Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Р. Халилов, О равновесии вырожденного газа нуклонов и электронов в сильном магнитном поле, *ТМФ*, 2002, том 130, номер 1, 87–108

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf292>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 12:57:06

© 2002 г.

В. Р. Халилов*

О РАВНОВЕСИИ ВЫРОЖДЕННОГО ГАЗА НУКЛОНОВ И ЭЛЕКТРОНОВ В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Модель вырожденного идеального газа нуклонов и электронов в сверхсильном магнитном поле применяется для описания состояния вещества в центральной области сильно намагниченной нейтронной звезды. В рамках этой модели изучается влияние постоянного и однородного сверхсильного магнитного поля на условия равновесия и уравнение состояния вырожденного газа нейтронов, протонов и электронов. При этом учтен вклад, обусловленный взаимодействием аномальных магнитных моментов фермионов с магнитным полем. Обсуждается влияние сверхсильного магнитного поля на процесс гравитационного коллапса намагниченной нейтронной звезды в предположении, что ее центральная область состоит в основном из вырожденных нейтронов. Показано, что в сверхсильном однородном магнитном поле при относительно невысоких плотностях электронов, протонов и нейтронов, зависящих от величины поля, газы фермионов становятся полностью поляризованными по спину. Обсуждается возможность возникновения спонтанной намагниченности в системе вырожденных нейтронов при учете эффектов обменного взаимодействия.

1. ВВЕДЕНИЕ

Изучение поведения вырожденного релятивистского идеального газа электронов и нуклонов в постоянном сильном магнитном поле было стимулировано открытием сильных магнитных полей на поверхности нейтронных звезд (пульсаров) [1]–[3]. Так, например, величина напряженности магнитного поля на поверхности пульсара Геркулес X-1, оцененная на основе наблюдения жесткого излучения от этого пульсара, должна быть порядка 10^{13} Гс. Это “вмороженное” в нейтронную звезду магнитное поле может стать “сверхсильным” в центральной области нейтронной звезды, достигая значений порядка 10^{17} Гс [4].

В последние годы в связи с открытием сильных магнитных полей у поверхностей пульсаров внимание физиков-теоретиков и астрофизиков привлекают модели макроскопических намагниченных тел, состоящих в основном из нейтронов в сильном магнитном поле B , гравитационный коллапс которых может привести к образованию экстремально намагниченных нейтронных звезд. Такие звезды были названы магнитарами (magnetars) [5], [6]. Величина напряженности магнитного поля на поверхности экстремально намагниченной нейтронной звезды имеет порядок 10^{15} Гс [7], [8].

*Московский государственный университет, Москва, Россия. E-mail: khalilov@thc.phys.msu.ru

Условие стабильности нейтронной звезды накладывает ограничение на максимально допустимое значение внутреннего магнитного поля, “вмороженного” в звезду, вытекающее из скалярной теоремы вириала [9]. Существование внутреннего сверхсильного магнитного поля приводит к росту величины максимально возможной массы стабильной нейтронной звезды по сравнению с ее величиной в отсутствие магнитного поля [10]. Из оценок, сделанных в работе [10] на основе анализа размерностей, следует, что нейтронная звезда стабильна, если индукция максимального магнитного поля B связана с радиусом (R) и массой (M) нейтронной звезды соотношением, следующим из теоремы вириала:

$$B \sim 2 \cdot 10^{18} \frac{M}{1.4 M_{\odot}} \left(\frac{R}{10 \text{ км}} \right)^{-2} \text{ Гс},$$

где $M_{\odot}$ – масса Солнца.

Внешнее постоянное магнитное поле существенно влияет на микропроцессы, которые могут протекать в центральной области звезды с участием элементарных частиц. Вырожденный релятивистский газ электронов в постоянном магнитном поле дает основной вклад в процессы, которые, по-видимому, протекают в белых карликах [9]. Термодинамическое уравнение состояния замагниченного релятивистского идеального электронного газа и его намагниченность в сильном постоянном магнитном поле рассматривались в работе [11]. Выражения для намагниченности релятивистского идеального электронного газа в постоянном магнитном поле при высокой температуре были получены в [12] (а также в ряде цитированных там работ). В работе [13] изучалось влияние сверхсильного постоянного магнитного поля на отношение плотностей протонов (n_p) и нейтронов (n_n) в вырожденном идеальном газе нуклонов и электронов, находящихся в химическом равновесии.

В работах [14], [15] основные свойства холодной ядерной материи в сильном постоянном магнитном поле изучались на основе релятивистской модели Хартри–Фока. В частности, было показано, что модифицированное (в результате действия сильного магнитного поля на ядерную материю) ядерное уравнение состояния для вырожденной звезды изменяет соотношение между массой и радиусом намагниченной нейтронной звезды по сравнению со случаем ненамагниченной нейтронной звезды.

Нелишне напомнить, что, как принято считать (см., например, [16]–[19]), химическое равновесие в вырожденном идеальном газе нуклонов и электронов поддерживается так называемыми прямыми урка-процессами

$$p + e \rightarrow n + \nu, \quad n \rightarrow p + e + \bar{\nu},$$

где ν и $\bar{\nu}$ обозначают нейтрино и антинейтрино, соответственно. В этих процессах сохраняется плотность полного числа барионов ($n_b = n_p + n_n$) и выполняется условие электронейтральности системы ($n_p = n_e$). Но так как число n_b остается постоянным, полная плотность внутренней энергии системы $\mathcal{E}$ фактически зависит только от величины n_n . Химическое равновесие достигается, когда функция $\mathcal{E}$ имеет минимум.

Условие равновесия определяется уравнением для химических потенциалов $\mu_n = \mu_p + \mu_e$. Поскольку предполагается, что нейтрино покидают звезду, их химический

потенциал полагается равным нулю. Отношение $x = n_p/n_n$ в значительной мере определяет уравнение состояния вырожденного газа нуклонов и электронов. В отсутствие магнитного поля это отношение можно рассматривать только как функцию плотности нейтронов $x(n_n)$. Эта функция достигает минимального значения 0.002 при относительно малых плотностях нейтронов $n_n \ll n_{0n} \equiv m_n^3/(3\pi^2) = 2.7 \cdot 10^{39} \text{ см}^{-3}$ и затем монотонно возрастает до значения 1/8 при $n_n \gg n_{0n}$.

Напомним также значения напряженностей так называемых критических магнитных полей $B_0 = m_e^2/|e| = 4.4 \cdot 10^{13} \text{ Гс}$ (m_e и e – масса и заряд электрона) для электрона и $B_0^* = m_p^2/e = 3.4 \cdot 10^6 B_0$ (m_p и e – масса и заряд протона) для протона. Мы полагаем $\hbar = 1$ и используем обозначение $\alpha \equiv e^2$.

В работе [13] было показано, что если в магнитном поле с $B_0^* \gg B \gg B_0$ равновесная плотность протонов увеличивается по сравнению со свободным случаем во всем интервале изменения плотности нейтронов, оставаясь тем не менее меньше n_n во всем интервале изменения плотности нейтронов, то в сверхсильном поле $B \gg B_0^*$ равновесная плотность протонов может превышать n_n . Если бы такие сильные поля могли существовать в центральной области звезды, то о таких звездах, по-видимому, правильнее было бы говорить как о протонных звездах.

В ряде работ [20]–[22] уравнение состояния и намагниченность вырожденного идеального газа электронов и нуклонов в присутствии сильного постоянного магнитного поля с учетом аномальных магнитных моментов (АММ) электронов и нуклонов изучались численными методами при относительно малых плотностях фермионов. Так, в работах [20], [21] было показано, что эффекты квантования энергии и орбит поперечного (вектору напряженности поля) движения заряженных частиц в постоянном и однородном магнитном поле играют заметную роль и, в частности, приводят к увеличению равновесной плотности протонов по сравнению со свободным случаем и в конечном итоге к изменению уравнения состояния идеального газа нуклонов, а в сверхсильном магнитном поле становится заметным и вклад АММ нейтрона во внутреннюю энергию холодного газа нейтронов, так что его необходимо учитывать при изучении состояния равновесия вещества в центральной области сильно намагниченной нейтронной звезды.

В работе [22] был сделан вывод, что при гравитационном коллапсе тела, состоящего в основном из вырожденных нейтронов относительно невысокой плотности, в сильном магнитном поле суммарное давление газа нейтронов (с учетом вклада, возникающего в результате намагниченности) анизотропно и при некоторых определенных физических условиях его перпендикулярная магнитному полю компонента может обращаться в нуль. Вследствие этого при гравитационном коллапсе в конечном состоянии могут образоваться такие экзотические астрофизические объекты как гибридная звезда [23] или черная струна [24], но только не магнитар. Мы покажем, что этот вывод, сделанный в работе [22], некорректен.

