Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. К. Свинин, Интегрируемые цепочки и иерархии эволюционных дифференциальных уравнений, *ТМФ*, 2002, том 130, номер 1, 15–30

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf288>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 12:25:50

© 2002 г.

А. К. Сви́нин*

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ЦЕПОЧКИ И ИЕРАРХИИ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

На основе вспомогательных линейных уравнений, определенных на последовательностях формальных одевающих операторов Захарова–Шабата, строится класс интегрируемых дифференциально-разностных систем. Показано, что вспомогательные уравнения совместны с эволюционными уравнениями иерархии Кадомцева–Петвиашвили (КП). Эти результаты используются для построения модифицированного варианта рациональных редукций Кривчевера иерархии КП.

1. ВВЕДЕНИЕ

Огромное внимание в последнее время привлечено к исследованию интегрируемых иерархий эволюционных уравнений размерности $(1 + 1)$. Этот интерес объясняется тем, что эти иерархии содержат интересные с физической точки зрения эволюционные уравнения, допускающие множество различных методов построения их точных решений, включая метод обратной задачи [1]–[4].

С математической точки зрения эволюционные уравнения интегрируемых иерархий интересны, в частности, тем, что они обладают богатой алгебраической структурой. В последнее время большое внимание привлечено к дискретным симметриям интегрируемых эволюционных уравнений. Дискретные симметрии, или преобразования Дарбу–Беклунда, можно интерпретировать как некоторые отображения (соответствия), совместные с динамикой по соответствующим эволюционным параметрам. Как известно, отображение может быть задано с помощью (дифференциально-)разностной системы (цепочки). Таким образом, в основе построения и классификации интегрируемых уравнений может лежать интегрируемое отображение или цепочка. Следует отметить работы [5]–[9], где эта идея так или иначе используется.

В настоящей статье представлен класс многокомпонентных цепочек, допускающих представление Лакса. В основе их построения лежат вспомогательные линейные уравнения, определенные на последовательностях формальных одевающих операторов $\{\hat{w}_i$,

*Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск, Россия. E-mail: svinin@icc.ru

$i \in \mathbb{Z}$. Этот класс содержит хорошо известные системы, такие, например, как цепочка Вольтерра, цепочки Богоявленского, обобщенные цепочки Тоды. С каждой цепочкой ассоциируется бесконечный набор псевдодифференциальных операторов Лакса $\{Q_i, i \in \mathbb{Z}\}$, связанных между собой совместной парой калибровочных преобразований. В результате определяется дискретная группа, действующая на множестве последовательностей операторов Q_i и порождаемая, вообще говоря, парой элементов s_1 и s_2 , связанных соотношениями вида $s_1 \circ s_2 = s_2 \circ s_1$ и $s_1^q = s_2^p$ (см. ниже утверждение 2.2). Мы показываем, что отображения s_1 и s_2 совместны с потоками иерархии Кадомцева–Петвиашвили (КП). Этот факт в принципе дает возможность построения широкого класса интегрируемых иерархий на пространствах с конечной функциональной размерностью. В качестве примера определяются уравнения типа Лакса для модифицированного варианта рациональных редукций Кричевера иерархии КП с группой дискретных симметрий, которые в данном случае представляются в виде рациональных дифференциальных подстановок.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 представлен класс интегрируемых цепочек и приводятся примеры. В разделе 3 определяется алгоритм построения преобразований Миуры, отображающих решения однокомпонентных цепочек в решения l -компонентных ($l \geq 2$) цепочек. В разделе 4 показана совместность вспомогательных линейных уравнений с потоками иерархии КП. Раздел 5 посвящен построению модифицированных уравнений для редукций Кричевера иерархии КП.

2. КЛАСС ИНТЕГРИРУЕМЫХ ЦЕПОЧЕК

В настоящем разделе определяется класс интегрируемых дифференциально-разностных систем на конечный набор функций $\{a_0(i, x), a_1(i, x), \dots, a_{l-1}(i, x)\}$ от дискретной переменной $i \in \mathbb{Z}$ и непрерывной переменной $x \in \mathbb{R}^1$. Термин “интегрируемый” здесь означает лишь то, что данная цепочка может быть представлена уравнением Лакса.

Поясним некоторые обозначения, используемые в статье. Пусть $\mathcal{A}$ – произвольный псевдодифференциальный оператор вида

$$\mathcal{A} = \sum_{k \leq N} a_k(x) \partial^k,$$

где $a_k(x)$ – неизвестные (достаточно гладкие) функции переменной $x \in \mathbb{R}^1$, а ∂ – оператор производной по x . Символ $\mathcal{A}_{\pm}$ обозначает дифференциальную (интегральную) часть $\mathcal{A}$. Далее предполагается, что все неизвестные функции $a = a(x)$ являются также функциями эволюционных параметров $t_2, t_3, \dots$. Символ ∂_p используется для обозначения оператора производной по соответствующему параметру t_p . Запись $\partial_p \mathcal{A}$ используется для обозначения производной по t_p оператора $\mathcal{A}$.

Для произвольной пары целых чисел $n \in \mathbb{N}$ и $m \leq n-1$ определим бесконечный набор дифференциальных операторов первого порядка

$$H_i = \partial - \sum_{k=1}^n a_0(i+k-1, x), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad (1)$$

а также набор псевдодифференциальных операторов

$$G_i = \partial + \sum_{k=1}^{|m|} a_0(i-k, x) + \sum_{k=1}^{l-1} a_k(i+m, x) H_{i-kn}^{-1} \dots H_{i-2n}^{-1} H_{i-n}^{-1}$$

при $m \leq -1$ и

$$G_i = \partial - \sum_{k=1}^m a_0(i+k-1, x) + \sum_{k=1}^{l-1} a_k(i+m, x) H_{i-kn}^{-1} \dots H_{i-2n}^{-1} H_{i-n}^{-1}$$

при $m = 0, \dots, n-1$.

