)$ путем вычитания полинома.

Таким образом, наша вычитательная процедура удовлетворяет всем необходимым условиям: она локальна, приводит к конечным перенормированным функциям Грина и обеспечивает выполнение ТСТ.

Заметим, что хотя вычитание делается при одном из внешних импульсов, равном нулю, это не приводит ни к каким инфракрасным (ИК) проблемам, так как остальные внешние импульсы играют роль ИК-обрезания. Более того, при вычитании можно положить все внешние импульсы, кроме одного, равными нулю. В принципе это могло бы привести к появлению дополнительных сингулярностей при исключительных импульсах, однако в нашем случае разность (3) является полиномом при $\Lambda \rightarrow \infty$, поэтому такие сингулярности не могут появиться.

Аналогичным образом определяется однопетлевая четырехточечная функция полей Янга–Миллса.

Легко видеть, что наше определение однопетлевых перенормированных функций Грина эквивалентно введению некоторых специальных контрчленов. Равенство (1) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \Gamma_{\Lambda}^r(p, q) = & \Gamma_{\Lambda}(p, q) - z_{\Lambda}(p, q) - \\ & - [\Gamma_{\Lambda}(p, 0) - z_{\Lambda}(p, 0) - F_{\Lambda}^r(p, 0) + \Gamma_{\Lambda}(0, q) - z_{\Lambda}(0, q) - F_{\Lambda}^r(0, q)], \end{aligned} \quad (4)$$

где z_{Λ} обозначает контрчлен, определяемый из условий

$$\begin{aligned} \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} [\Gamma_{\Lambda}(p, 0) - z_{\Lambda}(p, 0) - F_{\Lambda}^r(p, 0)] &= 0, \\ \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} [\Gamma_{\Lambda}(0, q) - z_{\Lambda}(0, q) - F_{\Lambda}^r(0, q)] &= 0, \\ z(p, q) &= z(p, 0) + z(0, q). \end{aligned} \quad (5)$$

Поскольку равенства (5) суть просто перенормированные дифференциальные ТСТ, то в свободных от аномалий моделях контрчлен z_{Λ} всегда существует.

Равенство (4) показывает, что в пределе $\Lambda \rightarrow \infty$ наша процедура эквивалентна вычитанию обычного локального контрчлена z_{Λ} . Это позволяет использовать для устранения расходимостей в многопетлевых диаграммах стандартную комбинаторику R -операции. Теоремы, доказанные в рамках обычной R -операции, остаются в силе и в нашем случае. Заметим, однако, что наша процедура не отвечает какой-либо фиксированной точке вычитания. Точки вычитания меняются от диаграммы к диаграмме, автоматически обеспечивая выполнение условий калибровочной инвариантности.

Стоит подчеркнуть, что описанная схема вообще не требует явного введения контрчленов. Здесь эти контрчлены вводятся для установления связи со стандартным формализмом.

3. ПЕРЕНОРМИРОВКА ТЕОРИИ ЯНГА–МИЛЛСА

В этом разделе мы применим изложенные выше идеи к перенормировке теории Янга–Миллса. Двухточечные функции Грина и вершинная функция, описывающая вза-

имодействие поля Янга–Миллса с духовыми полями, будут перенормированы с помощью локальных вычитаний, совместных с калибровочной инвариантностью. Перенормированные вершинные функции с тремя и четырьмя векторными внешними линиями будут определены путем нелокальных вычитаний, скорректированных добавлением явно известных конечных членов, восстанавливающих локальность и калибровочную инвариантность. Основная задача будет состоять в явном решении дифференциальных ТСТ для вершинных функций полей Янга–Миллса.