В настоящей работе мы рассмотрим модель вырожденного релятивистского идеального газа протонов (p), нейтронов (n) и электронов (e) в постоянном и однородном магнитном поле. В рамках этой модели мы изучим (аналитически) влияние постоянного однородного сверхсильного магнитного поля на условия равновесия и уравнение состо-

яния вырожденного газа нейтронов, протонов и электронов с учетом вкладов, обусловленных взаимодействием АММ фермионов с магнитным полем. Мы обсудим влияние сверхсильного магнитного поля на процесс гравитационного коллапса намагниченной нейтронной звезды, предполагая, что условия равновесия макроскопического тела определяются полным тензором энергии-импульса вещества и действующих физических полей. Мы покажем, что в сверхсильном однородном магнитном поле при относительно невысоких плотностях электронов, протонов и нейтронов, зависящих от величины поля, все фермионы заполняют только основные квантовые состояния, а газы фермионов становятся полностью поляризованными по спину.

Температура газа полагается равной нулю, так как температура типичной нейтронной звезды, возраст которой ~ 100 лет, оценивается как 10^8 К (порядка 10 кэВ), что значительно меньше энергий Ферми как вырожденных нуклонов (около 1000 МэВ), так и электронов (около 100 МэВ) [16]. Отметим, что магнитное поле в центральной области нейтронной звезды можно рассматривать как пространственно однородное поле по отношению к комптоновским длинам волн частиц. Поэтому предполагаем, что газ нуклонов и электронов однороден в пространстве.

2. СПЕКТРЫ ЭНЕРГИЙ ЧАСТИЦ

Внутренняя энергия, давление и намагниченность газа в постоянном магнитном поле определяются квантово-механическими собственными значениями энергии электронов и нуклонов в магнитном поле. Собственные значения гамильтониана уравнения Дирака–Паули для электрически заряженного фермиона, обладающего АММ, во внешнем постоянном и однородном магнитном поле были получены в работе [25] в виде

$$E_{ns} = \sqrt{p^2 + \left(\sqrt{|e|B(2n+1-s\operatorname{sign}e)} + m_{e,p}^2 + sM_{e,p}B \right)^2}, \quad (1)$$

где p – проекция импульса фермиона (электрона или протона) в направлении внешнего поля $\mathbf{B}$, e – электрический заряд фермиона, $n = 0, 1, 2, \dots$ – главное квантовое число, нумерующее уровни Ландау, а собственные значения гамильтониана уравнения Дирака–Паули для нейтрального фермиона, обладающего АММ, в постоянном и однородном магнитном поле были получены в работе [26] в виде

$$E = \sqrt{p^2 + \left(\sqrt{p_\perp^2 + m_n^2} + sM_nB \right)^2}, \quad (2)$$

где p и $p_\perp$ – компоненты импульса по направлению внешнего магнитного поля $\mathbf{B}$ и перпендикулярно к нему, соответственно; $m_{e,p,n}$ – масса электрона, протона, нейтрона; $M_{e,p,n}$ – АММ электрона, протона, нейтрона; $s = \pm 1$ – квантовое число, характеризующее проекцию спина фермиона на направление внешнего магнитного поля.

Если $M_{e,p} = 0$, то все уровни энергии, описываемые формулой (1), за исключением лишь уровня с $n = 0$, $s = -1$ (для $\operatorname{sign} e < 0$) и уровня с $n = 0$, $s = +1$ (для $\operatorname{sign} e > 0$), двукратно вырождены: совпадают уровни с $n, s = +1$ и $n+1, s = -1$ (для $\operatorname{sign} e < 0$)

и уровни с $n, s = -1$ и $n + 1, s = +1$ (для $\text{sign } e > 0$). Основным состоянием является состояние с $n = 0, s = -1$ (для $\text{sign } e < 0$) или состояние с $n = 0, s = +1$ (для $\text{sign } e > 0$); проекция спина электрона (протона) в этом состоянии на направление внешнего магнитного поля может принимать только одно значение $s = -1$ ($s = +1$).

Если $M_{e,p} \neq 0$, то основным состоянием является состояние с $n = 0, s = -1$ как для $\text{sign } e < 0$, так и для $\text{sign } e > 0$, причем теперь все уровни энергии с $n = 0, 1, 2, \dots$ двукратно расщеплены по спиновому квантовому числу, т.е. во всех состояниях взаимодействие АММ заряженного фермиона с внешним магнитным полем снимает вырождение по направлениям (проекциям) спина заряженного фермиона.

Далее при вычислении физических величин, характеризующих газ электрически заряженных частиц в постоянном и однородном магнитном поле, следует вместо формулы для плотности числа квантовых состояний (в единице объема) в интервале $d\mathbf{p}$ в отсутствие внешнего поля

$$2 \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}$$

использовать формулу для аналогичной величины

$$\sum_n \sum_{s=\pm 1} \int \frac{eB}{(2\pi)^2} dp$$

в постоянном и однородном магнитном поле [27].

Из формул (1) и (2) следует, что расстояние между уровнями Ландау в магнитном поле с индукцией B_0 для электрона и B_0^* для протона, соответственно, становится равным энергии покоя этих частиц. В магнитных полях $B = 4\pi B_0/\alpha$ для электрона и $B \sim B_0^*$ для нуклонов энергия связи АММ электрона и нуклонов с внешним магнитным полем приблизительно равна энергии покоя этих частиц, и выражения (1) и (2) могут обратиться в нуль при некоторых определенных значениях проекций спина частиц. На этом основании в предположении, что формулы (1) и (2) справедливы при сколь угодно больших напряженностях внешнего магнитного поля, в работах [21], [22] был сделан вывод, что вакуум квантовой электродинамики в магнитном поле $B = 4\pi B_0/\alpha$ становится нестабильным относительно спонтанного рождения электрон-позитронных пар, а в поле $B \sim B_0^*$ подобные проблемы возникают и для нуклонов.

Следует, однако, помнить, что АММ электрона генерируется динамически [28] и, как показано в [29], является исчезающе малой функцией магнитного поля при $B \gg B_0$, а собственные значения энергии для протона и нейтрона были получены из уравнения Дирака–Паули во внешнем магнитном поле, которое при применении к нуклонам обособовано в нерелятивистском приближении и только в полях с $B \ll B_0^*$. Отметим также, что изучение радиационного сдвига энергии электрона (часть которого дает вклад в АММ) в замагниченной электрон-позитронной плазме (которая учитывалась феноменологически, введением химического потенциала) при конечной температуре, проведенное в работах [30], показало, что нелинейные (по внешнему полю) квантовые эффекты в плотной электрон-позитронной плазме при конечной температуре должны проявляться в присутствии магнитных полей с $B \ll B_0$. Поэтому, например, можно ожидать, что

при достаточно высокой температуре АММ электрона станет исчезающе малой функцией магнитного поля уже при $B \ll B_0$.

Мы будем рассматривать область значений $B_0^* \gg B \gg B_0$.

3. ЭЛЕКТРОННЫЙ ГАЗ

В магнитном поле $B_0^* \gg B \gg B_0$ АММ электрона является пренебрежимо малой величиной и собственные значения энергии электрона можно определить формулой

$$E_n = \sqrt{p^2 + 2|e|Bn + m_e^2}.$$

Отметим, что в этом случае все уровни энергии электрона, за исключением лишь уровня с $n = 0$, $s = -1$, двукратно вырождены: совпадают уровни с $n, s = 1$ и $n+1, s = -1$.

Связь между энергией Ферми (или химическим потенциалом) электрона μ_e в присутствии магнитного поля $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ и плотностью числа электронов n_e можно определить выражением [13]

$$\frac{\sqrt{2}n_e}{3n_0} \left(\frac{B_0}{B} \right)^{\frac{3}{2}} = \left((\mu^2 - 1) \frac{B_0}{2B} \right)^{\frac{1}{2}} + 2 \sum_{n=1}^{n_{\max}} \left((\mu^2 - 1) \frac{B_0}{2B} - n \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3)$$

Здесь $\mu = \mu_e/m_e$, а целое число $n_{\max}$ — целая часть функции $(\mu^2 - 1)B_0/2B$ — определяется энергией Ферми μ_e следующим выражением:

$$n_{\max} = \left[\frac{\mu_e^2 - m_e^2}{2|eB|} \right]. \quad (4)$$

Так как энергия Ферми в отсутствие магнитного поля μ_0 связана с плотностью числа электронов n_e с помощью формулы

$$\left(\frac{\mu_0^2 - m_e^2}{m_e^2} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{n_e}{n_0}, \quad n_0 = \frac{m_e^3}{3\pi^2}, \quad (5)$$

то фактически выражением (3) энергия Ферми вырожденного релятивистского электронного газа в присутствии внешнего постоянного магнитного поля определяется неявно. Видно, что энергия Ферми вырожденного замагниченного релятивистского электронного газа может зависеть не только от плотности электронов, но также (и очень существенно) от величины внешнего магнитного поля (см. также [13]).