Их действие корректно определяется на пространстве формальных функций Бейкера–Ахиезера (БА)

$$\psi_i = \widehat{w}_i(e^{zx+\zeta_0}) = \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} w_k(i, x) z^{-k}\right) e^{zx+\zeta_0} \quad (2)$$

(здесь ζ_0 может линейно зависеть от эволюционных параметров $t_2, t_3, \dots$), которые строятся с помощью формальных одевающих операторов Захарова–Шабата

$$\widehat{w}_i = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} w_k(i, x) \partial^{-k}.$$

Определим вспомогательные уравнения

$$G_i \widehat{w}_i = \widehat{w}_{i+m} \partial, \quad H_i \widehat{w}_i = \widehat{w}_{i+n} \partial, \quad (3)$$

или в эквивалентном виде

$$G_i \psi_i = z \psi_{i+m}, \quad H_i \psi_i = z \psi_{i+n}. \quad (4)$$

Так как система (4) переопределена, то в общем случае она является несовместной. Условия совместности можно записать в следующем виде:

$$G_{i+n} H_i = H_{i+m} G_i, \quad (5)$$

или $H_{i+m}^{-1} G_{i+n} = G_i H_i^{-1}$.

В такой форме эти условия неудобны для вычислений, однако можно воспользоваться тем, что вспомогательные уравнения (4) записываются в терминах $(\mathbf{L}, \mathbf{A})$ -пары:

$$\mathbf{L}(\psi_i) = z \psi_i, \quad \psi'_i = \mathbf{A}(\psi_i),$$

где $\mathbf{L}$ и $\mathbf{A}$ – разностные операторы, определяемые по формулам¹⁾

$$\begin{aligned}\mathbf{L}(\psi_i) &= z\psi_{i+n-m} + \left(\sum_{s=1}^{n-m} a_0(i+s-1) \right) \psi_{i-m} + \sum_{j=1}^{l-1} \frac{1}{z^j} a_j(i) \psi_{i-m-jn}, \\ \mathbf{A}(\psi_i) &= z\psi_{i+n} + \left(\sum_{s=1}^n a_0(i+s-1) \right) \psi_i.\end{aligned}\tag{6}$$

Тогда условия совместности для пары уравнений (4) выражаются в форме уравнения Лакса

$$\mathbf{L}' = [\mathbf{A}, \mathbf{L}] \equiv \mathbf{A}\mathbf{L} - \mathbf{L}\mathbf{A}.\tag{7}$$

Можно показать, что уравнение (7) разрешается при условии, что набор функций $\{a_0(i), a_1(i), \dots, a_{l-1}(i)\}$ удовлетворяет следующей дифференциально-разностной системе:

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{n-m} a'_0(i+s-1) &= \sum_{s=1}^{n-m} a_0(i+s-1) \left(\sum_{s=1}^n a_0(i+s-1) - \sum_{s=1}^n a_0(i+s-m-1) \right) + \\ &\quad + a_1(i+n) - a_1(i), \\ a'_k(i) &= a_k(i) \left(\sum_{s=1}^n a_0(i+s-1) - \sum_{s=1}^n a_0(i+s-m-kn-1) \right) + \\ &\quad + a_{k+1}(i+n) - a_{k+1}(i), \quad k = 2, \dots, l-1,\end{aligned}\tag{8}$$

где полагается $a_l(i) = 0$. Ниже приводятся примеры интегрируемых цепочек, известных автору из литературы, которые являются частным случаем системы (8).

ПРИМЕР 2.1. В случае $n = 1$, $m = -1$, $l = 2$ система (8) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}a'_0(i) + a'_0(i+1) &= (a_0(i) + a_0(i+1))(a_0(i) - a_0(i+1)) + a_1(i+1) - a_1(i), \\ a'_1(i) &= 0.\end{aligned}$$

Фактически мы имеем в этом случае однокомпонентную цепочку²⁾

$$r'_i + r'_{i+1} = r_i^2 - r_{i+1}^2 + \nu_i,\tag{9}$$

где ν_i – некоторые постоянные. Как известно, уравнения (9) описывают элементарное преобразование Дарбу для оператора Шредингера $L = \partial^2 + q(x)$. Кроме того, известно, что периодические замыкания (9) с помощью условий $r_{i+N} = r_i$, $\nu_{i+N} = \nu_i$ для $N = 3$ и $N = 4$ приводят к трансцендентам Пенлеве P_4 и P_5 , соответственно [10].

¹⁾ Далее для краткости обозначаем $a_k(i) = a_k(i, x)$.

²⁾ Для однокомпонентных цепочек используется обозначение $a_0(i) = r_i$.

ПРИМЕР 2.2. При $n = 1$, $m = 0$, $l \geq 2$ система (8) представляет хорошо известные обобщенные цепочки Тоды

$$\begin{aligned} a'_0(i) &= a_1(i+1) - a_1(i), \\ a'_k(i) &= a_k(i)(a_0(i) - a_0(i-k)) + \\ &\quad + a_{k+1}(i+1) - a_{k+1}(i), \quad k = 2, \dots, l-1. \end{aligned} \quad (10)$$

В частности, при $l = 2$ получаем обычную одномерную цепочку Тоды

$$\begin{aligned} a'_0(i) &= a_1(i+1) - a_1(i), \\ a'_1(i) &= a_1(i)(a_0(i) - a_0(i-1)). \end{aligned} \quad (11)$$

Определяя бесконечный набор функций u_i соотношениями $a_0(i) = -u'_i$ и $a_1(i) = e^{u_{i-1}-u_i}$, цепочку (11) можно переписать в привычной форме $u''_i = e^{u_{i-1}-u_i} - e^{u_i-u_{i+1}}$.

ПРИМЕР 2.3. Пусть $n \geq 2$, $m = n-1$, $l = 1$. В этом случае из системы (8) получаем цепочки Богоявленского

$$r'_i = r_i \left(\sum_{k=1}^{n-1} r_{i+k} - \sum_{k=1}^{n-1} r_{i-k} \right). \quad (12)$$

Отметим, что для систем (12) представление Лакса с соответствующей $(\mathbf{L}, \mathbf{A})$ -парой (6) хорошо известно [11].

