Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Т. Хабибуллин, Начально-краевая задача для уравнения КдФ на полуоси с однородными краевыми условиями, *ТМФ*, 2002, том 130, номер 1, 31–53

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf289>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 05:39:33

© 2002 г.

И. Т. Хабибуллин*

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КдФ НА ПОЛУОСИ С ОДНОРОДНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Рассмотрено уравнение Кортевега–де Фриза на полуоси с нулевыми краевыми условиями в точке $x = 0$ и произвольными гладкими убывающими начальными данными. Показано, что задача эффективно интегрируется методом обратной задачи рассеяния, если у ассоциированного линейного уравнения нет дискретного спектра. При этих предположениях доказана глобальная разрешимость задачи.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается следующая начально-краевая задача для уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ):

$$u_t = u_{xxx} - 6u_x u, \quad x > 0, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u_{xx}|_{x=0} = 0, \quad (2)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_0(x)|_{x \rightarrow +\infty} \rightarrow 0. \quad (3)$$

Все условия, которым должны удовлетворять данные задачи (1)–(3), мы сформулируем в виде предположений 1 и 2.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 1. Функция $u_0(x)$, определяющая начальное условие, является бесконечно гладкой и стремится к нулю на бесконечности в смысле Шварца, т.е. функция $u_0(x)$ и все ее производные убывают быстрее любой степени x . При $x = 0$ функция $u_0(x)$ обращается в нуль вместе со всеми производными.

Хотя уравнение КдФ в контексте теории интегрируемости является одним из самых популярных и хорошо изученных, такая классическая проблема, как начально-краевая задача на полуоси для этого уравнения, до сих пор остается мало исследованной. В

*Институт математики Уфимского научного центра РАН, Уфа, Россия.
E-mail: ihabib@imat.rb.ru

общем случае не ясно даже существование глобального решения¹⁾. Заметим, что в аналогичной задаче для модифицированного уравнения КдФ теорема о глобальной разрешимости была доказана Хабловым еще в 1979 г. (см. [1]).

Метод обратной задачи рассеяния, позволивший детально изучить задачу Коши для уравнения (1) в различных классах начальных данных, плохо переносится на начально-краевые задачи с произвольными краевыми и начальными условиями. Здесь мало успехов, несмотря на то что по этой тематике, особенно в последнее время, ведутся активные исследования (см., например, работу Фокаса [2], где предлагаются оригинальные подходы). Исключение составляют специальные типы краевых условий, называемые интегрируемыми. Таковыми являются, в частности, краевые условия (2) – они согласованы с основными признаками интегрируемости – задача (1), (2) имеет бесконечно много интегралов движения и высших симметрий [3]. Первые три интеграла движения этой задачи имеют вид (см. работу [4])

$$J_1 = \int_0^\infty u \, dx, \quad J_2 = \int_0^\infty (u_x^2 + 2u^3) \, dx, \quad J_3 = \int_0^\infty (u_{xx}^2 - 5u^2 u_{xx} + 5u^4) \, dx.$$

Но заметим, что не все законы сохранения уравнения КдФ совместимы с задачей (1)–(3). Например, хорошо известный функционал $\int_0^\infty u^2 \, dx$ не сохраняет своего значения. Наличие бесконечного набора законов сохранения позволяет, по-видимому, доказать, что задача (1), (2) является вполне интегрируемой гамильтоновой системой, хотя этот вопрос нигде не рассматривался. Совместимость краевого условия с высшими симметриями в принципе дает возможность строить частные решения краевой задачи (проблема описания явных частных решений краевой задачи для уравнения КдФ рассматривалась, например, в работе [4]). Отметим, что благодаря Мозесу [5] давно известно явное решение $u = -2D_x^2 \ln(x^3 - 12(t - t_0))$ задачи (1), (2). К сожалению, это решение имеет полюс второго порядка в правой полуоси $x > 0$ при $t > t_0$. Кстати, не известно ни одного убывающего явного частного решения задачи (1), (2), не имеющего сингулярностей при $x > 0$.

Цель настоящей работы – показать, что задача (1)–(3) эффективно вкладывается в схему метода обратной задачи рассеяния. Напомним, что в основе этого метода лежит наличие так называемой L – A -пары – уравнение КдФ является условием совместности следующей пары линейных дифференциальных уравнений:

$$-y_{xx} + uy = \xi^2 y, \tag{4}$$

$$y_t = u_x y - 2(u + 2\xi^2)y_x. \tag{5}$$

Основная трудность, возникающая при перенесении метода обратной задачи рассеяния на смешанные задачи, заключается в том, что эволюция по t матрицы рассеяния задачи на полуоси для уравнения (4) описывается уже не явными формулами, а нелинейным дифференциальным уравнением (см. ниже уравнение (26)). В случае интегрируемого краевого условия это нелинейное уравнение имеет нетривиальную группу дискретных

¹⁾ Автор благодарит А. В. Фаминского, любезно указавшего ему на это обстоятельство.

симметрий. Наличие дискретной группы позволяет по известной при $t = 0$ матрице рассеяния уравнения (4) вычислить данные рассеяния второго уравнения L - A -пары. Затем в результате решения обратной задачи рассеяния восстанавливаются потенциал и собственные функции уравнения (5) при $x = 0$. В итоге удастся достаточно эффективно определить зависимость матрицы рассеяния от времени, так как она удовлетворяет в сущности тому же самому уравнению (5) (ранее этот вопрос кратко обсуждался в заметке [6]).

Перейдем к более подробному обсуждению содержания работы. Во втором разделе мы напомним известные факты из теории рассеяния для дифференциального оператора второго порядка, переформулированные для случая гладкого потенциала с носителем на полуоси. Определяются собственные функции, матрица рассеяния и т. д., после чего формулируется некое глобальное требование, которому должна в дополнение к уже сказанному удовлетворять начальная функция $u_0(x)$ (см. предположение 2). Это требование состоит в том, что уравнение $-y_{xx} + u_0(x)y = \xi^2 y$ не должно иметь дискретных собственных значений.

Основная идея работы излагается в третьем разделе, в котором уравнение эволюции матрицы рассеяния сводится к линейной задаче – задаче Римана–Гильберта о линейном сопряжении кусочно-аналитических матричных функций. Однозначная разрешимость задачи Римана–Гильберта доказывается сведением ее к системе интегральных уравнений и применением известных теорем функционального анализа. Далее, в четвертом разделе проверяется, что при $t > 0$ у уравнения (4) нет дискретного спектра. В данном случае это вовсе не очевидно, так как диагональные элементы матрицы рассеяния (нули которых, собственно, и дают дискретный спектр), в отличие от задачи Коши, здесь уже не являются интегралами движения. Другими словами, эволюция уравнения (4) по t не является изоспектральной: непрерывный спектр изменяется нетривиальным образом. Функции $r(\xi)$ и $R(z)$, являющиеся данными рассеяния уравнений (4) и (5) при $t = 0$ и соответственно $x = 0$ (напомним, что они определяются как отношение коэффициента отражения к коэффициенту преломления) связаны равенством $r(-\xi) = R(z)$. Это равенство и есть, по-видимому, правильное обобщение на нелинейный (интегрируемый) случай (1)–(3) соотношения, названного Фокасом в случае линейной задачи (и в ряде нелинейных задач) “глобальным соотношением” (global relation), см. [2]. Для краевых условий общего положения для того же уравнения КдФ глобальное соотношение является существенно нелинейным. Проблема описания краевых условий, для которых это соотношение становится линейным, требует специального исследования.

Из результатов разделов 3 и 4 можно вывести теорему о том, что начально-краевая задача (1)–(3) имеет при выполнении предположений 1 и 2 глобальное решение. Подробное доказательство этой теоремы приведено в пятом разделе. При построении совместного решения системы уравнений (4), (5) приходится решать матричную задачу линейного сопряжения, в которой матрица сопряжения удовлетворяет линейному уравнению по t с переменными коэффициентами:

$$\frac{d}{dt}\Phi(\xi, t) = X_-(\xi, t)\Phi(\xi, t) - \Phi(\xi, t)X(\xi, t)$$

(см. ниже уравнения (62) и (64)). В шестом разделе исследуется поведение функции $u_x(0, t)$, являющейся потенциалом уравнения (5) при $x = 0$. Показано, что в случае общего положения справедлива асимптотика

$$u_x(0, t) = \frac{1}{t} + o\left(\frac{1}{t}\right), \quad t \rightarrow \infty.$$

Отсюда на основе формулы Тейлора легко получить следующее асимптотическое поведение решения в окрестности границы: $u(x, t) \sim x/t$, поскольку $u(0, t) = u_{xx}(0, t) = 0$, $u_x(0, t) \sim 1/t$.

Как правило, при построении решений нелинейных уравнений с помощью метода обратной задачи рассеяния совместное решение системы (4), (5) является одновременно решением задачи рассеяния для первого из уравнений этой пары. В нашем же случае это не так, решение задачи рассеяния для уравнения (4) не удовлетворяет второму уравнению.