Определим плотность внутренней энергии вырожденных электронов во внешнем постоянном однородном магнитном поле формулой

$$\mathcal{E} = \frac{eB}{2\pi^2} \sum_{s=\pm 1} \sum_0^{n_{\max}} \int_0^{p_F^e} dp \sqrt{p^2 + 2|eB|n + m_e^2}, \quad (6)$$

где p_F^e есть импульс Ферми электрона для фиксированного значения квантового числа n . Интегрируя (6), получим

$$\mathcal{E} = \frac{e^2 B B_0}{4\pi^2} \left\{ z_0 \sqrt{1 + z_0^2} + \ln(z_0 + \sqrt{1 + z_0^2}) + \right. \\ \left. + 2 \sum_{n=1}^{n_{\max}} \left[z_n \sqrt{1 + z_n^2 + bn} + (1 + bn) \ln \frac{z_n + \sqrt{1 + z_n^2 + bn}}{\sqrt{1 + bn}} \right] \right\}, \quad (7)$$

где $b = 2B/B_0$ и

$$z_0^2 = \frac{\mu_e^2 - m_e^2}{m_e^2}, \quad z_n^2 = \frac{\mu_e^2 - m_e^2 - 2|eB|n}{m_e^2} \equiv z_0^2 - bn. \quad (8)$$

Обозначим $x = 4n_e/(3n_0b)$. При $x \gg b^{1/2}$ и $B \ll B_0$ электроны заполняют много уровней Ландау. При таких значениях напряженностей магнитного поля и плотности электронов выражения для внутренней энергии, химического потенциала и давления газа мало отличаются от соответствующих выражений в отсутствие поля, которые приведены в [9], [16], [17], [31].

Однако из соотношения (3) следует, что если

$$\frac{\sqrt{2}n_e}{3n_0} \left(\frac{B_0}{B} \right)^{\frac{3}{2}} < 1, \quad (9)$$

то только низший уровень $n = 0$ может быть заполнен электронами. В этом случае для заданных значений n_e мы можем найти из (3) соотношение

$$(\mu^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \equiv \frac{p_F^e}{m} = \frac{2B_0}{3B} \frac{n_e}{n_0}. \quad (10)$$

Плотность внутренней энергии и намагниченность вырожденного релятивистского газа электронов в магнитном поле на низшем уровне имеют вид

$$\mathcal{E} = \frac{\alpha B B_0}{4\pi^2} [x \sqrt{1 + x^2} + \ln(x + \sqrt{1 + x^2})] \quad (11)$$

и

$$\mathcal{M} = \frac{\alpha B_0}{4\pi^2} [x \sqrt{1 + x^2} - \ln(x + \sqrt{1 + x^2})], \quad (12)$$

соответственно. Видим, что намагниченность положительна, т.е. вырожденный релятивистский газ электронов в сверхсильном магнитном поле парамагнитен. Так как $x \leq b^{1/2}$, то намагниченность вырожденного газа электронов в сверхсильном магнитном поле в низшем энергетическом состоянии имеет максимум $\mathcal{M}_{\max} \cong \alpha B/(2\pi^2)$.

Электроны в сверхсильном магнитном поле $B \gg B_0$ в низшем энергетическом состоянии локализованы в поперечной магнитному полю плоскости в области с линейным размером порядка $(1/m)(B_0/B)^{1/2} \equiv \lambda(B_0/B)^{1/2}$ (см., например, [29]). Вследствие этого

свойства тензор напряжений вырожденного электронного газа (определяющий компоненты давления газа) в поле $B \gg B_0$ анизотропен. В частности, отлична от нуля только компонента тензора напряжений, соответствующая давлению газа вдоль направления магнитного поля, $P \equiv P_{33}$, определяемая формулой

$$P = \frac{\alpha B B_0}{2\pi^2} \int_0^{p_F} \frac{p^2}{\sqrt{p^2 + (mc)^2}} dp = \frac{\alpha B B_0}{8\pi^2} [x\sqrt{1+x^2} - \ln(x + \sqrt{1+x^2})]. \quad (13)$$

Компоненты тензора напряжений, определяющие давление газа в перпендикулярном полю направлению, равны нулю, так же как и соответствующая компонента давления $P_{\perp} = 0$.

При $x \ll 1$, что соответствует нерелятивистскому пределу, плотность кинетической энергии и давление электронного газа равны

$$\mathcal{E}_{\text{nr}} = \frac{\alpha B B_0}{24\pi^2} x^3, \quad P_{\text{nr}} = 2\mathcal{E}_{\text{nr}}. \quad (14)$$

Плотность внутренней энергии, давление и плотность магнитной энергии (возникающей за счет намагниченности газа) релятивистского электронного газа определяются формулами ($x \gg 1$)

$$\mathcal{E}_r \cong \frac{\alpha B B_0}{4\pi^2} (x^2 + \ln 2x), \quad P_r \cong \frac{\alpha B B_0}{4\pi^2} (x^2 - \ln 2x) \cong \mathcal{M}B, \quad (15)$$

и, следовательно,

$$\mathcal{E}_{\text{max}} \cong P_{\text{max}} \cong \mathcal{M}_{\text{max}} B \cong \frac{\alpha B^2}{2\pi^2} \equiv P_e. \quad (16)$$

Электронный газ, находящийся во внешнем магнитном поле, дает вклад в давление за счет намагниченности. Действительно, пространственные компоненты тензора энергии-импульса газа электронов $T_{\mu\nu}$ в рассматриваемом нами сверхсильном магнитном поле с учетом вклада в давление, возникающего за счет намагниченности газа, равны (ср. с [32]) $T_{11} = T_{22} = P_{\perp} = 0$ и $T_{33} = P \cong \mathcal{M}B$. Видно, что тензор напряжений вырожденного электронного газа в поле $B \gg B_0$ анизотропен.

Рассмотрим действие сильного магнитного поля на вырожденный электронный газ относительно невысокой плотности, удовлетворяющей неравенству (9). Оказывается, что в процессе образования нейтронной звезды такое действие может привести к тому, что охлаждение звезды вследствие испускания нейтрино в упомянутых выше урка-процессах может начаться позже, чем оно могло бы начаться (по той же причине) в отсутствие поля при той же массе звезды. Принято считать, что значительную часть энергии звезда теряет из-за излучения нейтрино [9]. В начальной стадии сжатия звезды излучение антинейтрино происходит вследствие захвата электрона ядром с электрическим зарядом Ze и образования ядра с зарядом $(Z-1)e$.

При равновесии должно выполняться (обычное) условие для химических потенциалов [31] $\Delta \equiv E_Z - E_{Z-1} = \mu(n_e)$, где E_Z — энергия связи ядра с номером Z . Для свободного вырожденного ультрарелятивистского газа плотность n_e имеет вид [31]

$$n_e = n_0 \left(\frac{\Delta}{m} \right)^3, \quad (17)$$

в то время как для обсуждаемого здесь случая имеем

$$n_e(B) = \frac{3n_0 B \Delta}{2B_0 m}. \quad (18)$$

Реакции должны начаться, когда плотности электронов достигнут значений (17) или (18) в отсутствие поля и в сверхсильном поле, соответственно. Давление и плотность электронного газа должны быть постоянными вплоть до момента времени, когда все ядра захватят по одному электрону [31]. Выражение для давления газа электронов в сверхсильном магнитном поле, найденное нами, имеет вид

$$P_r(B) = \frac{3Bn_0\Delta^2}{8B_0m},$$

в то время как в отсутствие поля [27]

$$P_r = \frac{n_0\Delta^4}{4m^3}.$$

Из этих формул следует, что плотность и давление вырожденного электронного газа в сверхсильном магнитном поле выше соответствующих величин для свободного вырожденного электронного газа при условии $(3B/(2B_0))^{1/2} > \Delta/m$. Оценку характерного времени охлаждения звезды можно получить из вероятности захвата электрона, отнесенной к одному протону, в сильном магнитном поле. В пределе $\mu \gg m$ мы найдем

$$w(B) \approx \frac{G^2(1+a^2)m^2B\mu^3}{48B_0},$$

где G – константа слабого взаимодействия, a – отношение аксиально-векторной и векторной констант слабого взаимодействия.

Отношение вероятностей захвата электрона в сильном магнитном поле и в отсутствие поля определяется формулой

$$\frac{w(B)}{w(B)|_{B=0}} \approx 4.2 \left(\frac{Bm^2}{B_0\mu_0^2} \right)^2.$$

Здесь мы использовали выражение для $w(B)|_{B=0}$ в пределе $\mu_0 \gg m$ из книги [9].

4. ВЫРОЖДЕННЫЙ ГАЗ НУКЛОНОВ

Вычислим внутреннюю энергию вырожденного идеального релятивистского газа нейтронов и протонов в сверхсильном постоянном и однородном магнитном поле с $B_0^* \gg B \gg B_0$, предполагая, что радиационные поправки в полях с такими напряженностями не меняют значений АММ нуклонов.

