Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Б. Литинский, Модель Хопфилда с динамическим порогом, *ТМФ*, 2002, том 130, номер 1, 159–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf297>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 15:42:45

© 2002 г.

Л. Б. Литинский*

МОДЕЛЬ ХОПФИЛДА С ДИНАМИЧЕСКИМ ПОРОГОМ

Исследована зависимость результата обучения нейронной сети в модели Хопфилда от величины динамического порога H . Получены строгие результаты, связывающие качество обучения с величиной порога.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] изучалась задача максимизации квадратичного по *спиновым переменным* $\sigma_i = \{\pm 1\}$ функционала

$$F(\vec{\sigma}) = \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n J_{ij} \sigma_i \sigma_j \rightarrow \max, \quad J_{ij} = J_{ji}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

с матрицей связей $\mathbf{J} = (J_{ij})$ специального вида. Для объяснения специфики этой матрицы и причин, по которым она была рассмотрена, необходимы некоторые пояснения.

С точки зрения максимизации функционала (1) произвольную вещественную симметричную матрицу $\mathbf{J}$ всегда можно представить в виде [1]

$$\mathbf{J} = \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{S}, \quad (2)$$

где $\mathbf{S}$ — вещественная $(p \times n)$ -матрица, p — ранг матрицы $\mathbf{J}$, а $\mathbf{S}^T$ — матрица, транспонированная к $\mathbf{S}$. Когда все элементы матрицы $\mathbf{S}$ равны $\{\pm 1\}$, в теории нейронных сетей ее n -мерные строки трактуются как p исходных образов (*memorized patterns*), предъявленных сети для обучения по правилу Хебба (2), а задача (1), (2) называется моделью Хопфилда. Эта модель является одной из базовых в теории нейронных сетей, поскольку матрица связей Хебба имеет глубокое нейрофизиологическое обоснование. Отметим, что ее матричные элементы целочисленны (а диагональные, вообще говоря, равны нулю, но для максимизации функционала (1) это значения не имеет).

Множество неподвижных точек сети, или, что то же самое, множество локальных максимумов функционала (1), трактуется как результат обучения сети по предъявленному набору исходных образов: поскольку эволюция сети из произвольной начальной

*Институт физики высоких давлений РАН, Троицк, Московская обл., Россия.
E-mail: litin@hppi.troitsk.ru

конфигурации $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ прекращается в ближайшем к $\vec{\sigma}$ локальном максимуме, такие конфигурации представляют собой “память” сети. Желательный результат – чтобы единственными неподвижными точками были сами исходные образы – имеет место только при $p \leq 2$. Для $p > 2$ правило Хебба не только приводит к появлению ненужных неподвижных точек, но не гарантирует даже, что исходные образы непременно будут неподвижными точками. Для того чтобы исправить положение, не отказываясь от правила Хебба, развита теория *дообучения* сети [2]–[4]: начиная с матрицы Хебба и постепенно перестраивая ее матричные элементы, добиваются того, чтобы все исходные образы стали неподвижными точками. После дообучения заданным набором неподвижных точек обладает сеть с действительной симметричной матрицей связей, которая порождена правилом Хебба.

В работе [1] была рассмотрена задача (1), (2) с $(p \times n)$ -матрицей исходных образов

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1-x & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1-x & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где x – произвольное вещественное число. Вообще говоря, такая матрица $\mathbf{S}$ порождает действительную матрицу связей. Это не должно нас смущать, поскольку действительная матрица связей так или иначе возникает в модели Хопфилда (см. выше). Если же в соответствии с нейронной традицией отнестись к строкам матрицы $\mathbf{S}$ как к (обобщенным) исходным образам, то возникает нетривиальная содержательная задача: *сеть пытались обучить по правилу Хебба p предъявлениями вектора-эталона*

$$\vec{\varepsilon}(n) = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n,$$

однако в процесс обучения вкрались ошибки и на деле сеть обучили p искаженными экземплярами вектора-эталона:

$$\vec{s}^{(l)} = (1, \dots, 1, \underbrace{1-x}_l, 1, \dots, 1), \quad l = 1, 2, \dots, p.$$

Естественно назвать величину x *параметром искажения* и посмотреть, как результат обучения сети зависит от x . Эту задачу удалось решить аналитически, описав зависимость множества локальных максимумов функционала (1) от параметра искажения. Содержательная интерпретация полученных результатов выявляет у рассмотренной модели нетривиальные черты “человекоподобного” поведения. В частности, здесь моделируется имманентное человеческому восприятию свойство узнавать эталон по его зашумленным изображениям только до тех пор, пока искажения не превосходят некоторое критическое значение; если же искажения это критическое значение превзойдут, предъявленные образцы воспринимаются сетью как искаженные изображения совсем другого эталона (подробнее см. [1]).