Эффективное действие Янга–Миллса в ковариантной α -калибровке имеет вид

$$S = \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + \frac{1}{2\alpha} \partial_\mu B_\mu^a \partial_\nu B_\nu^a + \bar{c}^a \partial_\mu (\delta^{ab} \partial_\mu - g t^{abc} B_\mu^c) c^b \right]. \quad (6)$$

Мы собираемся определить перенормированные функции Грина так, чтобы они автоматически удовлетворяли ТСТ. Для собственной энергии поля Янга–Миллса эти тождества сводятся к условию поперечности

$$p_\mu \Pi_{\mu\nu}(p) = 0. \quad (7)$$

Тензор $\Pi_{\mu\nu}$ имеет следующую структуру:

$$\Pi_{\mu\nu}(p) = (g_{\mu\nu} p^2 - p_\mu p_\nu) \Pi_1(p^2) + g_{\mu\nu} \Pi_2(p^2). \quad (8)$$

Перенормированный тензор поляризации определяется формулой

$$\Pi_{\mu\nu}^r(p) = P_{\mu\alpha} [\Pi_{\alpha\nu}(p) - \Pi_{\alpha\nu}(0)] - p^2 P_{\mu\nu} \Pi_1(b^2), \quad (9)$$

где b – произвольная ИК-несингулярная точка, а $P_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu p^{-2}$ – поперечный проекционный оператор. Функция $\Pi_{\mu\nu}^r$, определенная равенством (9), очевидно, конечна и при любой регуляризации удовлетворяет тождеству (7).

Условие лоренц-инвариантности и вид взаимодействия определяют структуру собственной энергии духовых полей:

$$\Pi_G^{ab}(p^2) = \delta^{ab} p^2 \Pi(p^2). \quad (10)$$

Собственная энергия перенормируется вычитанием в произвольной ИК-несингулярной точке:

$$\Pi^r(p^2) = \Pi(p^2) - \Pi(c^2). \quad (11)$$

Вершину взаимодействия духовых полей с калибровочными тоже можно перенормировать произвольным образом. Она расходится логарифмически, и из структуры взаимодействия следует, что соответствующая локальная структура пропорциональна $t^{abc} k_\mu$, где k_μ – импульс духового поля. Перенормированная вершинная функция определяется формулами

$$\Gamma_\mu^{abc,r}(k, p) = \Gamma_\mu^{abc}(k, p) - k_\mu \Gamma^{abc}(b^2), \quad (12)$$

$$\Gamma_\mu^{abc}(k, p)|_{p=0} = k_\mu \Gamma^{abc}(k^2), \quad (13)$$

Рис. 1. Трехточечная функция Грина полей Янга–Миллса.

где p обозначает импульс калибровочного поля.

Вычитания (9), (11), (12) эквивалентны введению в лагранжиан следующих контр-членов:

$$-\frac{z_2-1}{4}(\partial_\mu B_\nu^a - \partial_\nu B_\mu^a)(\partial_\mu B_\nu^a - \partial_\nu B_\mu^a) + (\tilde{z}_2-1)\bar{c}^a \square c^a - (\tilde{z}_1-1)gt^{acb}\bar{c}^a \partial_\mu (B_\mu^c c^b). \quad (14)$$

Теперь мы переходим к основной задаче – определению трехточечной функции полей Янга–Миллса, изображенной на рис. 1, которая автоматически удовлетворяла бы ТСТ. Предположим, что введена некоторая калибровочно-инвариантная регуляризация. Тогда обычным образом можно получить следующие тождества для перенормированных корреляторов:

$$\begin{aligned} \frac{i}{\alpha} \langle B_\mu^a(x) B_\nu^b(y) \partial_\rho B_\rho^c(z) \rangle^r &= \tilde{z}_2 \langle \partial_\mu c^a(x) \bar{c}^c(z) B_\nu^b(y) \rangle^r - \\ &- \tilde{z}_2 \tilde{g} t^{ade} \langle B_\mu^d(x) c^e(x) \bar{c}^c(z) B_\nu^b(y) \rangle^r + (x \rightarrow y, a \rightarrow b, \mu \rightarrow \nu). \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь параметр $\tilde{g}$ представляет собой эффективную константу связи, которая входит в калибровочное преобразование перенормированной теории

$$\delta B_\mu^a = \partial_\mu \alpha^a - \tilde{g} t^{abc} B_\mu^b \alpha^c. \quad (16)$$

Напомним, что при этом выводе мы предполагали, что введена некоторая калибровочно-инвариантная регуляризация, так что уравнение (15) и последующие уравнения имеют смысл. Это предположение не является необходимым. Можно было бы просто постулировать соответствующие тождества для перенормированных корреляторов. В любом случае окончательное выражение для перенормированной вершинной функции будет представлено в виде, не зависящем от промежуточной регуляризации.