Плотность внутренней энергии вырожденного релятивистского газа нейтронов во внешнем постоянном однородном магнитном поле определяется формулой

$$\mathcal{E}_n = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{s=\pm 1} \int_0^{p_{\perp F}} \int_0^{p_F} dp_{\perp} dp p_{\perp} \sqrt{p^2 + \left(\sqrt{p_{\perp}^2 + m_n^2} + sM_n B\right)^2}, \quad (19)$$

где p_F и $p_{\perp F}$ – “проекции импульсов Ферми” нейтрона вдоль и поперек направления магнитного поля. Интегрируя (19), получим следующее точное выражение:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_n = \frac{1}{8\pi^2} \sum_{s=\pm 1} & \left\{ \mu_n (\mu_n^2 - m_{n*}^2)^{\frac{3}{2}} + \mu_n^3 \sqrt{\mu_n^2 - m_{n*}^2} - \frac{m_{n*}^4}{2} \ln \frac{\mu_n + \sqrt{\mu_n^2 - m_{n*}^2}}{\mu_n - \sqrt{\mu_n^2 - m_{n*}^2}} - \right. \\ & - \frac{sM_n B}{3} \left[-5m_{n*}\mu_n \sqrt{\mu_n^2 - m_{n*}^2} + \right. \\ & \left. \left. + 2m_{n*}^3 \ln \frac{\mu_n + \sqrt{\mu_n^2 - m_{n*}^2}}{\mu_n - \sqrt{\mu_n^2 - m_{n*}^2}} + \mu_n^3 \arcsin \frac{\sqrt{\mu_n^2 - m_{n*}^2}}{\mu_n} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (20)$$

где энергия Ферми нейтронов μ_n определена формулой $\mu_n^2 = p_F^2 + p_{\perp F}^2 + m_{n*}^2$ и $m_{n*} = m_n + sM_n B$.

Заметим, что электрически нейтральный магнитный диполь, помещенный в магнитное поле, обладает потенциальной энергией, и, значит, работа по перемещению магнитного диполя, производимая магнитным полем, отлична от нуля. По этой причине давление вырожденного нейтронного газа в присутствии магнитного поля можно определить с помощью обычной формулы

$$P = - \left(\frac{\partial \mathcal{E}_n V}{\partial V} \right) \Big|_{S=0}, \quad (21)$$

где V – объем, а S – энтропия газа, что дает

$$\begin{aligned} P_n = \frac{1}{8\pi^2} \sum_{s=\pm 1} & \left\{ \left(\frac{\mu_n^3}{3} - \frac{5\mu_n m_{n*}^2}{6} \right) \sqrt{\mu_n^2 - m_{n*}^2} + \frac{m_{n*}^4}{4} \ln \frac{\mu_n + \sqrt{\mu_n^2 - m_{n*}^2}}{\mu_n - \sqrt{\mu_n^2 - m_{n*}^2}} + \right. \\ & + sM_n B \left[\left(\frac{m_{n*}^3}{2\mu_n} - \frac{25m_{n*}\mu_n}{18} \right) \sqrt{\mu_n^2 - m_{n*}^2} + \frac{m_{n*}^2(\mu_n^2 - m_{n*}^2)}{18\mu_n} + \right. \\ & \left. \left. + \frac{m_{n*}^3}{3} \ln \frac{\mu_n + \sqrt{\mu_n^2 - m_{n*}^2}}{\mu_n - \sqrt{\mu_n^2 - m_{n*}^2}} + \frac{\mu_n m_{n*}^2}{6} \arcsin \frac{\sqrt{\mu_n^2 - m_{n*}^2}}{\mu_n} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

Для намагниченности газа, определенной соотношением $\mathcal{M}_n = -\partial \mathcal{E}_n / \partial B$, нетрудно получить

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_n = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{s=\pm 1} & sM_n \left[\mu_n \sqrt{\mu_n^2 - m_{n*}^2} \left(\frac{7m_n}{6} + sM_n B \right) + \right. \\ & \left. + \frac{4}{3} m_{n*}^3 \ln \frac{\mu_n + \sqrt{\mu_n^2 - m_{n*}^2}}{\mu_n - \sqrt{\mu_n^2 - m_{n*}^2}} + \mu_n^3 \arcsin \frac{\sqrt{\mu_n^2 - m_{n*}^2}}{\mu_n} \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

Из этой формулы найдем для плотности магнитной энергии нейтронного газа

$$\mathcal{M}_n B \cong \begin{cases} \frac{9e^2 B^2}{2\pi^2} \left(\frac{n_n}{n_{0n}} \right)^{\frac{1}{3}}, & n \ll n_{0n}, \\ \frac{9e^2 B^2}{2\pi^2} \left(\frac{n_n}{n_{0n}} \right)^{\frac{2}{3}}, & n \gg n_{0n}, \end{cases} \quad (24)$$

где $n_{0n} = m_n^3/(3\pi^2)$. Так как вырожденный газ нейтронов парамагнитен, то его намагниченность положительна, а суммарное давление газа вследствие намагниченности меньше, чем давление свободного газа нейтронов, на величину $\mathcal{M}B$.

Плотность внутренней энергии вырожденного релятивистского газа протонов во внешнем постоянном однородном магнитном поле определяется формулой

$$\mathcal{E}_p = \frac{eB}{2\pi^2} \sum_{s=\pm 1} \sum_0^{n_{\max}} \int_0^{p_F} dp \sqrt{p^2 + \left(\sqrt{2|eB|n + m_p^2} + sM_p B \right)^2}, \quad (25)$$

где p_F есть “проекция импульса Ферми” протона в направлении магнитного поля. Проинтегрировав (25) по p , мы получим для $\mathcal{E}_p$ выражение

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_p = \frac{e^2 B B_0^*}{4\pi^2} \sum_{s=\pm 1} \sum_{n=0}^{n_{\max}} & \left[z_n(p) \sqrt{1 + z_n^2(p) + b_p n} + \right. \\ & \left. + \left(\sqrt{1 + b_p n} + \frac{sM_p B}{m_p} \right)^2 \ln \frac{z_n(p) + \sqrt{1 + z_n^2(p) + b_p n}}{\sqrt{1 + b_p n}} \right], \end{aligned} \quad (26)$$

в котором

$$\begin{aligned} z_n^2(p) &= \frac{\mu_p^2 - \left(\sqrt{2|eB|n + m_p^2} + sM_p B \right)^2}{m_p^2}, \quad b_p = \frac{2B}{B_0^*}, \\ n_{\max} &= \left\lfloor \frac{(\mu_p \mp sM_p B)^2 - m_p^2}{2|eB|} \right\rfloor. \end{aligned}$$

Давление вырожденного газа частиц в отсутствие внешнего поля можно определить выражением (21). Для газа заряженных частиц в магнитном поле следует использовать иное выражение. Мы определим давление вырожденного релятивистского газа протонов в однородном магнитном поле формулой

$$P_p = \frac{eB}{2\pi^2} \sum_{s=\pm 1} \sum_0^{n_{\max}} \int_0^{p_F} dp \frac{p^2}{\sqrt{p^2 + \left(\sqrt{2|eB|n + m_p^2} + sM_p B \right)^2}}.$$

После интегрирования получим

$$\begin{aligned} P_p = \frac{e^2 B B_0^*}{4\pi^2} \sum_{s=\pm 1} \sum_{n=1}^{n_{\max}} & \left[z_n(p) \sqrt{1 + z_n^2(p) + b_p n} - \right. \\ & \left. - \left(\sqrt{1 + b_p n} + \frac{sM_p B}{m_p} \right)^2 \ln \frac{z_n(p) + \sqrt{1 + z_n^2(p) + b_p n}}{\sqrt{1 + b_p n}} \right]. \end{aligned}$$

Однако, учитывая, что при $B_0^* \gg B \gg B_0$ расстояние между уровнями Ландау мало по сравнению с массой протона, мы можем вычислить плотность внутренней энергии, давление (и затем намагниченность) вырожденного релятивистского газа протонов в полях с такими напряженностями, заменяя суммирование по n интегрированием. В результате получим формулы (20), (22)–(24) с μ_p , m_p , n_p/n_{0n} и M_p вместо μ_n , m_n , n_n/n_{0n} и M_n , а также в формуле (24) число 13 вместо 9. Следует отметить, что полученные таким образом выражения не будут содержать так называемых осцилляций Ландау [31], которые, однако, не существенны для нашей задачи.

5. ТЕНЗОР НАПРЯЖЕНИЙ В СВЕРХСИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Обсудим теперь условия механического равновесия вырожденного идеального газа нуклонов и электронов в постоянном и однородном магнитном поле, имея также в виду эффекты гравитации. Рассмотрим полный тензор напряжений вещества и электромагнитного поля применительно к нашей модели. Тензор энергии-импульса электромагнитного поля в рассматриваемой модели имеет следующие ненулевые компоненты: $T^{00} = -T^{33} = T^{11} = T^{22} = B(B - 4\pi\mathcal{M})/(8\pi)$. Давление постоянного и однородного магнитного поля, определяемое пространственными компонентами тензора энергии-импульса поля (так называемым максвелловским тензором напряжений), анизотропно.