Физика доставляет по меньшей мере две содержательные интерпретации задачи (1)–(3) – модель Изинга в теории магнетизма и модель решеточного газа в теории жидкости [5]. Интерпретация полученных результатов в терминах модели Изинга будет

дана в отдельной публикации. Здесь лишь отметим, что в термодинамическом пределе формализм (1)–(3) дает описание спиновой системы, состоящей из двух подсистем (в приближении среднего поля). При этом взаимодействия внутри одной подсистемы всегда ферромагнитны, а взаимодействия внутри второй подсистемы и перекрестные взаимодействия между подсистемами могут иметь произвольные знаки. Данная модель описывает магнитные свойства аморфных сплавов редкоземельных металлов с 3d-металлами в приближении бесконечного радиуса взаимодействия [6].

Все это заставляет отнести к простой, в сущности, модели (1)–(3) более внимательно и постараться ее обобщить. В частности, уже в работе [1] удалось избавиться от того ограничения, что у исходных образов $\vec{s}^{(l)}$ искажается всякий раз только одна координата. Вращение набора исходных образов как целого перепутывает их координаты, и все p координат у всех исходных образов оказываются искаженными. На эту ситуацию обобщаются все полученные для основной модели (1)–(3) результаты.

Можно избавиться и от того ограничения модели (1)–(3), что все искажения одинаковы. В подготавливаемой к печати работе изучен случай искажений $x^{(l)}$, $l = 1, 2, \dots, p$, различных у *всех* векторов $\vec{s}^{(l)}$. В порядке анонсирования приведем основной полученный при этом результат.

Без ограничения общности искажения можно упорядочить по убыванию:

$$x^{(1)} \geq x^{(2)} \geq \dots \geq x^{(p^{(+)})} > 0 > \dots \geq x^{(p)}.$$

Пусть $p^{(+)}$ – число положительных искажений. Тогда оказывается, что, во-первых, глобальный максимум функционалу (1) может доставлять только один из конфигурационных векторов

$$\vec{\sigma}^*(k) = (\underbrace{-1, \dots, -1}_k, 1, \dots, 1), \quad k = 0, 1, \dots, k_{\max}, \quad k_{\max} = \min\left(p^{(+)}, \left\lceil \frac{n+p+2}{4} \right\rceil\right).$$

Во-вторых, для того чтобы конфигурационный вектор $\vec{\sigma}^*(k)$ доставлял глобальный максимум, необходимо и достаточно выполнения неравенств

$$x^{(k+1)} - \frac{\sum_{i=1}^k x^{(i)} - \sum_{j=k+2}^p x^{(j)}}{n-2k-1} < p < x^{(k)} - \frac{\sum_{i=1}^{k-1} x^{(i)} - \sum_{j=k+1}^p x^{(j)}}{n-2k+1}.$$

В обычно анализируемой асимптотике $n \gg p$ последние неравенства приобретают гораздо более простой вид:

$$x^{(k+1)} < p < x^{(k)}.$$

Содержательная интерпретация этих результатов достаточно интересна.

В настоящей работе задача (1)–(3) обобщается на случай, когда максимизируемый функционал имеет вид

$$F(\vec{\sigma}, x, H) = \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n J_{ij} \sigma_i \sigma_j + 2H \sum_{i=1}^n \sigma_i. \quad (4)$$

Линейный по σ_i член функционала (4) означает, что при задании динамики сети используется *ненулевой порог* H (подробнее см. раздел 3). В теоретических работах порог

обычно используют для устранения линейного члена, который по тем или иным причинам иногда возникает в максимизируемом функционале (см. [7]). В то же время численные эксперименты показывают, что варьированием порогов можно весьма существенно влиять на результат обучения сети [8]–[11]. Мы получим простое аналитическое выражение, связывающее качество обучения с величиной порога H . В разделе 2 для задачи (2)–(4) получаются основные результаты, которые затем обсуждаются в разделе 3. Математические доказательства, несущественные для понимания структуры решения, вынесены в приложения.

Обозначения. Используя физическую терминологию, будем называть *конфигурационными* векторы

$$\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n), \quad \sigma_i = \{\pm 1\}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

задающие 2^n конфигураций, среди которых ищется решение задачи. Конфигурационный вектор, доставляющий функционалу глобальный максимум, будем называть *основным состоянием*. Везде ниже n – число спиновых переменных, p – число исходных образов, а $q = n - p$. Квадратные скобки означают взятие целой части от заключенного в них выражения. Векторы снабжаются стрелкой сверху, а матрицы обозначаются полужирными прописными латинскими буквами.