ПРИМЕР 2.4. Пусть $n = 2$, $m = -1$, $l = 2$. Система (8) в этом случае выражается в виде двухкомпонентной цепочки

$$\begin{aligned} a'_0(i) + a'_0(i+1) + a'_0(i+2) &= \\ &= (a_0(i) + a_0(i+1) + a_0(i+2))(a_0(i) - a_0(i+2)) + a_1(i+2) - a_1(i), \\ a'_1(i) &= a_1(i)(a_0(i+1) - a_0(i-1)). \end{aligned}$$

С точностью до некоторых простых преобразований эта система совпадает с цепочкой, исследуемой в работе [12].

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Как отмечено в [11], систему (12) можно интерпретировать как кинетическое уравнение, описывающее перенос энергии ленгмюровских колебаний в случае, когда спектр имеет “струйную” структуру [13].

Кроме функции БА с каждым $\hat{w}_i$ ассоциируется оператор Лакса

$$\mathcal{Q}_i = \hat{w}_i \partial \hat{w}_i^{-1} = \partial + \sum_{k=1}^{\infty} U_k(i) \partial^{-k}. \quad (13)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1. В силу соотношений (5) операторы Лакса $\mathcal{Q}_i$ связаны парой совместных преобразований подобия

$$\mathcal{Q}_{i+m} = G_i \mathcal{Q}_i G_i^{-1}, \quad (14)$$

$$\mathcal{Q}_{i+n} = H_i \mathcal{Q}_i H_i^{-1}. \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу условия (5) имеем

$$\mathcal{Q}_{i+m} = \widehat{w}_{i+m} \partial \widehat{w}_{i+m}^{-1} = (G_i \widehat{w}_i \partial^{-1}) \partial (\partial \widehat{w}_i^{-1} G_i^{-1}) = G_i \widehat{w}_i \partial \widehat{w}_i^{-1} G_i^{-1} = G_i \mathcal{Q}_i G_i^{-1}. \quad (16)$$

Справедливость соотношения (15) доказывается аналогично. Преобразование $\mathcal{Q}_i \rightarrow \mathcal{Q}_{i+m}$, осуществляемое по формуле (14), обозначим через s_1 . Преобразование (15) обозначим через s_2 . Совместность s_1 и s_2 также следует из условия (5). Действительно, имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{i+n+m} &= G_{i+n} \mathcal{Q}_{i+n} G_{i+n}^{-1} = G_{i+n} H_i \mathcal{Q}_i H_i^{-1} G_{i+n}^{-1} = \\ &= H_{i+m} G_i \mathcal{Q}_i G_i^{-1} H_{i+m}^{-1} = H_{i+m} \mathcal{Q}_{i+m} H_{i+m}^{-1}. \end{aligned}$$

Таким образом, утверждение доказано.

Обратные преобразования s_1^{-1} и s_2^{-1} хорошо определены и задаются формулами $G_{i-m}^{-1} \widehat{w}_i = \widehat{w}_{i-m} \partial^{-1}$ и $H_{i-n}^{-1} \widehat{w}_i = \widehat{w}_{i-n} \partial^{-1}$ или $\mathcal{Q}_{i-m} = G_{i-m}^{-1} \mathcal{Q}_i G_{i-m}$ и $\mathcal{Q}_{i-n} = H_{i-n}^{-1} \mathcal{Q}_i H_{i-n}$.

Пусть p и q – пара взаимно простых целых чисел таких, что $pn = qt$. Как нетрудно убедиться, выполняется соотношение $s_1^q = s_2^p$. Действительно, правая и левая части этого соотношения соответствуют одному преобразованию $\mathcal{Q}_i \rightarrow \mathcal{Q}_{i+pn} = \mathcal{Q}_{i+qt}$. Суммируем вышесказанное в следующем утверждении.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.2. Пусть набор функций $\{a_0(i), a_1(i), \dots, a_{l-1}(i)\}$ удовлетворяет дифференциально-разностной системе (8). Тогда на множестве операторов Лакса $\{\mathcal{Q}_i = \widehat{w}_i \partial \widehat{w}_i^{-1}, i \in \mathbb{Z}\}$ действует группа преобразований $\mathcal{G}$ с образующими s_1 и s_2 , которые определяются по формулам (14) и (15), соответственно. При этом групповые элементы s_1 и s_2 связаны соотношениями вида $s_1 \circ s_2 = s_2 \circ s_1$ и $s_1^q = s_2^p$, где p и q – произвольная пара взаимно простых целых чисел таких, что $pn = qt$, где $n \in \mathbb{N}$ и $m \leq n-1$.

Следует заметить, что операторы Лакса $\mathcal{Q}_i$ в силу уравнений (3) допускают множество представлений через вспомогательные операторы G_k и H_l . В частности, справедливо

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.3. Пусть $m = 1, \dots, n-1$ и p, q – произвольная пара натуральных чисел таких, что $pn = qt$ и $p = 1, \dots, q-1$. Тогда в силу совместности соотношений (3) оператор $\mathcal{Q}_i^{q-p}$ допускает $(q+p)/(q!p!)$ представлений в виде произведения G_k и H_l^{-1} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перепишем уравнения (3) в более удобном виде:

$$\widehat{w}_i = G_{i-m} \widehat{w}_{i-m} \partial^{-1}, \quad (17)$$

$$\widehat{w}_i = H_i^{-1} \widehat{w}_{i+n} \partial. \quad (18)$$

В произвольной последовательности применим формулу (17) q раз, а формулу (18) p раз. В результате получим, что оператор $\mathcal{Q}_i^{q-p} = \widehat{w}_i \partial^{q-p} \widehat{w}_i^{-1}$ выражается как произведение операторов G_k и H_l^{-1} , умноженное справа на

$$\widehat{w}_{i+pn-qt} \partial^0 \widehat{w}_i^{-1}. \quad (19)$$

Так как $pn = qt$, то выражение (19) является единичным оператором. Таким образом, оператор $\mathcal{Q}_i^{q-p}$ оказывается выраженным как произведение G_k и H_l^{-1} . Количество таких представлений несложно подсчитать. Как следует из элементарной комбинаторики, оно равно числу сочетаний из $(q + p)$ элементов по q или, что то же самое, числу сочетаний из $(q + p)$ элементов по p , т.е. $(q + p)! / (q!p!)$. Таким образом, утверждение доказано.