Прежде всего мы преобразуем тождество (15) к более удобному виду. При этом будут использованы квантовые уравнения движения для духовых полей, которые имеют вид

$$\int [\square c^a(x) - \tilde{g} t^{aed} \partial_\mu (B_\mu^e(x) c^d(x)) + \tilde{z}_2^{-1} \eta^a(x)] e^{iL_R} dB_\mu d\bar{c} dc = 0. \quad (17)$$

Дифференцируя это уравнение по $\eta^b(y)$ и $J_\mu^c(z)$, получим

$$\langle \square c^a(x) \bar{c}^b(y) \rangle^r - \tilde{g} t^{aed} \langle \partial_\mu (B_\mu^e(x) c^d(x)) \bar{c}^b(y) \rangle^r + \tilde{z}_2^{-1} \delta^{ab} \delta(x-y) = 0 \quad (18)$$

и

$$\langle \square c^a(x) \bar{c}^c(z) B_\nu^b(y) \rangle^r - \tilde{g} t^{aed} \langle \partial_\mu (B_\mu^e(x) c^d(x)) \bar{c}^c(z) B_\nu^b(y) \rangle^r = 0. \quad (19)$$

Заметим, что уравнения (17)–(19) справедливы и в “частично перенормированной” теории, описываемой лагранжианом, включающим контрчлены (14) (но не содержащим контрчлены перенормировки тройной и четверной вершин).

Как следует из уравнения (19), сумма первых двух членов в правой части тождества (15) поперечна относительно дифференцирования по x_μ , а остальные члены поперечны по отношению к дифференцированию по y_ν . Воспользовавшись этим наблюдением, мы перепишем равенство (15) следующим образом. Прежде всего сделаем преобразование Фурье уравнения (15). Затем ампутируем пропагаторы полей Янга–Миллса, отвечающие внешним линиям трехточечной функции в левой части уравнения (15). Принимая во внимание поперечность собственной энергии поля Янга–Миллса, можно написать для собственной вершинной функции $\Gamma_{\mu\nu\rho}^{abc,r}(p, q)$ следующее тождество:

$$q_\rho \Gamma_{\mu\nu\rho}^{abc,r}(p, q) - q^2 [(G_{tr}^{-1})_{\mu\alpha}^r(p) G^r(q) \Gamma_{\alpha\nu}^{abc,r}(p, q) + (\mu \rightarrow \nu, a \rightarrow b, p \rightarrow -p-q)] = 0, \quad (20)$$

где G_{tr} – поперечная часть пропагатора поля Янга–Миллса. При выводе этого уравнения была использована обсуждавшаяся выше поперечность правой части уравнения (15). Из-за этого первый член в правой части уравнения (15), являющийся чисто продольным, не дает вклада. В этом уравнении

$$\delta^{ab} (G_{tr}^{-1})_{\mu\nu}^r = P_{\mu\alpha} (G^{-1})_{\alpha\nu}^{ab,r}, \quad \delta^{ab} G^r(p) = G^{ab,r}(p), \quad (21)$$

$G^{ab,r}(p)$ обозначает перенормированный пропагатор духового поля. Функция $\Gamma_{\mu\nu}^{abc,r}(p, q)$ представляет собой преобразование Фурье вакуумного ожидания составного оператора

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{abc,r} = (G^{-1})_{\nu\alpha}^r(y) (G^{-1})^r(z) \langle \tilde{z}_2 \tilde{g} t^{aed} B_\mu^e(x) c^d(x) \bar{c}^c(z) B_\nu^b(y) \rangle^r. \quad (22)$$

Дифференцируя равенство (20) по q_ρ и полагая $q = 0$, получаем дифференциальное тождество, которое будет использовано для определения перенормированной трехточечной вершинной функции полей Янга–Миллса

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu\rho}^{abc,r}(p, 0) - \frac{\partial}{\partial q_\rho} [q^2 (G_{tr}^{-1})_{\mu\alpha}^r(p) G^r(q) \Gamma_{\alpha\nu}^{abc,r}(p, q) + \\ + (\mu \rightarrow \nu, a \rightarrow b, p \rightarrow -p-q)] \Big|_{q=0} = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Равенство (23) представляет собой дифференциальное ТСТ, которое вместе с соответствующим тождеством для четырехточечной функции гарантирует калибровочную независимость перенормированной теории. Чтобы удовлетворить этим уравнениям в произвольной схеме регуляризации, мы определим перенормированную собственную вершинную функцию калибровочных полей уравнением