В последнем, седьмом разделе кратко обсуждаются проблемы, связанные с дискретным спектром уравнения (4), и выдвигается гипотеза о характере взаимодействия “солитонов” с границей.

2. ПРЯМАЯ ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ

Прямая задача рассеяния заключается в построении нелинейного функционала, ставящего в соответствие потенциалу $u(x, t)$ уравнения (4) так называемые данные рассеяния. Так как задача рассеяния на всей оси для уравнения второго порядка хорошо изучена, то нам удобно свести прямую задачу рассеяния на полуоси к задаче на всей оси, продолжив потенциал $u_0(x)$ с положительной полуоси на всю действительную ось. Потенциал продолжим тривиальным образом, полагая $u_0(x) = 0$ для всех $x < 0$. В силу условий, наложенных на начальные данные, это продолжение будет гладким. Сразу же оговоримся, что продолжение потенциала нулем не согласуется с динамикой уравнения и здесь используется лишь для удобства изложения прямой задачи рассеяния при $t = 0$.

Поскольку в начальный момент времени потенциал $u(x, 0) = u_0(x)$ является гладкой функцией и быстро убывает, то согласно общей теории (см. [7], с. 264) для любого ξ из замкнутой верхней полуплоскости существует решение уравнения (4), представимое в виде

$$e^+(x, \xi) = e^{i\xi x} + \int_x^\infty K(x, \tau) e^{i\xi \tau} d\tau, \quad (6)$$

где функция $K(x, \tau)$ определяется из линейного интегрального уравнения типа Вольterra:

$$K(x, \tau) = \frac{1}{2} \int_{\frac{x+\tau}{2}}^\infty u(s) ds + \frac{1}{2} \int_x^\infty u(s) \int_{\tau-s+x}^{\tau+s-x} K(s, u) du ds, \quad (7)$$

причем $K(x, \tau) = 0$ при $\tau < x$. И, как следствие, выполняется оценка

$$|K(x, \tau)| \leq C \int_{\frac{x+\tau}{2}}^\infty |u(s)| ds.$$

Аналогичным образом определяется решение $e^-(x, \xi)$:

$$e^-(x, \xi) = e^{-i\xi x} + \int_{-\infty}^x K^-(x, \tau) e^{i\xi \tau} d\tau,$$

при этом очевидно, что $e^-(x, \xi) = e^{-i\xi x}$ для $x \leq 0$. При вещественных ненулевых значениях параметра ξ функции $e^+(x, \xi)$ и $e^+(x, -\xi)$, так же как и функции $e^-(x, \xi)$ и $e^-(x, -\xi)$, образуют фундаментальные системы решений, поэтому можно выписать разложения

$$e^+(x, \xi) = a(\xi)e^-(x, -\xi) + b(\xi)e^-(x, \xi), \quad (8)$$

$$e^-(x, -\xi) = -b(-\xi)e^+(x, \xi) + a(\xi)e^+(x, -\xi). \quad (9)$$

Вронскианы базисных решений, очевидно, равны $2i\xi$, поэтому для коэффициентов этого разложения имеем явные выражения

$$a(\xi) = \frac{1}{2i\xi}(e_x^+(0, \xi) + i\xi e^+(0, \xi)), \quad (10)$$

$$b(\xi) = \frac{1}{2i\xi}(-e_x^+(0, \xi) + i\xi e^+(0, \xi)), \quad (11)$$

где нижний индекс обозначает производную по x . Функции $a(\xi)$ и $b(\xi)$ называются коэффициентами преломления и соответственно отражения.

При всех ненулевых вещественных значениях параметра ξ функции $a(\xi)$ и $b(\xi)$ удовлетворяют инволюциям $a(\xi) = \overline{a(-\xi)}$, $b(\xi) = \overline{b(-\xi)}$ и условию связи $|a(\xi)|^2 - |b(\xi)|^2 = 1$. Здесь черта обозначает комплексное сопряжение.

Как известно, квадраты нулей функции $a(\xi)$, расположенных в верхней полуплоскости $\text{Im } \xi > 0$, являются собственными значениями уравнения (4).

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 2. Всюду ниже мы накладываем на начальную функцию $u_0(x)$ следующее жесткое ограничение: уравнение $-y_{xx} + u_0(x)y = \xi^2 y$ не должно иметь дискретного спектра, т.е. для всех ξ , $\text{Im } \xi > 0$, должно выполняться неравенство $a(\xi) \neq 0$.

Из явных формул (10), (11) можно вывести (см. [7]) интегральные представления для функций $a(\xi)$ и $b(\xi)$:

$$a(\xi) = 1 - \frac{1}{2i\xi} \left(\int_0^\infty u_0(s) ds + \int_0^\infty e^{i\xi s} A(s) ds \right), \quad (12)$$

$$b(\xi) = \frac{1}{2i\xi} \int_0^\infty e^{i\xi s} B(s) ds, \quad (13)$$

где $A(s) = K_\tau(0, s) - K_x(0, s) \in L_1(0, \infty)$, $B(s) = -K_\tau(0, s) - K_x(0, s) \in L_1(0, \infty)$.

ЛЕММА 2.1. *Функции $a(\xi)$ и $b(\xi)$ бесконечно дифференцируемы при $\xi \neq 0$, $\text{Im } \xi \geq 0$, и их производные удовлетворяют при $\xi \rightarrow \infty$ оценкам*

$$|b^k(\xi)| \leq C_{k,m} |\xi|^{-m}, \quad k, m = 0, 1, 2, \dots, \quad (14)$$

$$|a^k(\xi)| \leq C_k |\xi|^{-1}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (15)$$

$$|a(\xi) - 1| \leq C |\xi|^{-1}. \quad (16)$$

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Из уравнения (7) можно вывести, что функция $K(x, \tau)$ и все ее производные по обеим переменным убывают быстрее любой степени x и τ . Из этого же уравнения легко можно получить формулу

$$B(\tau) = \frac{1}{2}u_0\left(\frac{\tau}{2}\right) + \int_0^\infty u_0(s)K(s, \tau - s) ds. \quad (17)$$

Отсюда имеем $B(0) = 0$, так как $u_0(0) = 0$ и $K(s, -s) = 0$ при $s > 0$. Можно показать по индукции, что $B^{(k)}(0) = 0$. Применяя m раз интегрирование по частям к интегралу Фурье (13), получаем быстрое убывание функции $b(\xi)$. Дифференцируемость функций $a(\xi)$ и $b(\xi)$ следует из того, что функция $K(x, \tau)$ и ее производные и, следовательно, функции $A(\tau)$, $B(\tau)$ убывают быстрее любой степени τ . Отметим, что так как $A(0)$, вообще говоря, отлично от нуля, то функция $a(\xi) - 1$ убывает как первая степень ξ .

Завершая обсуждение прямой задачи рассеяния, введем функцию $r(\xi) = b(\xi)/a(\xi)$, являющуюся тем функциональным параметром, по которому однозначно восстанавливается потенциал уравнения (4). В нашем случае в силу предположения 2 полный набор данных рассеяния уравнения состоит ровно из одной функции $r(\xi)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Функция $r(\xi)$ бесконечно дифференцируема при всех ξ , $\text{Im } \xi \geq 0$, и убывает вместе со всеми производными быстрее любой степени ξ .*

Справедливость предложения при $\xi \neq 0$ следует из леммы 2.1. Докажем гладкость в нуле. Складывая обе части равенств (10) и (11), получаем соотношение $e^+(0, \xi) = a(\xi) + b(\xi)$, из которого ясно, что “вычеты” функций $a(\xi)$ и $b(\xi)$ в нуле совпадают с точностью до умножения на -1 . Если “вычеты” отличны от нуля, то функции $\xi a(\xi)$ и $\xi b(\xi)$ являются гладкими функциями всюду на множестве $\text{Im } \xi \geq 0$, причем $\xi a(\xi) \neq 0$ на этом множестве, поэтому $r(\xi) = \xi b(\xi)/(\xi a(\xi))$ является гладкой функцией (здесь мы пользуемся тем, что не только сами функции $\xi a(\xi)$ и $\xi b(\xi)$, но и их производные непрерывны в замкнутой верхней полуплоскости). Если же “вычеты” равны нулю, то функции $a(\xi)$ и $b(\xi)$ непрерывны (более того, гладкие) в нуле, а из условия связи $|a(\xi)|^2 - |b(\xi)|^2 = 1$ следует, что $|a(\xi)| > 1$ при $\xi \in \mathbb{R}$. Поэтому и в этом случае $r(\xi)$ является гладкой функцией. Из предложения вытекает

СЛЕДСТВИЕ. *Функция $r(\xi)$ допускает интегральное представление в виде*

$$r(\xi) = \int_0^\infty e^{i\xi x} q(x) dx, \quad (18)$$

где $q(x)$ — гладкая быстроубывающая функция, причем $q(x)$ обращается в нуль в точке $x = 0$ вместе со всеми производными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формулы обратного преобразования Фурье

$$q(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} r(\xi) d\xi$$

имеем

$$q^{(k)}(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} (-i\xi)^k r(\xi) d\xi.$$

В силу того что при любом целом неотрицательном k функция $(-i\xi)^k r(\xi)$ аналитична в верхней полуплоскости и быстро убывает на бесконечности, правая часть последней формулы равна нулю.