Давление вырожденного газа нейтронов в магнитном поле, которые в условиях центральной области намагниченной нейтронной звезды дают основной вклад в давление вещества, описывается формулой (22). Тогда главные члены компонент полного тензора напряжений в постоянном однородном магнитном поле можно представить в виде

$$\begin{aligned} T_{11} = T_{22} &= (\gamma - 1)\mathcal{E}_n + \left(\frac{1}{2} - \gamma\right)\mathcal{M}_n B + \frac{B^2}{8\pi}, \\ T_{33} &= (\gamma - 1)\mathcal{E}_n + \left(\frac{3}{2} - \gamma\right)\mathcal{M}_n B - \frac{B^2}{8\pi}, \end{aligned} \quad (27)$$

где $\gamma = 5/3, 4/3$ при $n_n \ll n_{0n}$, $n_n \gg n_{0n}$, соответственно, а выражения для плотности энергии нейтронов в отсутствие магнитного поля ($\mathcal{E}_n$) и плотности магнитной энергии нейтронов ($\mathcal{M}_n B$) также нужно выбирать для соответствующих предельных значений плотности нейтронов.

В квазиклассическом пределе тензор напряжений для протонов строится аналогично, так что в этом пределе следует рассматривать суммы парциальных величин, т.е. $P = \sum_i P_i$ и $\mathcal{M} = \sum_i \mathcal{M}_i$, $i = n, p$. Видно, что в обсуждаемой нами конфигурации магнитного поля полный тензор напряжений анизотропен.

В рассматриваемом нами случае можно считать, что тело состоит в основном из вырожденных нейтронов. Действительно, вклад протонов, которые также имеются в центральной области звезды, мал по сравнению с вкладом нейтронов, так как выражение для нормированной плотности числа протонов как функции нормированной плотности

числа нейтронов в состоянии химического равновесия в сильном магнитном поле, полученное в работе [13], имеет вид

$$\frac{n_p}{n_{0n}} \simeq \frac{3B}{4B_0^*} \left(\frac{n_n}{n_{0n}} \right)^{\frac{2}{3}}.$$

Оценим различные парциальные вклады в давление. Для оценок приведем только основные члены выражения для давления (22) в пределах относительно малой ($n_n \ll n_{0n}$) и большой ($n_n \gg n_{0n}$) нормированной плотности числа нейтронов

$$P_n^l \simeq \frac{2\mathcal{E}_n^l}{3} \simeq \frac{m_n^4}{12\pi^2} \left(\frac{n_n}{n_{0n}} \right)^{\frac{5}{3}}, \quad P_n^h \simeq \frac{\mathcal{E}_n^h}{3} \simeq \frac{m_n^4}{45\pi^4(3\pi^2)^{\frac{2}{3}}} \left(\frac{n_n}{n_{0n}} \right)^{\frac{4}{3}},$$

где $\mathcal{E}_n^l$ и $\mathcal{E}_n^h$ — плотности внутренней энергии при малой и большой плотности нейтронов, соответственно. Мы также полагали, что химический потенциал газа связан с плотностью n_n соотношением $3\pi^2 n_n = (\mu_n^2 - m_{n*}^2)^{3/2}$.

При относительно малой плотности нейтронов следует учесть вклад электронов, который определяется формулой (16). Тогда различные вклады определяются отношениями

$$\frac{\mathcal{M}_n B}{P_n^l} \simeq 2 \cdot 10^4 \left(\frac{B}{B_0^*} \right)^2 \left(\frac{n_{0n}}{n_n} \right)^{\frac{4}{3}}, \quad \frac{P_e}{P_n^l} \simeq 10^3 \left(\frac{B}{B_0^*} \right)^2 \left(\frac{n_{0n}}{n_n} \right)^{\frac{5}{3}} \quad (28)$$

и

$$\frac{B^2}{8\pi P_n^l} \simeq 1.7 \cdot 10^3 \left(\frac{B}{B_0^*} \right)^2 \left(\frac{n_{0n}}{n_n} \right)^{\frac{5}{3}}, \quad \frac{8\pi \mathcal{M}_n B}{B^2} \simeq 0.08 \left(\frac{n_n}{n_{0n}} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (29)$$

Видно, что при относительно малой плотности нейтронов давление P_n^l больше, чем $\mathcal{M}_n B$, только в магнитном поле с $B \simeq 10^{-4} B_0^*$ и при $n_n > 10^{-3} n_{0n}$, однако давление магнитного поля $B^2/8\pi$ всегда больше, чем $\mathcal{M}_n B$, если $n_n \ll n_{0n}$. Эти оценки согласуются с результатами работ [20], [21].

В магнитном поле с $B \simeq 10^{-4} B_0^*$ и при плотности нейтронов $n_n \sim 10^{-3} n_{0n}$ давление P_e по порядку величины равно P_n^l . Из формул (27) следует, что полный тензор напряжений при рассматриваемых нами условиях анизотропен и имеет вдоль магнитного поля меньшее значение (благодаря члену $-B^2/(8\pi)$), чем поперек. В сверхсильном постоянном магнитном поле (оценки даны ниже) при относительно низкой плотности нейтронов отрицательное давление магнитного поля ($-B^2/(8\pi)$) в принципе может скомпенсировать давление вырожденного релятивистского газа нейтронов вдоль направления магнитного поля, и с учетом действия на газ гравитационной силы можно допустить, что звезда под действием гравитационной силы будет сжиматься преимущественно в направлении магнитного поля, превратившись в конечном состоянии в сжатый сфероид. Из первой формулы (29) следует, что такой режим возможен при

$$\left(\frac{n_n}{n_{0n}} \right)^{\frac{5}{3}} \sim 2 \cdot 10^3 \left(\frac{B}{B_0^*} \right)^2, \quad \left(\frac{n_n}{n_{0n}} \right) \ll 1.$$

Для оценки положим $n_n \simeq 0.1n_{0n}$. При этом значении плотности нейтронного газа в центральной области нейтронной звезды индукция магнитного поля должна быть не меньше чем $3 \cdot 10^{-2}B_0^*$, что крайне маловероятно, так как такие значения магнитного поля не удовлетворяют условию стабильности звезды данной массы, вытекающему из теоремы вириала. Возможность коллапса вдоль магнитного поля будет полностью исключена, если предельное значение индукции магнитного поля в стабильных нейтронных звездах как функции плотности таково, что $P_n^l > B^2/(8\pi)$.

При высокой плотности нейтронов имеем

$$\frac{\mathcal{M}_n B}{P_n^h} \simeq 54 \left(\frac{B}{B_0^*} \right)^2 \left(\frac{n_{0n}}{n_n} \right)^{\frac{3}{2}}, \quad \frac{8\pi \mathcal{M}_n B}{B^2} \simeq 0.08 \left(\frac{n_n}{n_{0n}} \right)^{\frac{2}{3}}.$$

Давление, производимое вырожденным релятивистским газом нейтронов за счет намагниченности (например, при $n_n \simeq 4n_{0n}$), могло бы стать сравнимым с P_n^h только в сверхсильном магнитном поле с $B \simeq 0.4B_0^*$, однако в таком сильном поле формула (24) не применима. При очень высокой плотности нейтронов $n_n \sim 50n_{0n}$ давление газа нейтронов за счет намагниченности становится порядка давления магнитного поля уже при $B \simeq 2.5B_0^*$. При высокой плотности нейтронов (например, $n_n \sim 10n_{0n}$) (положительное) давление вырожденного релятивистского газа нейтронов вдоль направления магнитного поля больше абсолютного значения давления магнитного поля, если $B < 4B_0^*$.

Из результатов, полученных в этом разделе, следует, что компонента суммарного давления, перпендикулярная магнитному полю, ни при каких физических условиях не может обращаться в нуль. Поэтому при гравитационном коллапсе экстремально намагниченной нейтронной звезды образование гибридной звезды или черной струны не вероятно.

6. СПИНОВЫЕ ЭФФЕКТЫ В СВЕРХСИЛЬНОМ ПОЛЕ

Из решений уравнения Дирака для электрона и формул для спектра энергий в постоянном и однородном магнитном поле следует (см., например, [4], [29]), что спин электрона в основном состоянии в однородном магнитном поле может быть ориентирован только против направления магнитного поля. Эта особенность приводит к тому, что вырожденный газ электронов при плотности n_e , удовлетворяющей неравенству $\sqrt{2}n_e/(3n_{0n}) < (B/B_0^*)^{3/2}$ в основном состоянии в однородном магнитном поле с $B_0^* \gg B \gg B_0$, должен быть полностью поляризованным по спину. Полностью поляризованным в поле с $B_0^* \gg B \gg B_0$ должен стать и рассматриваемый нами вырожденный газ нуклонов и электронов, химическое равновесие в котором поддерживается вышеупомянутыми урка-процессами.

Действительно, так как проекции спинов протона и нейтрона на направление магнитного поля в постоянном и однородном магнитном поле в основном состоянии имеют определенные значения, то, как нетрудно понять, вырожденные газы протонов и нейтронов (при определенных относительно невысоких плотностях, зависящих от величины магнитного поля) могут стать также полностью поляризованными в поле с $B_0^* \gg B \gg B_0$.

При этом, как было отмечено во введении, концентрации частиц в состоянии химического равновесия таковы, что электроны являются релятивистскими, а нуклоны — нерелятивистскими. Напомним, что нормированные плотности (концентрации) фермионов определяют, главным образом, их энергии Ферми.