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu\rho}^{abc,r}(p, q) = & \Gamma_{\mu\nu\rho}^{abc}(p, q) - \left\{ \Gamma_{\mu\nu\rho}^{abc}(p, 0) + \Gamma_{\mu\nu\rho}^{abc}(0, q) - \right. \\ & - \frac{\partial}{\partial q^\rho} [q^2 (G_{tr}^{-1})_{\mu\alpha}^r(p) G^r(q) \Gamma_{\alpha\nu}^{abc,r}(p, q) + (\nu \rightarrow \mu, a \rightarrow b, p \rightarrow -p - q)]|_{q=0} - \\ & \left. - \frac{\partial}{\partial p^\mu} [p^2 (G_{tr}^{-1})_{\rho\beta}^r(q) G^r(p) \Gamma_{\beta\nu}^{cba,r}(q, p) + (\nu \rightarrow \rho, c \rightarrow b, q \rightarrow -p - q)]|_{p=0} \right\}. \end{aligned} \quad (24)$$

Расходящаяся часть $\Gamma_{\mu\nu\rho}^{abc}(p, q)$ является полиномом первого порядка по переменным p, q . Поэтому сумма первых трех членов в правой части уравнения (24) конечна. Ниже мы докажем, что и остальные члены в правой части уравнения (24) конечны.

Как уже было отмечено выше, правая часть уравнения (24) включает вакуумное ожидание составного оператора $\Gamma_{\mu\nu}^{abc}$. Поэтому нам нужно доказать, что введение в эффективное действие контрчленов (14) обеспечивает конечность этого коррелятора. Для доказательства мы опять используем квантовые уравнения движения (17)–(19).

Рис. 2. Разложение функции $\Gamma_{\mu\nu}$ на одночастично-приводимую и неприводимую части.

Функцию $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}$ можно разделить на одночастично-приводимую и неприводимую части следующим образом (см. рис. 2):

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{abc,r}(x, y, z) = \int \tilde{G}_\mu^{ad}(x - x') \tilde{\Gamma}_\nu^{dbc,r}(x', y, z) dx' + (\tilde{\Gamma}^{ir})_{\mu\nu}^{abc}(x, y, z). \quad (25)$$

Здесь $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{ir}$ обозначает сильно связную часть $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}$, а Γ_ν^r – перенормированную вершину взаимодействия духов с полями Янга–Миллса. Наконец,

$$\tilde{G}_\mu^{ab}(x - x') = \langle \tilde{z}_2 \tilde{g} t^{aed} B_\mu^e(x) c^d(x) \bar{c}^b(x') \rangle. \quad (26)$$

В силу лоренц-инвариантности $G_\mu^{ab}(p)$ пропорциональна p_μ . Поэтому уравнение (18) дает

$$G_\mu^{ab}(p) = \tilde{z}_2 p_\mu G^{ab}(p) + \delta^{ab} p_\mu p^{-2}. \quad (27)$$

Подставляя разложение (25), (27) в уравнение (19), получаем

$$\Gamma_{\nu}^{abc,r}(p, q) + ip_{\mu}(\Gamma^{\text{ir}})_{\mu\nu}^{abc}(p, q) = 0. \quad (28)$$

Это уравнение показывает, что функция $p_{\mu}(\Gamma^{\text{ir}})_{\mu\nu}^{abc}$ конечна. Поскольку соответствующий интеграл расходится логарифмически, из лоренц-инвариантности следует, что функция $(\Gamma^{\text{ir}})_{\mu\nu}^{abc}(p, q)$ также конечна. Уравнение (28) выражает хорошо известный факт, впервые установленный в работе [1], что перенормировка составного оператора (22) связана с перенормировкой вершины взаимодействия духовых и калибровочных полей. Оно может быть принято за определение перенормированного составного оператора (22) через перенормированную вершину взаимодействия духовых и калибровочных полей. Альтернативная возможность состоит в выборе перенормировки составного оператора (22) в качестве независимой. Тогда перенормировка вершины взаимодействия духовых и калибровочных полей однозначно определяется формулой (28).