3. ВРЕМЕННАЯ ДИНАМИКА СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ И МАТРИЦЫ РАССЕЯНИЯ

В этом разделе мы выведем дифференциальное уравнение, выражающее зависимость матрицы рассеяния

$$s(\xi) = \begin{pmatrix} a(\xi) & b(-\xi) \\ b(\xi) & a(-\xi) \end{pmatrix} \quad (19)$$

от времени t . Здесь $a(\xi) = a(\xi, t)$ и $b(\xi) = b(\xi, t)$ – коэффициенты преломления и отражения, соответствующие потенциалу $u(x, t)$ – решению начально-краевой задачи (1)–(3). При выводе основных уравнений ниже мы предполагаем существование решения этой задачи в классе быстроубывающих функций. Выясним сначала характер эволюции по времени собственных функций $e^\pm(x, \xi) = e^\pm(x, \xi, t)$. Для удобства перейдем от скалярных уравнений (4), (5) L - A -пары к матричным уравнениям

$$Y_x = UY, \quad Y = \begin{pmatrix} y \\ y'_x \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u - \lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad (20)$$

$$Y_t = AY, \quad A = \begin{pmatrix} u_x & -2u - 4\lambda \\ u_{xx} - (4\lambda - 2u)(u - \lambda) & -u_x \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Нетрудно проверить, что матричная функция $P(x, \xi, t)$, построенная по правилу

$$P(x, \xi, t) = \begin{pmatrix} e^+(x, \xi, t) & e^-(x, \xi, t) \\ e_x^+(x, \xi, t) & e_x^-(x, \xi, t) \end{pmatrix},$$

удовлетворяет только первому уравнению L - A -пары (20), (21). Умножением справа подправим это решение так, чтобы выполнялось и второе уравнение L - A -пары. Полное утверждение дает

ЛЕММА 3.1. *Функция $\tilde{P}(x, \xi, t) = P(x, \xi, t)V(\xi, t)$ будет совместным решением пары линейных матричных дифференциальных уравнений вида (20) и (21), если функция $V(\xi, t)$ удовлетворяет следующей задаче Коши:*

$$\frac{dV}{dt}(\xi, t) = \begin{pmatrix} -4i\xi^3 & \frac{u_x(0, t)}{a(\xi, t)} \\ 0 & 4i\xi^3 - \frac{u_x(0, t)b(\xi, t)}{a(\xi, t)} \end{pmatrix} V(\xi, t), \quad V(\xi, 0) = E, \quad (22)$$

где E – единичная матрица.

Лемма доказывается прямым вычислением. Сначала подставляем в уравнение $dPV/dt = APV$ первый столбец матрицы V и полагаем $x = \infty$. Затем подставляем второй столбец и полагаем $x = 0$. В обоих случаях приходим к уравнению (22). Первый столбец вычисляется в явном виде: $v_{11}(\xi, t) = e^{-4i\xi^3 t}$, $v_{21}(\xi, t) = 0$. Полное решение уравнения (22) приводится ниже (см. формулу (27)).

Из леммы 3.1 следует, что эволюция собственной функции $e^+(0, \xi, t)$ по t описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e^+ &= (4i\xi^3 + u_x(0, t))e^+ - 4\xi^2 e_x^+, \\ \frac{d}{dt}e_x^+ &= 4\xi^4 e^+ + (4i\xi^3 - u_x(0, t))e_x^+. \end{aligned} \quad (23)$$

Матрица рассеяния $s(\xi, t)$ удовлетворяет системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений по t [6]:

$$s_t = 4i\xi^3[s, \sigma_3] + u_x(0, t)\sigma_1 s. \quad (24)$$

Здесь и всюду ниже σ_i ($i = 1, 2, 3$) – матрицы Паули:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Для того чтобы проверить соотношение (24), продифференцируем по t равенства (10) и (11) с использованием уравнений (23). Тогда

$$\dot{a} = u_x b, \quad \dot{b} = 8i\xi^3 b + u_x a. \quad (25)$$

Остается переписать систему (25) в виде матричного уравнения (24) для матрицы (19). В общем случае уравнение эволюции матрицы рассеяния имеет вид [8]

$$s_t = 4i\xi^3[s, \sigma_3] + P_1\sigma_1 s + P_2\sigma_2 s + P_3\sigma_3 s, \quad (26)$$

где

$$P_1 = u_x(0, t), \quad P_2 = \frac{-4u(0, t)\xi^2 + u_{xx}(0, t) - 2u^2(0, t)}{2\xi}, \quad P_3 = \frac{2u^2(0, t) - u_{xx}(0, t)}{2\xi}.$$

Ясно, что, подставляя в соотношение (26) краевые условия (2), мы снова приходим к уравнению (24).

Любопытно, что система уравнений (22) явно интегрируется в том смысле, что ответ не содержит интегралов. Можно проверить прямой подстановкой, что второй столбец матрицы V имеет вид

$$v_{12}(\xi, t) = \frac{e^{4i\xi^3 t} a(\xi, 0) \bar{b}(\xi, t) - e^{-4i\xi^3 t} a(\xi, t) \bar{b}(\xi, 0)}{a(\xi, t)}, \quad v_{22}(\xi, t) = \frac{e^{4i\xi^3 t}}{a(\xi, t)} a(\xi, 0). \quad (27)$$

Из формул (23) следует также, что функция $m(t, \xi) = e^+(0, \xi, t)e^{-4i\xi^3 t}$ является решением уравнения второго порядка

$$m_{tt} = (w(t) - \mu)m, \quad (28)$$

где $w(t) = du_x(0, t)/dt + u_x^2(0, t)$, $\mu = 16\xi^6$. Этому же уравнению удовлетворяет элемент p_{12} матрицы $\tilde{P}$ из леммы 3.1.

Нетрудно проверить, что уравнение (24) инвариантно относительно замены ξ на $\omega\xi$, где ω – кубический корень из единицы. Наличие дискретной симметрии в уравнении эволюции выделяет краевое условие (2) из общего класса краевых условий для уравнения КДФ. Более общее интегрируемое краевое условие имеет вид $u(0, t) = a_1$, $u_{xx}(0, t) = a_2$, где a_1, a_2 – произвольные действительные числа [4]. При наложении этого краевого условия уравнение (26) также приобретает дискретную группу симметрий, но изучение этого случая выходит за рамки данной работы. Здесь мы отметим только, что существует тесная связь между свойством совместимости краевого условия с интегрируемостью и дискретными симметриями уравнения эволюции матрицы рассеяния.

В уравнении (24) естественно положить $z = \xi^3$. Считая временно матрицу рассеяния $s(\xi, t)$ известной при всех $t > 0$, построим специальные матричные решения уравнения (24), аналитически зависящие от параметра z , называемые собственными функциями, или решениями задачи рассеяния. Для этого воспользуемся тем, что одновременно с функцией $s(\xi, t)$ решением системы (24) будет также функция $s(\omega\xi, t)$. Следовательно, функция $c_0(z, t)$, составленная из первого $s_1(\omega\xi, t)$ и второго $s_2(\xi, t)$ столбцов соответственно матриц $s(\omega\xi, t)$ и $s(\xi, t)$:

$$c_0(z, t) = (s_1(\omega\xi, t), s_2(\xi, t)), \quad \omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}, \quad (29)$$

также удовлетворяет уравнению (24). В силу аналитических свойств матрицы рассеяния функция $c_0(z, t)$ аналитична по z в верхней полуплоскости и непрерывна в ее замыкании. Другими словами, функция $c_0(z, t)$ является решением задачи рассеяния для уравнения (24) на полуоси $t \geq 0$. Но решение задачи рассеяния на полуоси определяется неоднозначно. В дальнейшем нам будет удобно пользоваться другим решением задачи рассеяния, заданным в виде

$$c_+(z, t) = c_0(z, t)e^{-4iz\sigma_3 t} M(z) e^{4iz\sigma_3 t}, \quad (30)$$

где

$$M(z) = \begin{pmatrix} \frac{a(-\xi)}{\det c_0(z, 0)} & 0 \\ -\frac{b(\omega\xi)}{\det c_0(z, 0)} & \frac{1}{a(-\xi)} \end{pmatrix}$$

(можно показать, что в силу предположения 2 определитель матрицы $c_0(z, t)$ отличен от нуля при $\text{Im } z \geq 0$). При $t = 0$ функция $c_+(z, t)$ имеет верхнетреугольную матричную структуру

$$c_+(z, 0) = \begin{pmatrix} 1 & R(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (31)$$