В качестве примера выпишем представление

$$\mathcal{Q}_i^{n-m} = H_i^{-1} H_{i+n}^{-1} \cdots H_{i+(m-1)n}^{-1} G_{i+(n-1)m} \cdots G_{i+m} G_i, \quad (20)$$

которое будет полезно в дальнейшем.

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МИУРЫ

Представление системы (8) в виде условия совместности вспомогательных линейных уравнений (4) позволяет достаточно просто и алгоритмично строить преобразования Миуры, отображающие решения однокомпонентных цепочек в решения l -компонентных цепочек ($l \geq 2$).

Нетрудно убедиться в том, что $F_i = G_{i+(l-1)n} H_{i+(l-2)n} \cdots H_{i+n} H_i$ является дифференциальным оператором l -го порядка. Как следствие линейных уравнений (4) получаем

$$F_i \psi_i = z^l \psi_{i+(l-1)n+m}, \quad H_i \psi_i = z \psi_{i+n}. \quad (21)$$

Здесь важно заметить, что вспомогательные системы (4) и (21) эквивалентны. Действительно, оператор G_i можно выразить через F_k и H_l по формуле

$$G_i = F_{i-(l-1)n} H_{i-(l-1)n}^{-1} \cdots H_{i-2n}^{-1} H_{i-n}^{-1}, \quad (22)$$

а затем получить (4) как следствие (21).

Определим пару целых чисел

$$\bar{n} = ln, \quad \bar{m} = (l-1)n + m. \quad (23)$$

Очевидно, что $\bar{n} \geq 2$ и $\bar{m} < \bar{n}$. Отождествим $\psi_i = \bar{\psi}_{li}$, где $\bar{\psi}_i$ — функции БА, удовлетворяющие соотношениям

$$\bar{G}_i \bar{\psi}_i = z \bar{\psi}_{i+\bar{m}}, \quad \bar{H}_i \bar{\psi}_i = z \bar{\psi}_{i+\bar{n}} \quad (24)$$

с операторами

$$\bar{H}_i = \partial - \sum_{k=1}^{\bar{n}} r_{i+k-1}, \quad \bar{G}_i = \begin{cases} \partial + \sum_{k=1}^{|\bar{m}|} r_{i-k}, & \bar{m} \leq -1, \\ \partial - \sum_{k=1}^{\bar{m}} r_{i+k-1}, & \bar{m} \geq 1. \end{cases}$$

Условия совместности линейных уравнений (24) эквивалентны однокомпонентной системе, являющейся частным случаем (8),

$$\sum_{s=1}^{\overline{n}-\overline{m}} r'_{i+s-1} = \sum_{s=1}^{\overline{n}-\overline{m}} r_{i+s-1} \left(\sum_{s=1}^{\overline{n}} r_{i+s-1} - \sum_{s=1}^{\overline{n}} r_{i+s-\overline{m}-1} \right). \quad (25)$$

Следствием (24) является пара линейных уравнений

$$\overline{F}_i \overline{\psi}_i = z^l \overline{\psi}_{i+l\overline{m}}, \quad \overline{H}_i \overline{\psi}_i = z \overline{\psi}_{i+\overline{n}}, \quad (26)$$

где $\overline{F}_i = \overline{G}_{i+(l-1)\overline{m}} \dots \overline{G}_{i+\overline{m}} \overline{G}_i$. Сравнивая (21) с (26), приходим к следующему отождествлению:

$$F_i = \overline{F}_{li}, \quad H_i = \overline{H}_{li}, \quad (27)$$

которое определяет преобразования Миуры. Учитывая соотношения (23), приходим к выводу, что обобщенные цепочки Тоды (10) связаны преобразованиями Миуры с цепочками Богоявленского (12) (см. ниже примеры 3.2 и 3.3).

ПРИМЕР 3.1. Хорошо известно, что цепочка Тоды (11) связана преобразованием

$$a_0(i) = r_{2i} + r_{2i+1}, \quad a_1(i) = r_{2i-1} r_{2i} \quad (28)$$

с цепочкой Вольтерра $r'_i = r_i(r_{i+1} - r_{i-1})$.

ПРИМЕР 3.2. Система уравнений

$$\begin{aligned} a'_0(i) &= a_1(i+1) - a_1(i), \\ a'_1(i) &= a_1(i)(a_0(i) - a_0(i-1)) + a_2(i+1) - a_2(i), \\ a'_2(i) &= a_2(i)(a_0(i) - a_0(i-2)) \end{aligned} \quad (29)$$

связана преобразованием

$$\begin{aligned} a_0(i) &= r_{3i} + r_{3i+1} + r_{3i+2}, \\ a_1(i) &= r_{3i-2} r_{3i} + r_{3i-1} r_{3i} + r_{3i-1} r_{3i+1}, \\ a_2(i) &= r_{3i-4} r_{3i-2} r_{3i} \end{aligned}$$

с цепочкой $r'_i = r_i(r_{i+2} + r_{i+1} - r_{i-1} - r_{i-2})$.

Из соотношений (23) следует, что одна и та же однокомпонентная цепочка связана преобразованиями Миуры, вообще говоря, с несколькими l -компонентными цепочками. Очевидно, что их количество определяется тем, сколько существует делителей числа $\overline{n}$ среди $l = 2, \dots, \overline{n}$.