Функция $\Gamma_{\mu\nu}^{abc}(p, q)$ входит в уравнение (24), будучи умножена на поперечный проектор. Как видно из уравнений (25)–(27), приводимая часть функции $\Gamma_{\mu\nu}$ чисто продольная, и, следовательно, только неприводимая часть $\Gamma_{\mu\nu}$ дает вклад в уравнение (24). Это доказывает конечность правой части уравнения (24) и, следовательно, конечность перенормированной трехточечной вершинной функции.

Покажем теперь, что определение (24) в пределе $\Lambda \rightarrow \infty$ соответствует вычитанию из $\Gamma_{\mu\nu\rho}^{abc}(p, q)$ полинома по p, q и что $\Gamma_{\mu\nu\rho}^{abc,r}(p, q)$ удовлетворяет ТСТ.

В произвольной регуляризации, сохраняющей глобальную симметрию модели, расходящаяся часть трехточечной вершинной функции имеет следующую структуру:

$$i(z_1 - 1)t^{abc}[(p - k)_{\rho}g_{\mu\nu} + (k - q)_{\mu}g_{\nu\rho} + (q - p)_{\nu}g_{\mu\rho}]. \quad (29)$$

Имея это в виду, перепишем сумму первых трех членов в правой части уравнения (24) в виде

$$\begin{aligned} & (\Gamma_{\mu\nu\rho}^{abc}(p, q) + i(z_1 - 1)t^{abc}[(p - k)_{\rho}g_{\mu\nu} + (k - q)_{\mu}g_{\nu\rho} + (q - p)_{\nu}g_{\mu\rho}]) - \\ & - (\Gamma_{\mu\nu\rho}^{abc}(p, 0) + i(z_1 - 1)t^{abc}[2p_{\rho}g_{\mu\nu} - p_{\mu}g_{\nu\rho} - p_{\nu}g_{\mu\rho}]) - \\ & - (\Gamma_{\mu\nu\rho}^{abc}(0, q) + i(z_1 - 1)t^{abc}[q_{\rho}g_{\mu\nu} - 2q_{\mu}g_{\nu\rho} + q_{\nu}g_{\mu\rho}]). \end{aligned} \quad (30)$$

Постоянную z_1 определим из условия

$$\begin{aligned} & \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} [\Gamma_{\mu\nu\rho}^{abc}(p, 0) + i(z_1^{\Lambda} - 1)t^{abc}(2p_{\rho}g_{\mu\nu} - p_{\mu}g_{\nu\rho} - p_{\nu}g_{\mu\rho}) - \\ & - \frac{\partial}{\partial q_{\rho}} \{q^2 (G_{\text{tr}}^{-1})_{\mu\alpha}^r(p) G^r(q) \Gamma_{\alpha\nu}^{abc,r} + (\mu \rightarrow \nu, a \rightarrow b, p \rightarrow -p - q)\}] \Big|_{q=0} = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Как отмечалось выше, уравнение (31) есть не что иное, как дифференциальное ТСТ, поэтому в любой свободной от аномалий модели оно может быть удовлетворено подходящим выбором z_1 . В результате такого преобразования в пределе $\Lambda \rightarrow \infty$ выражение в фигурных скобках в правой части уравнения (24) обращается в нуль, и мы получаем

$$\Gamma_{\mu\nu\rho}^{abc,r}(p, q) = \Gamma_{\mu\nu\rho}^{abc}(p, q) + i(z_1 - 1)t^{abc}[(p - k)_{\rho}g_{\mu\nu} + (k - q)_{\mu}g_{\nu\rho} + (q - p)_{\nu}g_{\mu\rho}]. \quad (32)$$

Тем самым явно доказано, что в пределе $\Lambda \rightarrow \infty$ наша перенормировочная процедура совпадает с обычным локальным вычитанием. Справедливость ТСТ очевидна.

Последняя диаграмма, которую необходимо проанализировать, — это собственная четырехточечная вершинная функция полей Янга–Миллса. Ее можно проанализировать аналогично тому, как это было сделано с трехточечной функцией. Однако это можно сделать и более простым способом, не требующим анализа составных операторов.