Соответствующие выражения для плотностей, при которых рассматриваемые газы полностью поляризованы, нетрудно найти из формул (20) и (26). Учитывая, что энергии Ферми нуклонов при интересующих нас значениях плотностей определяются нерелятивистскими формулами, нетрудно показать, что для того чтобы вырожденный газ нейтронов в постоянном однородном магнитном поле с $B_0^* \gg B \gg B_0$ стал полностью поляризованным по спину, нормированная плотность нейтронов должна удовлетворять неравенству

$$\left(\frac{n_n}{n_{0n}} \right)^{\frac{2}{3}} < \frac{2M_n B}{m_n} \simeq 2 \frac{B}{B_0^*}.$$

Отсюда следует, что, например, при ядерных плотностях магнитное поле не должно превышать значений $B \simeq 10^{-3} B_0^*$.

Аналогично можно показать, что если нормированная плотность протонов удовлетворяет неравенству $(n_p/n_{0p})^{2/3} < 2B/B_0^*$, то протоны заполняют только низшее квантовое состояние в постоянном однородном магнитном поле, а вырожденный газ протонов должен стать полностью поляризованным по спину. Напомним, что в магнитном поле с $B_0^* \gg B \gg B_0$ равновесная плотность протонов существенно меньше n_n во всем интервале изменения плотности нейтронов, поэтому основной вклад в рассматриваемые эффекты дают нейтроны. На возможность спиновой поляризации нейтронного газа в сверхсильном магнитном поле указывали авторы работы [20].

Спиновая поляризация газов приводит к необходимости учета квантовых обменных взаимодействий. Так, для электронного газа этот учет приводит к поправке к давлению вырожденного электронного газа в сверхсильном однородном магнитном поле, обусловленной квантовыми обменными эффектами. В сверхсильном магнитном поле эта поправка приводит к слабому дополнительному взаимодействию, вызывающему отталкивание, в противоположность случаю в отсутствие магнитного поля, когда дополнительное взаимодействие вызывает притяжение. Поправка к плотности энергии и давлению вырожденного электронного газа в сверхсильном магнитном поле, обусловленная квантовыми обменными эффектами, имеет вид

$$E_{\text{exc}} = P_{\text{exc}} \approx -\frac{3e^2 n_0 m B^2}{8\pi^2 B_0^2} x^2 \ln \left(\frac{B_0}{B} \right).$$

Мы видим, что поправка положительна при $B \gg B_0$.

Если допустить, что квантовые обменные взаимодействия проявятся и могут стать существенными в достаточно плотном нейтронном газе, то результат их учета может оказаться более значительным. Можно даже ожидать возникновения спонтанной намагниченности в вырожденном плотном (но, что важно, не сверхплотном) нейтронном газе. На такую возможность указывают следующие грубые оценки. Рассмотрим нерелятивистский газ нейтронов как составляющую газа нуклонов и электронов и введем

концентрации нейтронов со спином вверх (n_+) и вниз (n_-):

$$n_+ = \frac{n(1+s)}{2}, \quad n_- = \frac{n(1-s)}{2}.$$

Нетрудно показать, что в терминах n_+ и n_- внутреннюю энергию газа (20) в магнитном поле индукции $\mathbf{B}$ в нерелятивистском приближении можно представить в следующем виде:

$$\mathcal{E}_n = \mathcal{E}_0[(1+s)^{\frac{5}{3}} + (1-s)^{\frac{5}{3}}] - nM_nBs, \quad (30)$$

где $\mathcal{E}_0 = 3n\mu_n/10$, а μ_n — химический потенциал вырожденного газа нейтронов при $B = 0$.

Обменное взаимодействие в вырожденном нерелятивистском газе нейтронов будем описывать феноменологически, аналогично описанию обменного взаимодействия электронов проводимости в металлах [33]. Предположим, что нейтроны с параллельными спинами взаимодействуют с энергией $-J < 0$, а энергия взаимодействия нейтронов с антипараллельными спинами равна нулю. Тогда с учетом такого (ферромагнитного) обменного взаимодействия внутренняя энергия газа нейтронов (30) определяется выражением

$$\mathcal{E}_n = \mathcal{E}_0[(1+s)^{\frac{5}{3}} + (1-s)^{\frac{5}{3}}] - \frac{Jn^2(1+s^2)}{4} - nM_nBs. \quad (31)$$

Найдем минимум выражения (31) относительно величины s и соответствующее этому минимуму равновесное значение s_{eq} :

$$\frac{d\mathcal{E}_n}{ds} = \frac{5}{3}\mathcal{E}_0[(1+s)^{\frac{2}{3}} - (1-s)^{\frac{2}{3}} - as - nM_nB] = 0, \quad (32)$$

где $a = 3Jn^2/(10\mathcal{E}_0) \equiv Jn/\mu_n$.

Если $a < 4/3$, то в предположении $s \ll 1$ нетрудно показать, что уравнение (32) имеет только один вещественный корень ($s_{\text{eq}} = 0$), и соответствующая этому значению намагниченность имеет вид

$$\mathcal{M}_n = -\frac{\partial\mathcal{E}_n(s_{\text{eq}})}{\partial B} = \frac{6nM_n^2B}{4\mu_n - 3Jn}. \quad (33)$$

Однако, если $a > 4/3$, то при $B = 0$ величина внутренней энергии в случае $s = 0$ неустойчива, а уравнение (32) имеет другие вещественные решения.

Если величина a немного превышает $4/3$ ($a \cong 4/3$), то в предположении $s \ll 1$ два вещественных (симметричных относительно точки $s = 0$) корни можно найти аналитически в следующем виде: $s_{\text{eq}} = \pm 3\sqrt{3(3a/4 - 1)}$. Как известно [33], если это соотношение имеет место, то ферромагнитное состояние ($s \neq 0$) будет иметь меньшую энергию, чем парамагнитное. Система, намагниченность которой определяется формулой (33), при $a > 4/3$ может обладать спонтанным магнитным моментом, т.е. обладает конечной намагниченностью даже при нулевом внешнем магнитном поле. Если, как и для системы электронов, константа J зависит от того, насколько перекрываются волновые функции нейтронов, то появления неустойчивости внутренней энергии нейтронов можно ожидать в достаточно плотном газе.

Обобщение этих выводов на рассматриваемый нами случай вырожденного газа нейтронов, по-видимому, возможно только в принципе, так как понятно, что в какой-то мере обоснованный результат можно получить, только включая в рассмотрение сильное взаимодействие между нейтронами. Вместе с этим можно ожидать, что формальное решение для намагниченности газа нейтронов все же может стать неустойчивым в достаточно плотном газе. Следовательно, возникновение спонтанной намагниченности в вырожденном достаточно плотном нейтронном газе, по-видимому, принципиально возможно.

Мы видим, что эффекты, обусловленные взаимодействием АММ нуклонов с сверхсильным магнитным полем, весьма значительны, так что полное описание состояния вещества в центральной области нейтронной звезды с необходимостью требует учета этих эффектов.

7. ОБРАЗОВАНИЕ μ^- - И π^- -МЕЗОНОВ

При высоких плотностях в идеальном газе нуклонов и электронов (*пре*-газ) возможно образование μ^- - и π^- -мезонов. Появление новых частиц может повлиять на общее уравнение состояния вещества. Так, при достаточно высокой плотности энергия Ферми релятивистских электронов может стать равной массе покоя m_μ μ -мезона и при столкновениях электронов с энергией, близкой энергии Ферми, станет возможным рождение μ -мезонов и пар нейтрино–антинейтрино. Следовательно, в рассматриваемом идеальном газе нуклонов и электронов может появиться некоторое число μ -мезонов. Напомним, что разрешена следующая схема распада μ -мезона: $\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$.

Рождение μ -мезонов и пар нейтрино–антинейтрино станет энергетически выгодным при столкновениях электронов с энергией $\sim m_\mu$, когда энергия Ферми электронов станет равной $\mathcal{E}_e \simeq m_\mu$. Если плотность газа превышает некоторое значение, то μ -мезоны и электроны будут в равновесии: $\mu^- \leftrightarrow e^-$. В химическом равновесии $\mu_\mu = \mu_e$. Равновесие между n , p и e означает, что $\mu_n = \mu_p + \mu_e$, а условие электронейтральности предполагает, что $n_p = n_e + n_\mu$.

Появление даже относительно малой примеси π^- -мезонов при очень высоких плотностях *пре* μ -газа ($n_n \sim 0.2n_{0n}$) в случае намагниченной нейтронной звезды оказывается достаточно интересным фактом, так как не совсем понятно, следует ли включать рожденные π^- -мезоны в модель идеального *пре* μ -газа в нормальной фазе с ненулевым давлением или π^- -мезоны при достижении некоторой критической плотности образуют бозе-конденсат, давление которого практически равно нулю. Вопрос тем более интересен, что, например, в ряде теоретических работ было показано, что бозе-конденсация в присутствии постоянного и однородного магнитного поля невозможна как для массивных электрически заряженных скалярных (см. [34]–[36]), так и для векторных (см. [37]) бозонов, в то время как в работе [38] утверждалось, что бозе-конденсация заряженных частиц с целым спином в постоянном и однородном магнитном поле может иметь место, но понятие критической температуры отсутствует. Разумеется, при очень высоких плотностях *пре* μ -газа возможно появление малой примеси нейтральных K^0 - и π^0 -мезонов, условия конденсации которых не отличаются от условий в отсутствие ма-

гнитного поля.