где $R(z) = b(-\xi)/a(-\xi)$, $-2\pi/3 \leq \arg \xi \leq -\pi/3$. Очевидно, что уравнение (24) инвариантно относительно инволюции вида $c(z, t) \rightarrow \sigma_1 \overline{c(\bar{z}, t)} \sigma_1$, поэтому функция $c_-(z, t) = \sigma_1 \overline{c(\bar{z}, t)} \sigma_1$ является решением этого же уравнения, аналитическим при $\operatorname{Im} z < 0$. Следовательно, решение задачи рассеяния для уравнения (24) известно при всех $z \in \mathbb{C}$ в точке $t = 0$. Тогда задача о восстановлении потенциала уравнения (24) эффективно решается. Пусть по определению $p(z, t) = c_-^{-1}(z, t) c_+(z, t)$. Как отношение двух решений линейной системы (24) функция $p(z, t)$ тривиальным образом зависит от t :

$$p(z, t) = e^{-4iz\sigma_3 t} p(z, 0) e^{4iz\sigma_3 t}. \quad (32)$$

В результате задача отыскания собственных функций $c_{\pm}(z, t)$ при $t > 0$ сводится к задаче о линейном сопряжении (о задаче линейного сопряжения см., например, [9]), где ищутся две функции $c_+(z, t)$ и $c_-(z, t)$, аналитические в областях $\operatorname{Im} z > 0$ и соответственно $\operatorname{Im} z < 0$, непрерывные и невырожденные в замыканиях этих областей, так что на вещественной прямой выполняется условие сопряжения

$$c_+(z, t) = c_-(z, t) p(z, t). \quad (33)$$

Единственность решения задачи следует из дополнительного условия нормировки, которое в нашем случае имеет вид

$$c_+(\infty, t) = E. \quad (34)$$

Поскольку матрица сопряжения $p(z, t)$ полностью определяется функцией $R(z)$, что видно из формулы

$$p(z, t) = \begin{pmatrix} 1 & R(z)e^{-8izt} \\ -\overline{R(\bar{z})}e^{8izt} & 1 - |R(z)|^2 \end{pmatrix}, \quad (35)$$

то остановимся подробно на ее свойствах.

ЛЕММА 3.2. *Функция $R(z)$ непрерывна на вещественной оси, удовлетворяет оценке*

$$|R(z)| < 1 \quad \text{при} \quad 0 \neq z \in \mathbb{R} \quad (36)$$

и допускает представление в виде интеграла Фурье

$$R(z) = \int_0^\infty e^{izy} k(y) dy, \quad (37)$$

где $k(y) \in L_1(0, \infty)$ и $|k(y)| < \infty$, функция $k(y)$ дифференцируема, причем $(1 + |y|) \times k'(y) \in L_1(0, \infty)$. Кроме того, выполняется оценка $|R(z)|^2 \leq 1 - Cz^2/(1 + z^2)$ при всех $z \in \mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем первое утверждение. Из равенства $|a(\xi)|^2 - |b(\xi)|^2 = 1$, верного при всех $\xi \in \mathbb{R}$, имеем $|r(\xi)| < 1$ при $\xi \neq 0$ и $|r(0)| \leq 1$. Но функция $r(\xi)$ аналитична при $\text{Im } \xi > 0$, непрерывна при $\text{Im } \xi \geq 0$ и стремится к нулю при $|\xi| \rightarrow \infty$. Поэтому в силу принципа максимума $|r(\xi)| < 1$ при $\text{Im } \xi > 0$. Отсюда и из равенства $R(z) = b(-\xi)/a(-\xi) = r(-\xi)$ имеем (36).

Перейдем ко второму утверждению. По построению функция $R(z)$ допускает представление в виде

$$R(z) = \int_0^\infty e^{-i\xi x} q(x) dx. \quad (38)$$

Функция $k(y)$, определенная через обратное преобразование Фурье

$$k(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-izy} R(z) dz, \quad (39)$$

непрерывна и ограничена. Покажем, что она абсолютно суммируема. Для этого преобразуем последний интеграл к виду

$$2\pi k(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-izy - i\xi x} q(x) dx dz, \quad z = \xi^3, \quad (40)$$

и заменим переменные $\lambda = -\xi y^{1/3}$, тогда $z = -\lambda^3 y$ и интеграл (40) принимает вид

$$2\pi k(y) = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\lambda^3 + \lambda s)} \frac{d\lambda^3}{y} q(x) dx, \quad (41)$$

где $s = xy^{-1/3}$. Внутренний интеграл в (41) тесно связан с функцией Эйри $v(s)$, определяемой как специальное решение уравнения Эйри $v''(s) = sv(s)$, выражающееся в виде интеграла

$$v(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\lambda^3 + \lambda s)} d\lambda. \quad (42)$$

Поэтому равенство (41) можно переписать в виде

$$2\pi k(y) = \int_0^\infty \frac{3}{y} v''(s) q(x) dx = \int_0^\infty \frac{3x}{y^{4/3}} v(s) q(x) dx. \quad (43)$$

Отсюда имеем

$$2\pi \int_0^\infty |k(y)| dy \leq \int_0^\infty dy \int_0^\infty \frac{3x}{y^{4/3}} |v(s)| \cdot |q(x)| dx. \quad (44)$$

В правой части неравенства поменяем порядок интегрирования и положим $y = x^3 s^{-3}$. В результате получим неравенство

$$2\pi \int_0^\infty |k(y)| dy \leq 9 \int_0^\infty |q(x)| dx \int_0^\infty |v(s)| ds. \quad (45)$$

Функция Эйри экспоненциально убывает на бесконечности (см. [10]):

$$v(s) = \frac{1}{2}s^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{2\sqrt{s^3}}{3}}\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{s^3}}\right)\right), \quad s \rightarrow \infty,$$

поэтому последний интеграл справа сходится. Аналогично проверяется, что функции $zR'(z) = -\xi r'(-\xi)/3$ и $zR(z) = \xi^3 r(-\xi)$ также являются интегралами Фурье от абсолютно суммируемых функций. Последнее неравенство леммы элементарными рассуждениями можно вывести из аналогичного неравенства для функции $r(\xi)$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 3.1. *Задача линейного сопряжения (32)–(34) однозначно разрешима.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассматриваемая задача заведомо разрешима, если вещественная часть матрицы сопряжения положительно определена [11]. Но в нашем случае это достаточное условие не выполняется, точнее, выполняется лишь в частном случае, когда $|R(z)| < 1$ для всех $z \in \mathbb{R}$. Докажем теорему сведением задачи к системе интегральных уравнений Фредгольма.

Представим элемент $c_{ij}(s, t)$ матрицы $c_+(z, t)$ в виде интеграла Фурье

$$c_{ij}(s, t) = \delta_{ij} + \int_0^\infty e^{izs} \alpha_{ij}(s, t) ds, \quad (46)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера. Подставим это выражение в уравнение (33). В результате несложных преобразований придем к следующим интегральным уравнениям Фредгольма второго рода:

$$\alpha_{11}(\theta, t) + \int_0^\infty \bar{k}(-s - \theta + 8t) \bar{\alpha}_{21}(s) ds = 0, \quad (47)$$

$$\alpha_{21}(\theta, t) + \int_0^\infty \bar{k}(-s - \theta + 8t) \bar{\alpha}_{11}(s) ds = -k(-\theta + 8t). \quad (48)$$

Ядро $\bar{k}(y)$ оператора свертки, задающего уравнения (47), (48), ограничено и абсолютно суммируемо, поэтому оператор свертки является согласно теореме Фреше–Колмогорова компактным в пространстве $L_1(0, \infty)$ (см., например, [12]). Так что для доказательства однозначной разрешимости рассматриваемой системы уравнений достаточно проверить единственность решения однородной задачи. Пусть пара функций $\alpha_{11}(s), \alpha_{21}(s) \in L_1(0, \infty)$ удовлетворяет однородным уравнениям вида

$$\alpha_{11}(\theta) + \int_0^\infty \bar{k}(-s - \theta + 8t) \bar{\alpha}_{21}(s) ds = 0, \quad (49)$$

$$\alpha_{21}(\theta) + \int_0^\infty \bar{k}(-s - \theta + 8t) \bar{\alpha}_{11}(s) ds = 0. \quad (50)$$

Непосредственно из уравнений (49), (50) в силу ограниченности ядра $k(y)$ вытекают оценки $|\alpha_{11}| < \infty$, $|\alpha_{21}| < \infty$, и поэтому, очевидно, $\alpha_{11}(s), \alpha_{21}(s) \in L_2(0, \infty)$. Преобразуем второе уравнение системы к виду

$$\alpha_{21}(y) - \int_0^\infty \bar{k}(-s - y + 8t) ds \int_0^\infty k(-s - s' + 8t) \alpha_{21}(s') ds' = 0.$$