В любой регуляризации четырехточечная вершина имеет следующую структуру:

$$\Pi_{\mu\nu\rho\sigma}^{abcd}(p, q, k) = P[A t^{abe} t^{cde} g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} + B \delta^{ab} \delta^{cd} g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma}] + O(p, q, k). \quad (33)$$

Здесь P — оператор симметризации по парам индексов $(a, \mu; b, \nu; c, \rho; d, \sigma)$, A и B — некоторые (расходящиеся в пределе снятой регуляризации) константы, $O(p, q, k)$ — функция, конечная в пределе $\Lambda \rightarrow \infty$. Из уравнения (33) следует, что

$$B = \frac{1}{3} p^{-4} p_\mu p_\nu p_\rho p_\sigma \Pi_{\mu\nu\rho\sigma}^{aaaa}(p, 0, 0) + O_1 \quad (34)$$

(нет суммирования по a) и

$$A = \frac{1}{3Np^2} P_{\nu\rho}(p) p_\mu p_\sigma \Pi_{\mu\nu\rho\sigma}^{abab}(p, 0, 0) + O_2 \quad (35)$$

(нет суммирования по a и $a \neq b$). Здесь $N = \sum_{b,e} t^{abe} t^{abe}$, $P_{\mu\nu}$ — поперечный проектор, O_1, O_2 — конечные функции.

Рис. 3. Слабо связанные диаграммы, дающие вклад в левую часть уравнения (36).

Мы определим перенормированную четырехточечную вершинную функцию следующим равенством:

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu\rho\sigma}^{abcd,r}(p, q, k) = & \Pi_{\mu\nu\rho\sigma}^{abcd}(p, q, k) - \\ & - P(t^{abe} t^{cde} g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma}) (3Np^2)^{-1} P_{\beta\gamma}(p) p^\alpha p^\delta (\Pi_{\text{con}})_{\alpha\beta\gamma\delta}^{nnnn}(p, 0, 0) - \\ & - P(g_{\mu\nu} g_{\sigma\rho} \delta^{ab} \delta^{cd}) \frac{1}{3} p^{-4} p^\alpha p^\beta p^\gamma p^\delta (\Pi_{\text{con}})_{\alpha\beta\gamma\delta}^{nnnn}(p, 0, 0). \end{aligned} \quad (36)$$

Заметим, что вычитаемые члены в правой части этого равенства включают функцию $\Pi_{\text{con}}(p, 0, 0)$, которая представляет все связанные однопетлевые диаграммы с четырьмя внешними векторными линиями. Они включают помимо собственной четырехточечной

вершины также слабо связанные диаграммы, изображенные на рис. 3. Слабо связанные диаграммы включают вершины с меньшим числом внешних линий, которые перенормированы в соответствии с процедурой, описанной выше.

В силу уравнений (34), (35) перенормированная функция $\Pi_{\mu\nu\rho\sigma}^{abcd,r}(p, q, k)$, определенная равенством (36), конечна в любой регуляризации.

Для доказательства локальности и калибровочной инвариантности нашей перенормировки опять воспользуемся дифференциальными ТСТ. Из ТСТ для четырехточечной вершинной функции следует

$$\begin{aligned} \langle \partial_\mu B_\mu^a(x) \partial_\nu B_\nu^b(y) \partial_\rho B_\rho^c(z) \partial_\sigma B_\sigma^d(u) \rangle = \\ = \delta(x-u) \delta(y-z) \delta^{ad} \delta^{bc} + (x, a \rightarrow y, b) + (x, a \rightarrow z, c). \end{aligned} \quad (37)$$

Это уравнение означает, что связанная часть коррелятора (37) обращается в нуль. Соответствующее дифференциальное тождество для фурье-образа четырехточечной вершины имеет вид

$$p_\mu p_\sigma (\Pi_{\text{con}}^r)_{\mu\nu\rho\sigma}^{abcd}(p, 0, 0) = 0. \quad (38)$$

Заменим функции $\Pi_{\mu\nu\rho\sigma}^{abcd}$ в правой части равенства (36) функциями, перенормированными с помощью локальных вычитаний:

$$\Pi_{\mu\nu\rho\sigma}^{abcd} \rightarrow \Pi_{\mu\nu\rho\sigma}^{abcd} + (z_4 - 1)P(t^{abe}t^{cde}g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma}) + (\tilde{z}_4 - 1)P(g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma}\delta^{ab}\delta^{cd}). \quad (39)$$