Рассмотрим, как пример, условия появления π^- -мезонов в реакции $n \longrightarrow p + \pi^-$ в замагниченном идеальном *пре*-газе. Сильным взаимодействием между нуклонами и рожденными π^- -мезонами пренебрегаем. Эта реакция станет возможной в сверхплотном идеальном *пре*-газе, когда энергия Ферми электронов превысит массу покоя m_π π -мезона. Следовательно, в таком газе может появиться некоторое число π -мезонов. Из условий химического равновесия следует выполнение равенств $\mu_n - \mu_p = \mu_e = \mu_\pi$, $\mu_e = \mu_\mu$, а из условия электронейтральности – равенства $n_e + n_\mu + n_\pi = n_p$.

Оценим минимальную плотность идеального *пре*-газа в сверхсильном магнитном поле, при которой могут появиться μ - и π -мезоны. Электроны в состоянии химического равновесия вырожденного идеального *пре*-газа в сверхсильном магнитном поле будут заполнять низший уровень энергии только при относительно невысоких плотностях таких, что нормированная плотность числа протонов (электронов) n_p/n_{0n} удовлетворяет неравенству

$$\left(\frac{n_p}{n_{0n}}\right) < \frac{3}{\sqrt{2}} \left(\frac{B}{B_0^*}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Энергия Ферми электронов как функция нормированной плотности числа нейтронов (n_n/n_{0n}) в состоянии химического равновесия идеального *пре*-газа в сверхсильном магнитном поле с $B_0^* \gg B \gg B_0$ меньше соответствующей энергии Ферми в отсутствие поля до тех пор, пока нормированная плотность числа протонов (электронов) n_p/n_{0n} не достигнет значения

$$\left(\frac{n_p}{n_{0n}}\right)_{\text{сг}} = \left(\frac{3B}{2B_0^*}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

При одинаковых значениях нормированной плотности числа нейтронов (в поле и без поля) пороговое значение плотности числа электронов в сверхсильном магнитном поле, при которой появляются μ -мезоны, выше, чем в отсутствие поля. Заметим, что при реалистических значениях $B \sim 2 \cdot 10^{-3} B_0^* = 4.6 \cdot 10^{17}$ Гс вклад в пороговую энергию Ферми электронов, необходимую для рождения мюонов, дают достаточно много уровней энергии (~ 10). При этом пороговая плотность числа электронов в поле $B \sim 2 \cdot 10^{-3} B_0^*$ по нашей оценке превышает соответствующую пороговую плотность электронов в отсутствие поля, равную $n_p(B)|_{B=0} = 0.013 n_n(B)|_{B=0}$ (см. [17]), всего в 1.1 раза. Пороговая нормированная плотность числа нейтронов, при которой появляются мюоны в магнитном поле с $B \sim 2 \cdot 10^{-3} B_0^*$, естественно, совпадает с соответствующей плотностью в отсутствие поля (n_n/n_{0n}) ~ 0.11 .

Пороговое же значение плотности числа электронов, при которой появляются π -мезоны в сверхсильном магнитном поле с $B \sim 2 \cdot 10^{-3} B_0^*$, превышает соответствующую пороговую плотность электронов в отсутствие магнитного поля только в 1.01 раза. Отметим, что при $B \sim 2 \cdot 10^{-3} B_0^*$ вклад в энергию Ферми электронов, равную m_π , дают приблизительно 80 электронных уровней. Пороговая нормированная плотность числа нейтронов, при которой появляются пионы в магнитном поле с $B \sim 2 \cdot 10^{-3} B_0^*$, совпадает с соответствующей плотностью в отсутствие поля $n_n/n_{0n} \sim 0.22$. В магнитном поле с $B < 2 \cdot 10^{-3} B_0^*$ значения всех обсуждаемых здесь физических величин практически

совпадают с их значениями в отсутствие поля. Следовательно, магнитное поле с индукциями вплоть до $B \sim 2 \cdot 10^{-3} B_0^*$ почти не влияет на обсуждаемые эффекты. Влияние магнитного поля станет существенным уже при $B \sim 2 \cdot 10^{-2} B_0^*$. При этом пороговая плотность числа электронов в таком поле должна превышать соответствующую пороговую плотность электронов в отсутствие поля почти в 4 раза (для появления мюонов) и в 1.4 раза (для появления пионов). При $B_0^* > B > B_0(m_\mu/m)$ μ -мезоны будут заполнять только низший уровень энергии.

Нелишне напомнить, что в основном состоянии пионы в конденсате должны иметь нулевую кинетическую энергию. Вследствие этого плотность числа электронов и давление остаются постоянными при увеличении n_n . Следовательно, увеличение плотности пионов должно приводить к увеличению плотности полной внутренней энергии газа, но не давления. В результате для некоторого фиксированного значения n_n давление в конденсированной фазе должно быть всегда меньше, чем в неконденсированной фазе.

8. ОБСУЖДЕНИЕ

Макроскопическое намагниченное тело в сильном магнитном поле будет находиться в состоянии механического равновесия, если все компоненты полного тензора напряжений вещества и электромагнитного поля скомпенсированы соответствующими компонентами тензора напряжений гравитационной силы. Это понятие стабильности, означающее, что система устойчива, если все действующие напряжения скомпенсированы, восходит к работам Пуанкаре. Соответствующие этому понятию условия называют идеальными условиями стабильности Пуанкаре (the perfect Poincaré stability conditions) [39]. Эти условия, по-видимому, можно принять в качестве условий механической стабильности макроскопического тела, так как в правую часть уравнений гравитации входит полный тензор напряжений вещества и электромагнитного поля.

Тогда, как мы показали выше, только одна компонента полного тензора напряжений, определяющая суммарное (за исключением гравитационного) давление вдоль вектора индукции магнитного поля, действительно могла бы стать исчезающе малой, однако это могло произойти только в таком сверхсильном магнитном поле, существование которого даже в центральной области сильно намагниченной нейтронной звезды не удовлетворяло бы условию стабильности звезды данной массы, вытекающему из теоремы вириала. Поэтому превращение намагниченной нейтронной звезды в результате коллапса в сжатый сфероид крайне маловероятно.

Заметим, что в научной литературе при обсуждении и применении условий равновесия макроскопических тел обычно имеются в виду сферически-симметричные изотропные астрофизические объекты. Для таких тел эти условия определяются скалярной теоремой вириала. Если же конфигурация электромагнитных полей и распределение вещества в макроскопическом теле не обладают указанными выше свойствами симметрии, то, на наш взгляд, следует использовать идеальные условия стабильности Пуанкаре, которые для изотропного сферического тела сводятся к условиям, вытекающим из скалярной теоремы вириала.

В разделе 6 мы показали, что механизм возникновения “вмороженного” в нейтрон-

ную звезду магнитного поля, по-видимому, можно связать со спонтанной намагниченностью вырожденного плотного нейтронного газа, обусловленной квантовыми обменными взаимодействиями свободных (т.е. не локализованных в пространстве) нейтронов. Такая квантово-механическая система фермионов с достаточно сильным обменным взаимодействием может обладать спонтанным магнитным моментом, т.е. конечная намагниченность в ней может возникать в отсутствие внешнего магнитного поля [33].

Обратным этому случаю является случай связанных состояний нейтронов, имеющий сходство с моделью Гейзенберга с “локализованными” спинами. Интересно, что равновесное состояние вещества в центральной области нейтронной звезды с нулевым внешним магнитным полем, по-видимому, является хорошим примером и этой квантовой системы. Связанные (локализованные) состояния нейтрона могут появиться при учете взаимодействия АММ нейтрона с фоновым электрическим полем протонов и электронов в центральной области нейтронной звезды. Действительно, предполагают (см., например, [40]), что сферическая центральная область нейтронной звезды заполнена (считаем, что однородно) находящимися в химическом равновесии нейтронами, протонами и относительно небольшим количеством электронов; основная часть электронов в данной модели находится в оболочке этой сферы. Заметим, что для выполнения условия электронейтральности полные числа электронов и протонов должны быть одинаковы, однако, по-видимому, внутри сферы может находиться не более 0.1 полного числа электронов [40].

Если мы предположим, что электрическое поле генерируется протонами, распределенными однородно внутри сферы, то нетрудно показать, что его напряженность должна возрастать с ростом r по закону $E(r) = br$. Плотность электрического заряда протонов en_p , генерирующих это поле, постоянна и определяет константу b соотношением $b = 4\pi en_p/3$. Внутри сферы напряженность электрического поля имеет вид

$$E = \frac{4e^2 B_0^*}{9\pi} \left(\frac{n_p}{n_{0p}} \right) m_p r,$$

где $B_0^* = m_p^2/e$, а $n_{0p} = m_p^3/3\pi^2$.