ПРИМЕР 3.3. Рассмотрим однокомпонентную цепочку (25) при $\overline{n} = 4$ и $\overline{m} = 3$, т.е.

$$r'_i = r_i(r_{i+3} + r_{i+2} + r_{i+1} - r_{i-1} - r_{i-2} - r_{i-3}). \quad (30)$$

Уравнения (23) имеют в этом случае следующие решения: $n = 2$, $m = 1$, $l = 2$ и $n = 1$, $m = 0$, $l = 4$. Первому решению соответствует преобразование $a_0(i) = r_{2i} + r_{2i+1}$, $a_1(i) = r_{2i-3}r_{2i}$, отображающее решения уравнений (30) в решения двухкомпонентной цепочки

$$\begin{aligned} a'_0(i) &= a_0(i)(a_0(i+1) - a_0(i-1)) + a_1(i+2) - a_1(i), \\ a'_1(i) &= a_1(i)(a_0(i+1) + a_0(i) - a_0(i-2) - a_0(i-3)). \end{aligned}$$

Второе решение уравнений (23) соответствует обобщенной цепочке Тоды (10) при $l = 4$, т.е.

$$\begin{aligned} a'_0(i) &= a_1(i+1) - a_1(i), \\ a'_1(i) &= a_1(i)(a_0(i) - a_0(i-1)) + a_2(i+1) - a_2(i), \\ a'_2(i) &= a_2(i)(a_0(i) - a_0(i-2)) + a_3(i+1) - a_3(i), \\ a'_3(i) &= a_3(i)(a_0(i) - a_0(i-3)). \end{aligned} \quad (31)$$

Можно убедиться, что преобразование

$$\begin{aligned} a_0(i) &= r_{4i} + r_{4i+1} + r_{4i+2} + r_{4i+3}, \\ a_1(i) &= r_{4i-3}r_{4i} + r_{4i-2}r_{4i+1} + r_{4i-1}r_{4i+2} + r_{4i-2}r_{4i} + r_{4i-1}r_{4i} + r_{4i-1}r_{4i+1}, \\ a_2(i) &= r_{4i-6}r_{4i-3}r_{4i} + r_{4i-5}r_{4i-3}r_{4i} + r_{4i-5}r_{4i-2}r_{4i} + r_{4i-5}r_{4i-2}r_{4i+1}, \\ a_3(i) &= r_{4i-9}r_{4i-6}r_{4i-3}r_{4i} \end{aligned}$$

отображает решения однокомпонентной цепочки (30) в решения уравнений (31).

Представим результаты вычислений преобразований Миуры с помощью формул (27) для двухкомпонентных цепочек. Преобразование Миуры можно записать единообразно:

$$a_0(i) = r_{2i} + r_{2i+1}, \quad a_1(i) = \sum_{s=1}^{n-m} r_{2i+s-n-m-1} \cdot \sum_{s=1}^{n-m} r_{2i+s-1}.$$

Исключения составляют цепочки, для которых $m \leq -1$ и $n = |m|$, так как в этом случае получается, что $\overline{m} = 0$. Однако следует заметить, что при этом фактически мы имеем однокомпонентные цепочки, так как $a'_1(i) = 0$ (см. пример 2.1).

4. СОВМЕСТИМОСТЬ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ (3) С ИЕРАРХИЕЙ КП

В разделе 2 был определен класс интегрируемых цепочек, с каждой из которых можно ассоциировать цепочку операторов Лакса (13). При этом уравнения (8) гарантируют совместность преобразований s_1 и s_2 , осуществляемых по формулам (14) и (15). Индекс

$i \in \mathbb{Z}$ можно интерпретировать как дискретный эволюционный параметр, динамика по которому определяется отображениями s_1 и s_2 .

Предположим, что каждый оператор $\mathcal{Q}_i$ удовлетворяет эволюционным уравнениям Лакса иерархии КП, которые можно также записать в форме уравнения Сато–Вильсона на одевающий оператор $\widehat{w}_i$, т.е.

$$\partial_p \widehat{w}_i = -(\mathcal{Q}_i^p)_- \widehat{w}_i = (\mathcal{Q}_i^p)_+ \widehat{w}_i - \widehat{w}_i \partial^p. \quad (32)$$

Естественно задать вопрос, при каких условиях отображения s_1 и s_2 будут совместны с эволюцией по каждому из параметров t_p , определяемой уравнением Сато–Вильсона (32). Дифференцируя по t_p правую и левую части соотношений (3) в силу (32), получаем условия совместности в форме эволюционных уравнений

$$\partial_p G_i = (\mathcal{Q}_{i+m}^p)_+ G_i - G_i (\mathcal{Q}_i^p)_+, \quad (33)$$

$$\partial_p H_i = (\mathcal{Q}_{i+n}^p)_+ H_i - H_i (\mathcal{Q}_i^p)_+. \quad (34)$$

Необходимо доказать корректность совместного определения эволюционных уравнений (33) и (34).

Доказательство корректности определения уравнения (34) базируется на стандартных рассуждениях [14]. Соотношение (15) перепишем в виде $\mathcal{Q}_{i+n} H_i = H_i \mathcal{Q}_i$. Отсюда следует

$$\mathcal{Q}_{i+n}^p H_i = H_i \mathcal{Q}_i^p$$

при произвольных $p \in \mathbb{N}$. В силу этого соотношения можно записать в виде

$$(\mathcal{Q}_{i+n}^p)_+ H_i - H_i (\mathcal{Q}_i^p)_+ = -H_i (\mathcal{Q}_{i+n}^p)_- + (\mathcal{Q}_i^p)_- H_i.$$

Правая часть этого соотношения является псевдодифференциальным оператором нулевого порядка, в то время как левая часть – чисто дифференциальный оператор. Отсюда следует, что выражение $(\mathcal{Q}_{i+n}^p)_+ H_i - H_i (\mathcal{Q}_i^p)_+$ является дифференциальным оператором нулевого порядка или просто функцией.

Несколько сложнее ситуация с уравнением (33), так как G_i в общем случае является псевдодифференциальным оператором специального вида. Однако в этой ситуации можно воспользоваться эквивалентной вспомогательной системой (21), где F_i – чисто дифференциальный оператор l -го порядка. Эволюционное уравнение на F_i , следующее из (33) и (34), записывается в виде

$$\partial_p F_i = (\mathcal{Q}_{i+m+(l-1)n}^p)_+ F_i - F_i (\mathcal{Q}_i^p)_+, \quad (35)$$

в то время как имеет место соотношение

$$\mathcal{Q}_{i+m+(l-1)n} = F_i \mathcal{Q}_i F_i^{-1}. \quad (36)$$

Очевидно, что калибровочное преобразование (36) соответствует элементу $s_1 \circ s_2^{l-1} \in \mathcal{G}$. Используя тот же ход рассуждений, что и для оператора H_i , нетрудно показать, что

правая часть соотношения (35) является дифференциальным оператором $(l - 1)$ -го порядка. Используя соотношение (22), можно вернуться к паре уравнений (33) и (34). Таким образом, корректность определения каждого из этих уравнений по отдельности доказана. Остается показать их совместность. Для этого достаточно показать, что взятие производной по t_p правой и левой частей соотношения (5) в силу уравнений (33) и (34) дает тождество. Проверка этого факта сводится к прямым вычислениям. Приведем примеры эволюционных уравнений (33) и (34) для первых нетривиальных представителей в соответствующей иерархии.