Умножим его на $\bar{\alpha}_{21}(y)$ и проинтегрируем по y :

$$\int_0^\infty |\alpha_{21}(y)|^2 dy - \int_0^\infty dy \int_0^\infty \bar{\alpha}_{21}(y) \bar{k}(-s-y+8t) ds \int_0^\infty \alpha_{21}(s') k(-s-s'+8t) ds' = 0.$$

Полученное уравнение запишется как

$$\int_0^\infty |\alpha_{21}(y)|^2 dy - \int_0^\infty |c(s)|^2 ds = 0, \quad (51)$$

если положить

$$c(y) = \int_0^\infty \bar{\alpha}_{21}(s') \bar{k}(-s-s'+8t) ds' = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{c}_{21}(z) \bar{R}(z) e^{iz(-y+8t)} dz.$$

Далее, воспользуемся равенством Парсеваля

$$\int_0^\infty |\alpha_{21}(y)|^2 dy = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty |c_{21}(z)|^2 dz,$$

где $c_{21}(z) = \int_0^\infty e^{isz} \alpha_{21}(s) ds$, и неравенством Бесселя

$$\int_0^\infty |c(s)|^2 ds \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty |c_{21}(z)|^2 |R(z)|^2 dz.$$

С учетом последних двух соотношений из уравнения (51) вытекает неравенство

$$\int_0^\infty |c_{21}(z)|^2 dz \leq \int_0^\infty |c_{21}(z)|^2 |R(z)|^2 dz.$$

Отсюда имеем $(1 - |R(z)|^2)|c_{21}(z)|^2 \leq 0$. Но $(1 - |R(z)|^2) > 0$ при $z \neq 0$. Поэтому в силу непрерывности функции c_{21} имеем $c_{21}(z) \equiv 0$. Тем самым доказано, что однородное уравнение имеет лишь тривиальное решение. По альтернативе Фредгольма система уравнений (47), (48) однозначно разрешима. Следовательно, разрешима и задача линейного сопряжения (32)–(34). Остается проверить выполнение условия $\det c_+(z) \neq 0$ при $\text{Im } z \geq 0$. Возьмем определители от обеих частей равенства (33). Функция $\det c_+(z) = \det \bar{c}_+(\bar{z}) = d(z)$ аналитична на всей комплексной плоскости и равна единице при $z = \infty$, так что по теореме Лиувилля $d(z) \equiv 1$.

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДАННЫХ РАССЕЯНИЯ ПРИ $t > 0$

Выделим на комплексной плоскости $\xi \in \mathbb{C}$ шесть равных секторов $I_1, I_2, \dots, I_6$ при помощи лучей ℓ_j , исходящих из начала координат: $\ell_j = \{\xi, \arg(\xi) = \pi(j-1)/3\}$, так что I_j – сектор, заключенный между лучами ℓ_j и ℓ_{j+1} (см. рисунок). Функции $c_\pm(z, t)$, построенные в предыдущем разделе как решения задачи линейного сопряжения, являются фундаментальными решениями системы линейных уравнений (24). Поэтому они позволяют, во-первых, однозначно определить функцию $u_x(0, t)$ – коэффициент этой системы уравнений, во-вторых, выписать явные формулы для данных рассеяния $a(\xi, t)$, $b(\xi, t)$.

Выразим элементы матрицы рассеяния $s(\xi, t)$ через фундаментальные решения уравнения (24). Удобно делать это отдельно для каждого столбца $s_1(\xi, t)$, $s_2(\xi, t)$ матрицы рассеяния:

$$s_1(\xi, t) = c(z, t)e^{-4izt\sigma_3}c^{-1}(z, 0)s_1(\xi, 0)e^{4izt}, \quad (52)$$

$$s_2(\xi, t) = c(z, t)e^{-4izt\sigma_3}c^{-1}(z, 0)s_2(\xi, 0)e^{-4izt}, \quad (53)$$

где $c(z, t)$ равно либо $c_+(z, t)$, либо $c_-(z, t)$ в зависимости от того, в каком секторе лежит точка $\xi = z^{1/3}$. Например, при $\xi \in I_2$ имеем

$$s_1(\xi, t) = c_-(z, t)e^{-4izt(\sigma_3 - E)}c_-^{-1}(z, 0)s_1(\xi, 0) = \begin{pmatrix} c_{-11}(z, t)a(\xi) \\ c_{-21}(z, t)a(\xi) \end{pmatrix}, \quad (54)$$

в то время как при $\xi \in I_1, I_3$ –

$$s_1(\xi, t) = c_+(z, t)e^{-4izt(\sigma_3 - E)}c_+^{-1}(z, 0)s_1(\xi, 0). \quad (55)$$

Таким образом, функция $s_1(\xi, t)$ в каждом из секторов $I_1 - I_3$ является аналитической функцией, но в разных секторах определяется разными формулами. Заметим, что именно в этом месте важно, что $t \geq 0$. При $t < 0$ функция e^{8izt} в формуле (55) является растущей в области I_1 , и поэтому функция $s_1(\xi, t)$ уже не будет ограниченной на бесконечности по ξ . При помощи равенства (33), переписанного в виде

$$c_+(z, t) \begin{pmatrix} 1 & -R \\ 0 & e^{8izt} \end{pmatrix} = c_-(z, t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\overline{R}e^{8izt} & e^{8izt} \end{pmatrix},$$

можно проверить, что на границах раздела секторов I_1, I_2 и I_2, I_3 предельные значения функции $s_1(\xi, t)$ справа и слева совпадают, и поэтому в силу принципа аналитического продолжения полученная функция аналитична всюду в верхней полуплоскости $\text{Im } \xi > 0$ и непрерывна в замкнутой полуплоскости $\text{Im } \xi \geq 0$, за исключением точки $\xi = 0$. В частности, для коэффициентов преломления и отражения имеем следующие выражения:

$$a(\xi, t) = c_{-11}(z, t)a(\xi, 0), \quad b(\xi, t) = c_{-21}(z, t)a(\xi, 0),$$

верные при $\xi \in I_2$, $\xi^3 = z$, $t \geq 0$. В оставшихся секторах I_1, I_3 верхней полуплоскости эти функции имеют вид

$$\begin{aligned} a(\xi, t) &= c_{11+}(z, t)(a(\xi, 0) - R(z)b(\xi, 0)) + c_{12+}(z, t)e^{8izt}b(\xi, 0), \\ b(\xi, t) &= c_{21+}(z, t)(a(\xi, 0) - R(z)b(\xi, 0)) + c_{22+}(z, t)e^{8izt}b(\xi, 0). \end{aligned}$$

Тем самым матрица рассеяния полностью определена при всех $t \geq 0$ по заданным начальным данным (3).

Из теоремы 3.1 следует, что функция $c_{-11}(z, t)$ допускает интегральное представление

$$c_{-11}(z, t) - 1 = \int_0^\infty e^{-izy} k_1(y) dy. \quad (56)$$

Покажем, что эта функция допускает представление также и в виде

$$c_{-11}(z, t) - 1 = \int_0^\infty e^{-i\xi x} q_1(x) dx, \quad z = \xi^3, \quad (57)$$

где $q_1 \in L_1(0, \infty)$. Другими словами, существует отображение, обратное отображению, определенному равенством (41). Из равенств (56), (57) находим

$$2\pi q_1(x) = \int_{-\infty}^\infty e^{-i\xi x} d\xi \int_0^\infty e^{-i\xi^3 y} k_1(y) dy.$$

Заменив переменную $\xi = -\lambda y^{-1/3}$ и полагая $s = xy^{-1/3}$, получим

$$2\pi q_1(x) = \int_0^\infty k_1(y) y^{-\frac{1}{3}} dy \int_{-\infty}^\infty e^{i(\lambda s + \lambda^3)} d\lambda.$$

Последний интеграл справа совпадает с функцией Эйри (см. (42)), поэтому

$$2\pi q_1(x) = \int_0^\infty k_1(y) y^{-\frac{1}{3}} v\left(\frac{x}{y^{\frac{1}{3}}}\right) dy.$$

Отсюда легко можно получить оценку L_1 -нормы функции q_1 :

$$2\pi \int_0^\infty |q_1(x)| dx \leq \int_0^\infty |k_1(y)| dy \int_0^\infty |v(s)| ds < \infty,$$

а это означает, что функция $c_{-11}(z, t)$ может быть представлена в виде (56). Аналогичное утверждение верно и для функции $c_{-21}(z, t)$. Отсюда легко получить, что функции $a(\xi, t)$ и $b(\xi, t)$ допускают представление в виде (12), (13) при всех $t \geq 0$.