Взаимодействие нейтрона, обладающего статическим (спиновым) магнитным дипольным моментом, с электрическим полем напряженности $E = br$ было рассмотрено в работе [41] на основе уравнения Дирака–Паули. В частности, в [41] было показано, что дискретный спектр энергий нейтрона зависит от проекции спина (на вектор момента импульса), причем низший уровень энергии нейтрона в электрическом поле $E = br$ вырожден со счетной бесконечной кратностью, а спин нейтрона ориентирован против сохраняющегося вектора момента импульса $\mathbf{J}$.

Громадное вырождение в системе, содержащей большое число нейтронов, можно снять, если учесть обменное взаимодействие между нейтронами. В рамках модели Гейзенберга–Дирака со строгой локализацией спинов $\mathbf{S}_j$ в предположении, что существенную роль играет только обменное взаимодействие между ближайшими спинами, гамильтониан системы записывается в виде [42]

$$\mathcal{H} = A \sum_j \mathbf{S}_j \cdot \mathbf{S}_{j+1}.$$

Если $A < 0$, то такая модель с бесконечным числом частиц имеет сходство с гейзенберговским ферромагнетиком. В такой модели спонтанное нарушение симметрии приводит к возникновению спонтанной намагниченности.

Оценим величину магнитного поля на поверхности нейтронной звезды, предполагая, что возникновение такого “вмороженного” магнитного поля полностью обусловлено спонтанной намагниченностью вырожденных нейтронов в центральной области нейтронной звезды. Обычно предполагается, что магнитное поле нейтронной звезды есть поле магнитного диполя, так что величину магнитной индукции на поверхности звезды можно оценить по формуле $|\mathbf{B}| = |\mu_s|/R^3$, где μ_s – магнитный момент (точечного) диполя, R – радиус звезды. Считаем, что вклад в магнитный момент нейтронной звезды дают только “холодные” вырожденные нейтроны в основном состоянии, так что магнитный момент нейтронной звезды, возникающий вследствие спонтанной намагниченности, можно оценить по формуле $\mu_s = \mu_n n_n$, где $\mu_n = |e|\hbar/(2m_p c) = 5.051 \cdot 10^{-24}$ эрг/Гс – ядерный магнетон, а n_n – число нейтронов в центральной области нейтронной звезды.

Используя оценки для плотности нейтронов в центральной области стабильной нейтронной звезды, а также для массы и радиуса звезды, приведенные в [17]:

$$M \approx M_\odot = 2 \cdot 10^{33} \text{ г}, \quad R \approx 2 \cdot 10^6 \text{ см}, \quad \rho(0) \approx 0.1 \rho_{\text{cr}},$$

$$\rho_{\text{cr}} = \frac{8\pi m_n^4 c^4}{3(2\pi\hbar)^3} = 6.11 \cdot 10^{15} \text{ г/см}^3,$$

и считая, что масса центральной области звезды равна $0.1M$ и, значит, $n_n \approx 2 \cdot 10^{56}$, а $\mu_s \approx 5 \cdot 10^{32}$ эрг/Гс, для величины магнитной индукции на поверхности нейтронной звезды получим $|\mathbf{B}| \approx 6 \cdot 10^{13}$ Гс. Эта оценка хорошо согласуется с оценками, полученными на основе данных астрофизических наблюдений [1]–[3].

Список литературы

- [1] *J. Trümper, W. Pietsch, C. Reppin et al.* Astrophys. J. Lett. 1978. V. 219. P. L105.
- [2] *W. A. Wheaton, J. P. Doty, F. A. Primini et al.* Nature. 1979. V. 282. P. 240.
- [3] *A. E. Delsante, N. E. Frankel.* Phys. Rev. D. 1979. V. 20. P. 1795.
- [4] *И. М. Тернов, О. Ф. Дорофеев.* ЭЧАЯ. 1994. Т. 25. С. 1.
- [5] *R. C. Duncan, C. Thompson.* Astrophys. J. Lett. 1992. V. 392. P. L9; *C. Thompson, R. C. Duncan.* Astrophys. J. 1996. V. 473. P. 322.
- [6] *R. C. Duncan.* Physics in ultra-strong magnetic fields. astro-ph/0002442.
- [7] *C. Kouveliotou et al.* Nature. 1998. V. 393. P. 235.
- [8] *K. Hurley et al.* Nature. 1999. V. 397. P. 41.
- [9] *С. Шапиро, С. Тююколски.* Черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды. М.: Мир, 1985.
- [10] *D. Lai, S. Shapiro.* Astrophys. J. Lett. 1991. V. 383. P. L745.
- [11] *V. Canuto, H.-Y. Chiu.* Phys. Rev. 1968. V. 173. P. 1210; P. 1220; P. 1229.
- [12] *J. Daicic, N. E. Frankel, R. M. Gailis, V. Kowalenko.* Phys. Rep. 1994. V. 237. P. 63.
- [13] *C.-L. Ho, V. R. Khalilov, C. Yang.* Mod. Phys. Lett. B. 1996. V. 10. P. 1141.
- [14] *S. Chakrabarty.* Phys. Rev. D. 1995. V. 51. P. 4591.
- [15] *S. Chakrabarty, D. Bandyopadhyay, S. Pal.* Phys. Rev. Lett. 1997. V. 78. P. 2898.
- [16] *R. Kippenhahn, A. Weigert.* Stellar Structure and Evolution. Berlin–Heidelberg: Springer, 1994.

- [17] *C. Вейнберг*. Гравитация и космология. М.: Мир, 1975.
- [18] *J. M. Lattimer et al.* Phys. Rev. Lett. 1991. V. 66. P. 2701.
- [19] *G. S. Bisnovatyi-Kogan*. Astron. Astrophys. Trans. 1993. V. 3. P. 287.
- [20] *A. Broderick, M. Prakash, J. M. Lattimer*. Astrophys. J. 2000. V. 537. P. 351.
- [21] *In Saeng Suh, G. J. Mathews*. Cold ideal equation of state for strongly magnetized neutron-star matter. astro-ph/9912301.
- [22] *A. P. Martínez, H. P. Rojas, H. J. M. Cuesta*. Magnetic collapse of a neutron gas: no magnetar formation. hep-ph/0011399.
- [23] *J. Madsen*. Phys. Rev. Lett. 1998. V. 81. P. 3311.
- [24] *S. A. Hayward*. Gravitational waves, black holes and cosmic strings in cylindrical symmetry. gr-qc/9909070.
- [25] *И. М. Тернов, В. Г. Багров, В. Ч. Жуковский*. Вестн. Моск. ун-та. Физика. Астрономия. 1966. № 4. С. 21.
- [26] *Ю. М. Лоскутов, В. П. Левентуев*. Вестн. Моск. ун-та. Физика. Астрономия. 1970. № 5. С. 554; Изв. вузов. Физика. 1969. № 6. С. 152.
- [27] *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц*. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Наука, 1974.
- [28] *J. Schwinger*. Phys. Rev. Lett. 1948. V. 73. P. 416L; Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1951. V. 37. P. 152; P. 455.
- [29] *I. M. Ternov et al.* J. Phys. A. 1978. V. 11. P. 739; *V. R. Khalilov*. Electrons in Strong Electromagnetic Fields. Amsterdam: Gordon & Breach, 1996.
- [30] *В. Ч. Жуковский, П. Г. Мудодашвили, П. А. Эминов*. Вестн. Моск. ун-та. Физика. Астрономия. 1985. № 3. С. 8; *И. М. Тернов, В. Ч. Жуковский, П. Г. Мудодашвили, П. А. Эминов*. ЯФ. 1986. Т. 43. С. 764.
- [31] *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц*. Статистическая физика. Ч. 1. М.: Наука, 1976.
- [32] *M. Chaichian, S. Masood, C. Montonen, A. Pérez Martínez, H. Pérez Rojas*. Phys. Rev. Lett. 2000. V. 84. P. 5261.
- [33] *Ч. Куттель*. Введение в физику твердого тела. М.: Наука, 1978.
- [34] *M. R. Schafroth*. Phys. Rev. 1955. V. 100. P. 463.
- [35] *R. M. May*. Phys. Rev. 1959. V. 115. P. 254.
- [36] *D. J. Toms*. Phys. Rev. D. 1995. V. 51. P. 1886; P. 1895.
- [37] *V. R. Khalilov, C. L. Ho*. Phys. Rev. D. 1999. V. 60. P. 033003.
- [38] *H. P. Rojas*. Phys. Lett. B. 1996. V. 379. P. 148.
- [39] *I. Bialynicki-Birula*. On the stability of solitons. In: Nonlinear Problems in Theoretical Physics. Ed. A. F. Ranada. Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1979. P. 15.
- [40] *В. М. Липунов*. Астрофизика нейтронных звезд. М.: Наука, 1987.
- [41] *В. Р. Халилов*. ТМФ. 2001. Т. 126. С. 427.
- [42] *R. P. Feynman*. Statistical Mechanics. Massachusetts: Benjamin, 1972.

Поступила в редакцию 14.V.2001 г.,
после доработки 7.VII.2001 г.