ПРИМЕР 4.1. Рассмотрим случай $n = 2$, $m = 1$, $l = 1$, отвечающий цепочке Вольтерра. Уравнение, определяющее эволюцию по параметру t_2 операторов $G_i = \partial - r_i$ и $H_i = \partial - r_i - r_{i+1}$, имеет следующий вид:

$$\partial_2 r_i = (r'_i + r_i^2 + 2r_{i-1}r_i)'. \quad (37)$$

В силу уравнений $r'_i = r_i(r_{i+1} - r_{i-1})$ из (37) получаем высший аналог цепочки Вольтерра:

$$\partial_2 r_i = r_i(r_{i+1}r_{i+2} - r_{i-1}r_{i-2} + r_{i+1}^2 - r_{i-1}^2 + r_i r_{i+1} - r_i r_{i-1}).$$

ПРИМЕР 4.2. В случае $n = 3$, $m = 1$, $l = 1$ получаем

$$\partial_2 r_i = (r'_{i-1} + r'_i + r_i^2 + r_{i-2}r_{i-1} + r_{i-2}r_i + r_{i-1}r_i)'. \quad (38)$$

Заметим, что если ввести переменные $s_i = r_i + r_{i+1}$, то в силу уравнений цепочки $s'_i = s_i(r_{i+2} - r_{i-1})$ будет справедливо равенство

$$\partial_2 s_i = s_i(s_{i+2}s_{i+1} - s_{i-1}s_{i-2}). \quad (38)$$

При этом $\partial_2 r_i = s_{i-1}s_i s_{i+1} - s_{i-2}s_{i-1}s_i$. Прямыми вычислениями несложно проверить коммутативность потоков, определяемых эволюционными параметрами x и t_2 .

Заметим, что цепочка (38) входит в хорошо известный класс цепочек вида

$$\partial_t s_i = s_i \left(\prod_{k=1}^r s_{i+k} - \prod_{k=1}^r s_{i-k} \right), \quad (39)$$

каждую из которых, так же как и системы (12), можно интерпретировать как дискретный вариант уравнения Кортевега–де Фриза [11]. Обозначим

$$s_i = \sum_{k=1}^{n-1} r_{i+k-1}.$$

Тогда, как нетрудно убедиться, однокомпонентные цепочки, соответствующие выбору $m = 1$, $n \geq 2$, записываются в виде $s'_i = s_i(r_{i+n-1} - r_{i-1})$. Заметим, что система (39) является следствием соотношения

$$\partial_t r_i = \prod_{k=0}^{n-1} s_{i-k+1} - \prod_{k=0}^{n-1} s_{i-k}. \quad (40)$$

Прямыми вычислениями с использованием соотношения (40) проверяется коммутативность потоков по параметрам x и t .

5. МОДИФИЦИРОВАННЫЙ ВАРИАНТ РАЦИОНАЛЬНЫХ РЕДУКЦИЙ КРИЧЕВЕРА ИЕРАРХИИ КП

Цель этого раздела – построить уравнения типа Лакса для иерархий эволюционных уравнений, соответствующих однокомпонентным цепочкам, при $m = 1, \dots, n-1$.

Определим

$$\begin{aligned} G_{(1)} &= G_{i_0}, & G_{(2)} &= G_{i_0+m}, & \dots, & & G_{(n)} &= G_{i_0+(n-1)m}, \\ H_{(1)} &= H_{i_0}, & H_{(2)} &= H_{i_0+n}, & \dots, & & H_{(m)} &= H_{i_0+(m-1)n} \end{aligned}$$

и соответствующие наборы операторов Лакса $\{\mathcal{L}_{(k)} = \mathcal{Q}_{i_0+(k-1)m}, k = 1, \dots, n+1\}$ и $\{\mathcal{M}_{(k)} = \mathcal{Q}_{i_0+(k-1)n}, k = 1, \dots, m+1\}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.1. *Для операторов $\mathcal{L}_{(k)}^N$ и $\mathcal{M}_{(k)}^N$, где $N = n-m$, имеют место следующие представления:*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{(k)}^N &= G_{(k-1)} \dots G_{(1)} H_{(1)}^{-1} \dots H_{(m)}^{-1} G_{(n)} \dots G_{(k)}, \\ \mathcal{M}_{(k)}^N &= H_{(k)}^{-1} \dots H_{(m)}^{-1} G_{(n)} \dots G_{(1)} H_{(1)}^{-1} \dots H_{(k-1)}^{-1}. \end{aligned} \tag{41}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представление (41) для $\mathcal{L}_{(1)}^N = \mathcal{M}_{(1)}^N$ следует из (20). Чтобы получить представления (41) для остальных значений k , достаточно заметить, что $\mathcal{L}_{(k)}^N$ и $\mathcal{M}_{(k)}^N$ связаны обратимыми преобразованиями

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{(k+1)}^N &= G_{(k)} \mathcal{L}_{(k)}^N G_{(k)}^{-1}, & k &= 1, \dots, n, \\ \mathcal{M}_{(k+1)}^N &= H_{(k)} \mathcal{M}_{(k)}^N H_{(k)}^{-1}, & k &= 1, \dots, m, \end{aligned}$$

которые следуют из (14) и (15). Утверждение доказано.