ЛЕММА 4.1. *Для любого $t \geq 0$ и любого ξ из замкнутой верхней полуплоскости $\text{Im } \xi \geq 0$ выполнено условие*

$$|a(\xi, t)| > 0. \quad (58)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $t = 0$ неравенство верно в силу предположения 2. Более того, при $t = 0$ имеет место условие $|a(\xi, 0)| > |b(\xi, 0)|$, выполненное при всех $\xi \neq 0$, $\operatorname{Im} \xi \geq 0$. Это следует из того, что функция $r(\xi) = b(\xi)/a(\xi)$ аналитична при $\operatorname{Im} \xi > 0$ и непрерывна вплоть до вещественной оси, вдоль которой она удовлетворяет неравенствам $|r(\xi)| < 1$ для $\xi \neq 0$ и $|r(0)| \leq 1$. По принципу максимума $|r(\xi)| < 1$ при $\operatorname{Im} \xi > 0$. Справедливость соотношения

$$|a(\xi, t)|^2 - |b(\xi, t)|^2 = |a(\xi, 0)|^2 - |b(\xi, 0)|^2$$

для всех вещественных $\xi \neq 0$ легко проверить непосредственным дифференцированием по t и с учетом уравнений (25), поэтому $|a(\xi, t)| > |b(\xi, t)|$ при $0 \neq \xi \in \mathbb{R}$. Предположим, что в некоторой точке ξ_0 , $\operatorname{Im} \xi_0 > 0$, при некотором $t_0 > 0$ выполняется равенство $a(\xi_0, t_0) = 0$. Тогда, очевидно, существует точка t_1 , $0 < t_1 < t_0$, такая, что $|a(0, t_1)| < \infty$. Другими словами, функции $a(\xi, t_1)$, $b(\xi, t_1)$, аналитичные в верхней полуплоскости, непрерывны вплоть до вещественной оси, а в нуле также ограничены. Но тогда, как решения линейного уравнения, они ограничены в нуле при всех t . А значит, для любого t неравенство $|a(\xi, t)| > |b(\xi, t)|$ выполнено всюду на вещественной оси, включая точку $\xi = 0$. Поэтому число нулей функции $a(\xi, t)$, расположенных в верхней полуплоскости, не может меняться со временем, что противоречит предположению. Лемма доказана.

Так как элементы матрицы рассеяния $s(\xi, t)$ выражаются через функции $c_{\pm}(z, t)$ (см. формулы (52), (53)), найденные в результате решения задачи линейного сопряжения (32)–(34), то для дальнейшего необходимо выяснить некоторые свойства этих функций.

ЛЕММА 4.2. *При $|z| \rightarrow \infty$ функции $c_{\pm}(z, t)$ быстро стремятся к единичной матрице E :*

$$|c_{\pm}(z, t) - E| \leq C|z|^{-m} \quad \forall m > 0, \quad z \in \mathbb{R}. \quad (59)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функции $c_{\pm}(z, t) - E$ удовлетворяют неоднородной задаче линейного сопряжения:

$$c_+ - E = (c_- - E)p + p - E.$$

Эта задача (при известном решении соответствующей однородной задачи) решается сведением к задаче о “скачке” аналитической функции [13]. Умножим последнее равенство справа на c_+^{-1} :

$$(c_+ - E)c_+^{-1} = (c_- - E)c_-^{-1} + (p - E)c_+^{-1}.$$

Отсюда находим

$$z^m(c_{\pm}(z, t) - E) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(p(s, t) - E)c_+^{-1}(s, t)s^m}{s - (z \pm 0)} ds \cdot c_{\pm}(z, t). \quad (60)$$

Поскольку функция $(p(s, t) - E)s^m$ непрерывна по Гельдеру и для любого целого $m \geq 0$ стремится к нулю при $s \rightarrow \infty$, то интеграл в (60) сходится в смысле главного значения и убывает при $z \rightarrow \infty$.

ЛЕММА 4.3. *Функции $h_+(\xi, t) = c_+(\xi^3, t)$ и $h_-(\xi, t) = c_-(\xi^3, t)$ бесконечно дифференцируемы соответственно в секторах I_1, I_3, I_5 и I_2, I_4, I_6 , причем производные этих функций непрерывны в замыканиях указанных секторов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства $dp(z, t)/dz = (z^{-2/3}/3) dr(-\xi)/d\xi$ следует, что функция $z^{2/3} dp(z, t)/dz$ непрерывна при $z \in \mathbb{R}$. Формально продифференцируем по z обе части уравнения (33) и преобразуем результат к виду

$$z^{\frac{2}{3}} \frac{dc_+(z, t)}{dz} c_+^{-1}(z, t) = z^{\frac{2}{3}} \frac{dc_-(z, t)}{dz} c_-^{-1}(z, t) + z^{\frac{2}{3}} c_-(z, t) \frac{dp}{dz} c_+^{-1}(z, t),$$

из которого немедленно следует, что функции $z^{2/3}(dc_{\pm}(z, t)/dz)c_{\pm}^{-1}(z, t)$ непрерывны как решения задачи о восстановлении аналитической функции по заданному “скачку” функции $z^{2/3}c_-(z, t)(dp/dz)c_+^{-1}(z, t)$, непрерывной по Гельдеру на вещественной оси. Следовательно, функции $dh_{\pm}(\xi, t)/d\xi = z^{2/3} dc_{\pm}(z, t)/dz$ также непрерывны. Аналогично проверяется непрерывность старших производных.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *При всех $t \geq 0$ функция $r(\xi, t) = b(\xi, t)/a(\xi, t)$ обладает следующими свойствами:*

- 1) $r(\xi, t)$ аналитична в области $\text{Im } \xi > 0$ и непрерывна в ее замыкании;
- 2) удовлетворяет оценке $|r(\xi, t)| < 1$ при $\text{Im } \xi \geq 0, \xi \neq 0$;
- 3) бесконечно дифференцируема, убывает вместе со всеми производными быстрее любой степени ξ при $|\xi| \rightarrow \infty$.

Кроме того, при любом $t \geq 0$ функции $a(\xi, t)$, $b(\xi, t)$ допускают интегральные представления вида (12), (13).

Предложение является следствием лемм 4.1–4.3.

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ

При каждом фиксированном $t > 0$ восстановим потенциал $u(x, t)$ уравнения (4) по заданному отношению коэффициента отражения к коэффициенту преломления, т.е. по функции $r(\xi, t) = b(\xi, t)/a(\xi, t)$. Напомним, что в силу предположения 2 и леммы 4.1 у уравнения (4) при $t \geq 0$ нет дискретного спектра. Из предложения 4.1 следует, что все условия разрешимости обратной задачи рассеяния (см., например, [7]) по функции $r(\xi, t)$ выполнены. Задача о восстановлении потенциала $u(x, t)$ по данным рассеяния $r(\xi, t)$ эффективно решается, например, сведением ее к линейному интегральному уравнению Гельфанда–Левитана–Марченко. Можно показать, что в силу дополнительных свойств гладкости и убывания заданной функции $r(\xi, t)$, перечисленных в предложении 4.1, восстановленный потенциал $u(x, t)$ будет гладкой быстроубывающей функцией. Остается проверить выполнение уравнения КДФ (1), граничных условий (2) и начального условия (3). Так как уравнение КДФ является условием совместности переопределенной системы уравнений (4), (5), то для проверки условия (1) достаточно предъявить совместное решение этой системы.

Построим сначала собственные функции $e^\pm(x, \xi) = e^\pm(x, \xi, t)$ первого из уравнений L -А-пары при произвольном значении времени $t > 0$. Собственные функции $e^\pm$ удовлетворяют матричному соотношению

$$\Phi_+(x, \xi, t) = \Phi_-(x, \xi, t)\Phi(\xi, t), \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad (61)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(\xi, t) &= \frac{1}{\bar{a}(\xi, t)} \begin{pmatrix} 1 & -\bar{b}(\xi, t) \\ b(\xi, t) & 1 \end{pmatrix}, \\ \Phi_+(x, \xi, t) &= \Phi_-(x, -\xi, t)\sigma_1 = \begin{pmatrix} e^+ & e^- \\ e_x^+ & e_x^- \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (62)$$

Матричные функции $\Phi_\pm(x, \xi, t)$ являются, очевидно, решениями системы уравнений (20), эквивалентной уравнению (4), но не удовлетворяют системе (21), эквивалентной уравнению (5) – второму уравнению L -А-пары. Поэтому необходимо домножить эти функции справа на подходящим образом подобранные множители $V(\xi, t)$ и $V_-(\xi, t) = \sigma_1 V(-\xi, t)\sigma_1$ так, чтобы полученные функции $\tilde{\Phi}_+(x, \xi, t) = \Phi_+(x, \xi, t)V(\xi, t)$ и $\tilde{\Phi}_-(x, \xi, t) = \Phi_-(x, \xi, t)V_-(\xi, t)$ удовлетворяли обоим равенствам. Точнее, имеет место следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *Для того чтобы решения $\tilde{\Phi}_\pm(x, \xi, t)$ системы уравнений (20) удовлетворяли одновременно еще и системе уравнений (21), достаточно, чтобы матричная функция $V(\xi, t)$ удовлетворяла условиям (22).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функции $V(\xi, t)$ и $V_-(\xi, t)$ являются соответственно решениями матричных дифференциальных уравнений (см. (22))

$$\frac{d}{dt}V = XV \quad \text{и} \quad \frac{d}{dt}V_- = X_-V_-, \quad (63)$$

где $X_-(\xi, t) = \sigma_1 X(-\xi, t)\sigma_1$ и

$$X(\xi, t) = \begin{pmatrix} -4i\xi^3 & \frac{u_x(0, t)}{a} \\ 0 & 4i\xi^3 - \frac{u_x(0, t)b}{a} \end{pmatrix}.$$