Константы z_4 и $\tilde{z}_4$ определим из условия, чтобы в пределе снятой регуляризации функции (39) удовлетворяли дифференциальному тождеству (38). В свободных от аномалий моделях это всегда можно сделать. Такая замена не нарушит равенства (36), поскольку члены, пропорциональные $(z_4 - 1)$ и $(\tilde{z}_4 - 1)$, в первом, втором и третьем слагаемых в правой части взаимно компенсируются. В результате получаем, что перенормированная в соответствии с нашим предписанием четырехточечная функция (36) в пределе снятой регуляризации совпадает с соответствующей функцией, перенормированной путем локальных вычитаний (39). Дифференциальные ТСТ выполнены по построению. Обобщение на многопетлевые диаграммы производится в соответствии со стандартной R -операцией. Поскольку, как было показано выше, наша вычислительная процедура в пределе снятой регуляризации эквивалентна локальным вычитаниям, то можно воспользоваться обычной комбинаторикой R -операции.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе было показано, что предложенная нами новая перенормировочная процедура может быть легко применена к неабелевым калибровочным теориям. Эта схема автоматически обеспечивает калибровочную инвариантность перенормированной теории при любой промежуточной регуляризации. Наиболее интересной областью приложений предлагаемого метода являются модели, к которым не применимы общепринятые методы, в первую очередь размерная регуляризация. Среди таких моделей

наибольший интерес представляют стандартная модель и суперсимметричные калибровочные теории. Применение этого метода к стандартной модели не вызывает никаких серьезных трудностей. Перенормировка суперсимметричных моделей является более сложной задачей, однако и здесь не видно принципиальных трудностей. Эти вопросы находятся в процессе исследования.

Благодарности. Часть этой работы была выполнена во время визита автора в Институт физики и астрофизики Макса Планка в Мюнхене, я признателен всем сотрудникам теоретического отдела за плодотворные дискуссии. Я благодарен Д. Мезону и Ю. Вессу за гостеприимство и Фонду Гумбольдта за поддержку.

Работа была частично поддержана грантом РФФИ № 99-01-00190 и грантом поддержки ведущих научных школ № 00-15-96046.

Список литературы

- [1] *A. A. Славнов.* ТМФ. 1972. Т. 10. С. 99.
- [2] *J. G. Taylor.* Nucl. Phys. B. 1971. V. 33. P. 436.
- [3] *K. Wilson.* Phys. Rev. D. 1974. V. 14. P. 2445.
- [4] *G. 't Hooft, M. Veltman.* Nucl. Phys. B. 1972. V. 44. P. 189.
- [5] *P. Breitenlohner, D. Maison.* Commun. Math. Phys. 1977. V. 52. P. 11.
- [6] *A. A. Славнов.* ТМФ. 1972. Т. 13. С. 174.
- [7] *B. W. Lee, J. Zinn-Justin.* Phys. Rev. D. 1972. V. 5. P. 3137.
- [8] *T. D. Bakeyev, A. A. Slavnov.* Mod. Phys. Lett. A. 1996. V. 11. P. 1539.
- [9] *S. A. Frolov, A. A. Slavnov.* Phys. Lett. B. 1993. V. 309. P. 344.
- [10] *M. M. Deminov, A. A. Slavnov.* Phys. Lett. B. 2001. V. 50. P. 297.
- [11] *Н. Н. Боголюбов, О. С. Парасюк.* ДАН СССР. 1955. Т. 100. С. 25.
- [12] *W. Zimmermann.* Commun. Math. Phys. 1974. V. 39. P. 81.
- [13] *C. Becchi, A. Rouet, R. Stora.* Commun. Math. Phys. 1975. V. 42. P. 127.
- [14] *O. Piguet, A. Rouet.* Phys. Rep. 1981. V. 76. № 1. P. 1.
- [15] *P. A. Grassi, T. Hurth, M. Steinhauser.* Ann. Phys. 2001. V. 288. P. 197.
- [16] *A. A. Slavnov.* Phys. Lett. B. 2001. V. 518. P. 195.
- [17] *Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков.* Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1976.

Поступила в редакцию 1.VIII.2001 г.