Из условий (33) и (34) получаем пару уравнений типа Лакса

$$\begin{aligned} \partial_p G_{(k)} &= (\mathcal{L}_{(k+1)}^p)_+ G_{(k)} - G_{(k)} (\mathcal{L}_{(k)}^p)_+, \\ \partial_p H_{(k)} &= (\mathcal{M}_{(k+1)}^p)_+ H_{(k)} - H_{(k)} (\mathcal{M}_{(k)}^p)_+. \end{aligned} \tag{42}$$

Определим $P_m = H_{(m)} \dots H_{(1)}$ и $Q_n = G_{(n)} \dots G_{(1)}$ и пару операторов Лакса $L = P_m^{-1} Q_n$ и $M = Q_n P_m^{-1}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.2. *В силу (42) выполняются уравнения типа Лакса*

$$\begin{aligned} \partial_p P_m &= M_+^{p/N} P_m - P_m L_+^{p/N}, \\ \partial_p Q_n &= M_+^{p/N} Q_n - Q_n L_+^{p/N}. \end{aligned} \tag{43}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Принимая во внимание второе уравнение в (42), получаем

$$\begin{aligned}\partial_p P_m &= \sum_{k=1}^m H_{(m)} \cdots H_{(k+1)} \{ (\mathcal{M}_{(k+1)}^p)_+ H_{(k)} - H_{(k)} (\mathcal{M}_{(k)}^p)_+ \} H_{(k-1)} \cdots H_{(1)} = \\ &= (\mathcal{M}_{(m+1)}^p)_+ P_m - P_m (\mathcal{M}_{(1)}^p)_+.\end{aligned}\quad (44)$$

Так как $\mathcal{M}_{(1)}^N = L$ и $\mathcal{M}_{(m+1)}^N = M$, то из (44) следует первое из уравнений (43). Аналогично показывается справедливость второго уравнения в (43).

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Следствием (43) являются уравнения Лакса

$$\partial_p L = [L_+^{p/N}, L], \quad \partial_p M = [M_+^{p/N}, M].$$

Пара уравнений (43) представляет хорошо известные рациональные редукции Кричевера иерархии КП [15]. Формальная факторизация операторов

$$P_m = \partial^m + \sum_{s=0}^{m-1} p_s(x) \partial^s, \quad Q_n = \partial^n + \sum_{s=0}^{n-1} q_s(x) \partial^s$$

операторами первого порядка однозначно определяет дифференциальные подстановки (преобразования Миуры)

$$p_s = f_s[v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_m], \quad q_s = g_s[v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_m],$$

отображающие согласно утверждению 5.2 решения уравнений (42) в решения эволюционных уравнений (43). Таким образом, можно сказать, что уравнения типа Лакса (42) в силу утверждения 5.2 являются модифицированным вариантом рациональных редукций Кричевера.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. В работе [16] на основе геометрического подхода была показана эквивалентность редукций Кричевера иерархии КП ограниченным иерархиям КП с оператором Лакса [17]–[19]

$$L = \partial^{n-m} + \sum_{s=0}^{n-m-2} u_s(x) \partial^s + \sum_{s=1}^m \Phi_s(x) \partial^{-1} \circ \Psi_s(x).$$

Интерес к ограниченным иерархиям КП обусловлен их применением в матричных моделях [20], [21].

Определим конечный набор функций $\{v_k, g_k, p_k, \ k = 1, \dots, n; \ u_k, h_k, q_k, \ k = 1, \dots, m\}$, отождествляя

$$\begin{aligned}v_k &= \sum_{s=1}^m r_{i_0+s+(k-1)m-1}, & u_k &= \sum_{s=1}^n r_{i_0+s+(k-1)n-1}, \\ h_k &= \sum_{s=1}^{n-m} r_{i_0+s+(k-1)n+m-1}, & g_k &= - \sum_{s=1}^{n-m} r_{i_0+s+k m-1}, \\ q_k &= \sum_{s=1}^{n-m} r_{i_0+s+(m-k)n-1}, & p_k &= - \sum_{s=1}^{n-m} r_{i_0+s+(n-k)m-n+m-1}.\end{aligned}$$

Заметим, что $H_{(k)} = \partial - u_k$ и $G_{(k)} = \partial - v_k$. Пара уравнений (42) определяет динамические системы на пространстве $\mathcal{K}_{n,m}$, в котором точки определяются конечными наборами функций v_k и u_k с дополнительным соотношением

$$\sum_{k=1}^n v_k = \sum_{k=1}^m u_k,$$

которое, как нетрудно убедиться, следует из определения этих функций. Прямыми вычислениями доказываются следующие утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.3. *В силу уравнений однокомпонентных цепочек (25) функции h_k , g_k , q_k и p_k определяются как дифференциальные рациональные функции от v_k и u_k с помощью следующих рекуррентных соотношений:*

$$\begin{aligned} h_k &= u_k - v_1 - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{h'_i}{h_i}, & g_k &= v_k - u_1 - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{g'_i}{g_i}, \\ q_k &= u_{m-k+1} - v_n + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{q'_i}{q_i}, & p_k &= v_{n-k+1} - u_m + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{p'_i}{p_i}. \end{aligned}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.4. *Преобразования симметрии s_1 и s_2 и обратные им вычисляются по формулам*

$$\begin{aligned} s_1(v_k) &= v_{k+1}, \quad k = 1, \dots, n-1, & s_1(v_n) &= v_1 + \sum_{i=1}^m \frac{h'_i}{h_i}, \\ s_1(u_k) &= u_k + \frac{h'_k}{h_k}, \quad k = 1, \dots, m, \\ s_2(u_k) &= u_{k+1}, \quad k = 1, \dots, m-1, & s_2(u_m) &= u_1 + \sum_{i=1}^n \frac{g'_i}{g_i}, \\ s_2(v_k) &= v_k + \frac{g'_k}{g_k}, \quad k = 1, \dots, n, \\ s_1^{-1}(v_1) &= v_n - \sum_{i=1}^m \frac{q'_i}{q_i}, & s_1^{-1}(v_k) &= v_{k-1}, \quad k = 2, \dots, n, \\ s_1^{-1}(u_k) &= u_k - \frac{q'_{m-k+1}}{q_{m-k+1}}, \quad k = 1, \dots, m, \\ s_2^{-1}(u_1) &= u_m - \sum_{i=1}^n \frac{p'_i}{p_i}, & s_2^{-1}(u_k) &= u_{k-1}, \quad k = 2, \dots, m, \\ s_2^{-1}(v_k) &= v_k - \frac{p'_{n-k+1}}{p_{n-k+1}}, \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Известно, что ограничение второй гамильтоновой структуры иерархии КП на пространство $\mathcal{K}_{n,m}$ определяется следующими скобками Пуассона:

$$\begin{aligned}\{v_k(x), v_l(y)\}_2 &= \left(\delta_{kl} - \frac{1}{N}\right) \partial_x \delta(x-y), \\ \{u_k(x), u_l(y)\}_2 &= -\left(\delta_{kl} - \frac{1}{N}\right) \partial_x \delta(x-y), \\ \{v_k(x), u_l(y)\}_2 &= -\frac{1}{N} \partial_x \delta(x-y),\end{aligned}$$

где $N = n - m$. Отсюда, в частности, следует, что соответствующие эволюционные уравнения (42) допускают введение потенциалов w_k и z_k с помощью соотношений $v_k = w'_k$ и $u_k = z'_k$.

ПРИМЕР 5.1. Хорошо известный пример – иерархия эволюционных уравнений, соответствующая цепочке Вольтерра. В этом случае первый нетривиальный представитель иерархии определяется системой [8], [22]

$$\begin{aligned}\partial_2 v_1 &= (-v'_1 + v_1^2 + 2v_1 v_2)', \\ \partial_2 v_2 &= (v'_2 + v_2^2 + 2v_1 v_2)'\end{aligned}\tag{45}$$

с гамильтонианом

$$H = \int (-v_1^2 v_2 - v_1 v_2^2 + v_2 v_1') dx.$$

Функция u здесь исключается благодаря условию $u = v_1 + v_2$. Преобразование дискретной симметрии дается дифференциальной подстановкой

$$s_1(v_1) = v_2, \quad s_1(v_2) = v_1 + \frac{v_2'}{v_2}.$$

В силу утверждения 2.2 выполняется $s_2 = s_1^2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.3. Пара уравнений (45) в потенциальном виде выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}\partial_2 w_1 &= -w_1'' + w_1'^2 + 2w_1' w_2', \\ \partial_2 w_2 &= w_2'' + w_2'^2 + 2w_1' w_2'.\end{aligned}\tag{46}$$

В связи с этой системой следует упомянуть работу [7], в которой классифицируются цепочки вида

$$\nu_i'' = \frac{1}{2} \{G(\nu_{i+1}, \nu_i, \nu_{i+1}', \nu_i') - F(\nu_i, \nu_{i-1}, \nu_i', \nu_{i-1}')\},$$

обладающие симметриями

$$\partial_t \nu_i = \frac{1}{2} \{G(\nu_{i+1}, \nu_i, \nu_{i+1}', \nu_i') + F(\nu_i, \nu_{i-1}, \nu_i', \nu_{i-1}')\}.$$

В результате в указанной работе был получен список интегрируемых цепочек с ассоциированными эволюционными системами типа нелинейного уравнения Шредингера. В частности, системе (46) соответствует цепочка Вольтерра $\nu_i'' = \nu_i'(\nu_{i+1}' - \nu_{i-1}')$ с $F_i = \nu_i'^2 + 2\nu_{i-1}'\nu_i'$ и $G_i = \nu_i'^2 + 2\nu_i'\nu_{i+1}'$.

Благодарности. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке INTAS (проект № 2000-15).

Список литературы

- [1] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский. Теория солитонов. Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.
- [2] Л. А. Тазтаджян, Л. Д. Фаддеев. Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986.
- [3] М. Абловиц, Х. Сигур. Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987.
- [4] Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988.
- [5] А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов. Алгебра и анализ. 1990. Т. 2. С. 183.
- [6] A. N. Leznov, A. B. Shabat, R. I. Yamilov. Phys. Lett. A. 1993. V. 174. P. 397.
- [7] В. Э. Адлер, А. Б. Шабат. ТМФ. 1997. Т. 111. С. 323.
- [8] D. Levi. J. Phys. A. 1981. V. 14. P. 1083.
- [9] H. Aratyn, L. A. Ferreira, J. F. Gomez, A. H. Zimerman. Toda and Volterra lattice equations from discrete symmetries of KP hierarchies. hep-th/9307147.
- [10] В. Э. Адлер, А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов. ТМФ. 2000. Т. 125. С. 355.
- [11] О. И. Богоявленский. Опрокидывающиеся солитоны. Нелинейные интегрируемые уравнения. М.: Наука, 1991.
- [12] X.-B. Hu, H.-W. Tam. Inverse Problems. 2001. V. 17. P. 319.
- [13] В. Е. Захаров, С. Л. Мушер, А. М. Рубенчик. Письма в ЖЭТФ. 1974. Т. 19. С. 249.
- [14] L. A. Dickey. Lett. Math. Phys. 1999. V. 48. P. 277.
- [15] И. М. Кричевер. Функци. анализ и его прилож. 1995. Т. 29. № 2. С. 1.
- [16] G. F. Helminck, J. W. van de Leur. Commun. Math. Phys. 1998. V. 193. P. 627.
- [17] Y. Cheng. J. Math. Phys. 1992. V. 33. P. 3774.
- [18] Y.-J. Zhang, Y. Cheng. J. Math. Phys. 1994. V. 35. P. 5869.
- [19] A. Kundu, W. Strampp, W. Oevel. J. Math. Phys. 1995. V. 36. P. 2972.
- [20] L. Bonora, C. S. Xiong. Nucl. Phys. B. 1993. V. 405. P. 191.
- [21] H. Aratyn, E. Nissimov, S. Pacheva. Int. J. Mod. Phys. A. 1997. V. 12. P. 1265.
- [22] А. В. Михайлов, А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов. УМН. 1987. Т. 42. С. 3.

Поступила в редакцию 16.IV.2001 г.