А производная по t матрицы сопряжения $\Phi(\xi, t)$ имеет вид

$$\frac{d}{dt}\Phi(\xi, t) = \frac{1}{\bar{a}^2} \begin{pmatrix} -u_x(0, t)\bar{b} & 8i\xi^3\bar{a}\bar{b} + u_x(0, t)(\bar{b}^2 + \bar{a}^2) \\ 8i\xi^3\bar{a}b + u_x(0, t) & -u_x(0, t)\bar{b} \end{pmatrix}$$

и может быть представлена как

$$\frac{d}{dt}\Phi(\xi, t) = X_-(\xi, t)\Phi(\xi, t) - \Phi(\xi, t)X(\xi, t). \quad (64)$$

Продифференцируем по t соотношение (61) и воспользуемся уравнением (64). В результате получим равенство

$$\dot{\Phi}_+ = \dot{\Phi}_- \Phi_-^{-1} \Phi_+ + \Phi_- (X_- \Phi_-^{-1} \Phi_+ - \Phi_-^{-1} \Phi_+ X)$$

(точка над буквой обозначает производную по t), которое мы рассмотрим в симметричном виде:

$$F(x, \xi, t) := \dot{\Phi}_+ \Phi_+^{-1} + \Phi_+ X \Phi_+^{-1} = \dot{\Phi}_- \Phi_-^{-1} + \Phi_- X_- \Phi_-^{-1}.$$

Покажем, что функция $F(x, \xi, t)$ — полином по ξ . Действительно, по построению функции $\Phi_{\pm}(x, \xi, t)e^{-i\sigma_3 x \xi}$ аналитичны соответственно в полуплоскостях $\pm \operatorname{Im} \xi > 0$ и непрерывны при $\pm \operatorname{Im} \xi \geq 0$, за исключением бесконечно удаленной точки, где эти функции имеют полюс первого порядка. Точнее говоря, справедливы асимптотические представления

$$\begin{aligned} \Phi_{\pm}(x, \xi, t) = & \left\{ i\xi \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ q_{11}(1) & -q_{12}(1) \end{pmatrix} + \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(i\xi)^k} \begin{pmatrix} q_{11}(k) & q_{12}(k) \\ q_{21}(k) & q_{22}(k) \end{pmatrix} \right\} e^{i\sigma_3 x \xi} \end{aligned} \quad (65)$$

при $|\xi| \rightarrow \infty$, $\pm \operatorname{Im} \xi \geq 0$. Функции X и X_- имеют на бесконечности полюс третьего порядка. Поэтому функция $F(x, \xi, t)$ растет на бесконечности как ξ^4 . Докажем регулярность этой функции в конечной части комплексной плоскости. Перепишем выражение для F в виде

$$F(\xi, t) := \frac{d}{dt} \tilde{\Phi}_+ \cdot \tilde{\Phi}_+^{-1} = \frac{d}{dt} \tilde{\Phi}_- \cdot \tilde{\Phi}_-^{-1}, \quad (66)$$

где $\tilde{\Phi}_+ = \Phi_+ V$, $\tilde{\Phi}_- = \Phi_- V_-$. Заметим, что функции с тильдой уже не являются ограниченными в полуплоскостях $\pm \operatorname{Im} \xi > 0$, поскольку $V(\xi, t)$ при $t > 0$ экспоненциально растет как в верхней, так и в нижней полуплоскости (см. формулы (27)).

Определители $\det \tilde{\Phi}_{\pm}(x, \xi, t) = -2i\xi a(\pm\xi, t)v_{22}(\pm\xi, t)$, вообще говоря, отличны от нуля в областях $\pm \operatorname{Im} \xi \geq 0$, исключение составляет вырожденный случай, когда $|a(0)| < \infty$. В этом случае имеем $\det \tilde{\Phi}_{\pm}(x, 0, t) = 0$. Исследуем характер вырождения этих матриц в точке $\xi = 0$. Обозначим через $\lambda(t)$ коэффициент пропорциональности столбцов матрицы $\tilde{\Phi}_+(x, 0, t)$. Очевидно, что $\lambda(t)$ не зависит от x ; покажем, что он не зависит также и от t . Для определенности положим $x = 0$. Из условия $\xi a(\xi, t)|_{\xi=0} = 0$ и формулы (10) имеем $e_x^+(0, 0, t) = 0$ для $t \geq 0$. Поэтому вторая строка матрицы $\tilde{\Phi}_+(0, 0, t)$ состоит из одних нулей. Следовательно, $\lambda(t)$ удовлетворяет ровно одному скалярному соотношению

$$\lambda(t)e^+(0, 0, t) = e^+(0, 0, t)v_{12}(0, t) + v_{22}(0, t).$$

Теперь равенство $d\lambda/dt = 0$ легко выводится из уравнений (22) и (23). Учитывая, что

$$v_{12}(\xi, 0) = 0, \quad v_{22}(\xi, 0) = 1, \quad (67)$$

находим $\lambda(t) = \lambda(0) = 1/e^+(0, 0, 0)$. Итак, в вырожденном случае, когда $|a(0, 0)| < \infty$ (и тогда неравенство $|a(0, t)| < \infty$ выполнено для любого $t > 0$!), при всех значениях времени t выполняется дополнительное условие

$$\tilde{\Phi}_+(x, 0, t) \begin{pmatrix} \lambda \\ -1 \end{pmatrix} = 0. \quad (68)$$

Но тогда и для производной имеем

$$\frac{d}{dt}\tilde{\Phi}_+(x, 0, t) \begin{pmatrix} \lambda \\ -1 \end{pmatrix} = 0. \quad (69)$$

Поэтому функция $F(x, \xi, t)$ не имеет полюса в точке $\xi = 0$.

Теперь из теоремы Лиувилля вытекает, что функция $F(x, \xi, t)$ является полиномом четвертой степени по переменной ξ . Далее, из очевидно выполняющихся инволюций $\tilde{\Phi}_+(x, -\xi, t) = \tilde{\Phi}_+(x, \xi, t)\sigma_1$ и $\tilde{\Phi}_+^*(x, -\xi, t) = \sigma_3\tilde{\Phi}_+^{-1}(x, \xi, t)\sigma_1$, где знак $*$ обозначает эрмитово сопряжение, следует, что

$$F(x, \xi, t) = A_4\lambda^2 + A_2\lambda + A_0, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\lambda = \xi^2$, причем A_2 и A_0 — матрицы с вещественными элементами. Дальнейшее уточнение вида функции $F(x, \xi, t)$ удобнее всего проводить на основе того факта, что переопределенная система уравнений

$$y_x = Uy, \quad y_t = F(x, \xi, t)y$$

(первое уравнение совпадает с (20)) совместна при всех $\xi \in \mathbb{C}$. Несложные вычисления позволяют проверить, что $F(x, \xi, t)$ имеет вид матрицы коэффициентов системы уравнений (21). Следовательно, функции $\tilde{\Phi}_\pm(x, \xi, t)$ являются совместными решениями систем уравнений (20), (21), где коэффициентами служат функция $u(x, t)$ и ее производные, но это означает, что функция $u(x, t)$ является решением уравнения КдФ. Выполнение начального условия очевидно. Выполнение краевых условий следует из того, что матрица рассеяния эволюционирует по t в соответствии с уравнением (24) (ср. с общим уравнением (26)). Тем самым доказана следующая

ТЕОРЕМА 5.1. *Пусть начальное условие (3) удовлетворяет всем условиям гладкости и быстрого убывания, перечисленным в предположении 1 и пусть линейное уравнение (4) с потенциалом, равным начальной функции, не имеет дискретного спектра (см. предположение 2). Тогда начально-краевая задача однозначно разрешима в классе гладких быстроубывающих функций. Решение определено при всех $t > 0$.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Выше из доказательства теоремы 5.1 видно, что совместное решение $\tilde{\Phi}_\pm$ систем уравнений (20), (21) не обладает свойством аналитичности в полуплоскостях. Другими словами, решение задачи рассеяния для уравнения (4) не удовлетворяет уравнению (5).

6. ПОВЕДЕНИЕ ФУНКЦИИ $u_x(0, t)$ ПРИ БОЛЬШИХ t

Исследуем поведение функции $u_x(0, t)$ при $t \rightarrow \infty$. Пусть сначала имеет место вырожденный случай, когда $\xi a(\xi, t) \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow 0$. Тогда из результатов работы [14] следует, что функция $u_x(0, t)$, построенная в четвертом разделе посредством решения задачи Римана (32)–(34), принадлежит классу абсолютно суммируемых функций. Действительно, в этом случае функция $R(z)$ лежит в классе Винера, удовлетворяет неравенству $|R(z)| < 1$ при всех вещественных z и поэтому главные миноры матрицы сопряжения $p(z, t)$ и обратной к ней матрицы не имеют нулей при вещественных значениях z . Но тогда выполняется условие [14]

$$\int_0^\infty |u_x(0, t)| dt < \infty. \quad (70)$$

В случае же общего положения главный минор матрицы $p^{-1}(z, t)$, равный $1 - |R(z)|^2$, обращается в нуль в точке $z = 0$ и, следовательно, результаты работы [14] здесь уже не применимы. Поэтому мы воспользуемся уравнением (28), для которого функция $R(z)$ составляет полный набор данных рассеяния. Действительно, по решениям $c_\pm(z, t)$ задачи Римана (32)–(34), являющимся одновременно решениями системы линейных уравнений (ср. с (24))

$$c_t = 4i\xi^3[c, \sigma_3] + u_x(0, t)\sigma_1 c, \quad (71)$$

легко можно построить решения уравнения (28). Для этого достаточно положить

$$m_-(z, t) = (c_{+11} + c_{+21})e^{-4izt} \quad \text{и} \quad m_+(z, t) = (c_{+12} + c_{+22})e^{4izt}.$$

Тогда условие сопряжения (33) переписется в виде уравнения Гельфанда–Левитана–Марченко

$$m_+(z, t) = m_-(z, t)R(z) + m_+(-z, t),$$

в результате решения которого мы получаем собственные функции уравнения (28). Из свойств функции $R(z)$ сразу же следует, что потенциал $w(t)$ удовлетворяет оценке

$$\int_0^\infty (1+t)|w(t)| dt < \infty. \quad (72)$$

Для отыскания функции $u_x(0, t)$ по найденному значению $w(t)$ приходится решать уравнение Риккати $\dot{u}_x(0, t) + u_x^2(0, t) = w(t)$, которое подстановкой $u_x(0, t) = \dot{\psi}/\psi$ сводится к линейному уравнению второго порядка

$$\ddot{\psi} = w(t)\psi. \quad (73)$$

Имея в виду что $u_x(0, 0) = 0$, находим

$$\psi(0) = 1, \quad \dot{\psi}(0) = 0. \quad (74)$$

Фундаментальная система решений уравнения (73) состоит из функций $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ таких, что

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &= 1 + o(1), \quad t \rightarrow \infty, \\ \psi_2(t) &= t + o(1), \quad t \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (75)$$

причем $\psi_1(t) = m_+(0, t)$, где $m_+(z, t)$ является собственной функцией уравнения (28), в котором $z^2 = \mu$.

ЛЕММА 6.1. В разложении $\psi(t) = C_1\psi_1(t, 0) + C_2\psi_2(t)$ решения $\psi(t)$ по фундаментальной системе решений коэффициент C_2 отличен от нуля.

Докажем лемму методом от противного. Пусть $C_2 = 0$. Тогда имеем $u_x(0, t) = \dot{\psi}_1(t)/\psi_1(t)$. При этом в силу того, что $\psi_1(t) = 1 + o(1)$, $t \rightarrow \infty$ и $\dot{\psi}_1(t) = -\int_t^\infty w(s) \times \psi_1(s) ds$, находим

$$|\dot{\psi}_1(t)| \leq 2 \int_t^\infty |w(s)| ds \quad \text{для } t \gg 1,$$

и, следовательно,

$$\int_t^\infty |\dot{\psi}_1(s)| ds \leq 2 \int_t^\infty (s-t)|w(s)| ds < \infty.$$

Но тогда, очевидно, имеем $u_x(0, t) \in L_1(0, \infty)$, поскольку при $t \gg 1$

$$\int_t^\infty |u_x(0, s)| ds \leq \int_t^\infty \left| \frac{\dot{\psi}_1(s)}{\psi_1(s)} \right| ds \leq 4 \int_t^\infty (s-t)|w(s)| ds < \infty,$$

а это противоречит условию $|R(0)| = 1$. Действительно, из результатов работы [14] следует, что задача рассеяния для системы уравнений (71) с абсолютно суммируемым потенциалом имеет регулярное решение. Другими словами, функция $c_+(z, t)$ устроена так, что в формуле (31) с необходимостью $|R(z)| < 1$ для всех $z \in \mathbb{R}$. Лемма доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. В случае общего положения, т.е. когда для $\xi = 0$ выполняется условие $\xi a(\xi) \neq 0$, функция $u_x(0, t)$ имеет при $t \rightarrow \infty$ асимптотику

$$u_x(0, t) = \frac{1}{t}(1 + o(1)), \quad t \rightarrow \infty. \quad (76)$$

В противном случае выполняется оценка (70).

Справедливость предложения следует из леммы 6.1. Действительно, в силу леммы в формуле

$$u_x(0, t) = \frac{C_1\dot{\psi}_1(t, 0) + C_2\dot{\psi}_2(t)}{C_1\psi_1(t, 0) + C_2\psi_2(t)} \quad (77)$$

коэффициент C_2 отличен от нуля. Отсюда и из формул (75) очевидно вытекает равенство (76).

7. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Мы рассмотрели начально-краевую задачу (1)–(3) при отсутствии дискретного спектра у ассоциированного линейного оператора. При этом спектр второго оператора L -А-пары, взятого вдоль прямой $x = 0$, также оказался непрерывным. В итоге потенциал $u_x(0, t)$ второго оператора либо локализован (лежит в $L_1(0, \infty)$), либо убывает как $1/t$ в зависимости от того, выполняется ли неравенство $|R(z)| < 1$ всюду на $\mathbb{R}$ или нарушается в точке $z = 0$. Задача существенно усложняется, если допустить, что уравнение (4) в начальный момент времени имеет дискретный спектр. Напомним общеизвестную тенденцию, характерную для задачи Коши: солитонная составляющая решения уравнения

КдФ уходит со временем вправо, в то время как радиационный фон, соответствующий непрерывному спектру, движется влево. Рассуждая по аналогии, можно предположить, что добавление солитонов в начальное условие (3) не должно сильно исказить картину. Но, по-видимому, это верно лишь отчасти. Если в начальный момент времени солитоны расположены далеко от точки $x = 0$ (математически это выражается в виде условия: для всех вещественных ненулевых z верно неравенство $|R(z)| < 1$), то, действительно, они уходят, не оказав никакого влияния на поведение решения в окрестности границы. Но если расстояние между солитоном и границей незначительно, то между ними происходит активное взаимодействие – возникает связанное состояние. В этом случае неравенство $|R(z)| < 1$ нарушается на некотором подмножестве $R_0 \subset \mathbb{R}$. При этом у второго оператора при $x = 0$ появляется собственное значение и, кроме того, множество R_0 является лакуной в непрерывном спектре второго оператора. Более подробный анализ этого случая предполагается провести в следующей статье.

Благодарности. Работа поддержана грантами РФФИ № 99-01-00431 и INTAS № 99-01782.

Список литературы

- [1] *В. В. Хаблов.* Тр. семинара С. Л. Соболева. 1979. Т. 2. С. 137–148.
- [2] *A. S. Fokas.* Sel. Math., New ser. 1998. V. 4. № 1. P. 31–68.
- [3] *B. Gürel, M. Gürses, I. Habibullin.* J. Math. Phys. 1995. V. 36. P. 6809–6821.
- [4] *В. Э. Адлер, И. Т. Хабибуллин, А. Б. Шабат.* ТМФ. 1997. Т. 110. № 1. С. 98–113.
- [5] *H. E. Moses.* J. Math. Phys. 1976. V. 17. № 1. P. 73–75.
- [6] *И. Т. Хабибуллин.* ТМФ. 1999. Т. 119. № 3. С. 397–404.
- [7] *В. А. Марченко.* Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка, 1977.
- [8] *I. Habibullin, A. Vil'danov.* The KdV equation on a half-line. solv-int/9910002.
- [9] *Н. П. Векуа.* Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. М.: Наука, 1970.
- [10] *В. М. Бабич, В. С. Булдырев.* Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972.
- [11] *Ю. Л. Шмульян.* УМН. 1954. Т. 9. № 4. С. 243–248.
- [12] *К. Иосида.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.
- [13] *М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.
- [14] *А. Б. Шабат.* Дифф. уравн. 1979. Т. 15. № 10. С. 1824–1835.

Поступила в редакцию 27.III.2001 г.