2. ФУНКЦИОНАЛ С НЕНУЛЕВЫМ ПОРОГОМ

2.1. Основной формализм.

2.1.1. Используя выражения (2) и (3), легко получить, что

$$\sum_{i,j=1}^n J_{ij} \sigma_i \sigma_j = \sum_{j=1}^p \left(\sum_{i=1}^n \sigma_i - x \sigma_j \right)^2 = p \left(\sum_{i=1}^n \sigma_i \right)^2 - 2x \sum_{i=1}^n \sigma_i \sum_{j=1}^p \sigma_j + px^2. \quad (5)$$

Следовательно, при фиксированных x и H значение функционала (4) полностью определяется двумя суммами $\sum_{j=1}^p \sigma_j$ и $\sum_{i=1}^n \sigma_i$. Первая сумма может принимать только $p+1$ различных значений:

$$\sum_{j=1}^p \sigma_j = p - 2k, \quad k = 0, 1, \dots, p,$$

а вторая сумма – только $(p+1)(q+1)$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sigma_i &= \sum_{i=1}^p \sigma_i + \sum_{j=p+1}^{n=p+q} \sigma_j = (p - 2k) + (q - 2l) = n - 2(k + l), \\ k &= 0, 1, \dots, p, \quad l = 0, 1, \dots, q. \end{aligned}$$

Следовательно, на любом векторе $\vec{\sigma}$, у которого среди первых p координат ровно k равны -1 , а среди последних q координат ровно l равны -1 , функционал (4) принимает одно

и то же значение. Иными словами, все множество 2^n конфигурационных векторов распадается на $(p+1)(q+1)$ классов

$$\Sigma_{k,l} = \left\{ \vec{\sigma}: \sum_{i=1}^p \sigma_i = p - 2k, \sum_{j=p+1}^n \sigma_j = q - 2l \right\}, \quad k = 0, 1, \dots, p, \quad l = 0, 1, \dots, q,$$

на которых значение максимизируемого функционала постоянно. Опуская в (5) квадратичный по x член (общий для значений функционала на любом $\vec{\sigma}$) и вводя вместо H параметр

$$h = H \frac{n}{p}, \quad (6)$$

получаем, что при фиксированных x и h максимизация функционала (4) сводится к отысканию наибольшего значения среди величин

$$L_{k,l}(x, h) = (n - 2(k+l))^2 - 2 \frac{x}{p} (n - 2(k+l))(p - 2k) + 2h(n - 2(k+l)), \quad (7)$$

$$k = 0, 1, \dots, p, \quad l = 0, 1, \dots, q.$$

Как функции x и h , величины $L_{k,l}(x, h)$ представляют собой двухпараметрическое семейство плоскостей. Там, где плоскость $L_{k,l}(x, h)$ мажорирует все остальные плоскости, основное состояние принадлежит классу $\Sigma_{k,l}$ и является $C_p^k C_q^l$ раз вырожденным.

2.1.2. Перепишем выражение (7) несколько иначе:

$$L_{k,l}(x, h) = L_{k,l}(x, 0) + 2h(n - 2(k+l)), \quad (8)$$

где

$$L_{k,l}(x, 0) = (n - 2(k+l))^2 - 2 \frac{x}{p} (n - 2(k+l))(p - 2k) \quad (9)$$

представляет собой значение функционала $F(\vec{\sigma}, x, 0)$ на векторе $\vec{\sigma} \in \Sigma_{k,l}$ (с точностью до несущественных множителей и слагаемых). Легко видеть, что имеет место тождество

$$L_{k,l}(x, h) \equiv L_{p-k, q-l}(x, -h) \quad \forall k, l, \quad (10)$$

из которого следует, в частности, что

$$L_{k,l}(x, 0) \equiv L_{p-k, q-l}(x, 0) \quad \forall k, l. \quad (11)$$

Последнее равенство есть формальная запись того общеизвестного факта, что любое значение функционала $F(\vec{\sigma}, x, 0)$ по крайней мере дважды вырождено: $F(\vec{\sigma}, x, 0) \equiv F(-\vec{\sigma}, x, 0)$, и если вектор $\vec{\sigma}$ принадлежит классу $\Sigma_{k,l}$, то вектор $-\vec{\sigma}$ принадлежит классу $\Sigma_{p-k, q-l}$. С помощью выражений (8), (10) и (11) легко понять, как это вырождение снимается при “включении” h ($h \neq 0$):

$$\begin{array}{ccc} & \nearrow & \\ L_{k,l}(x, h) & = & L_{k,l}(x, 0) + 2h(n - 2(k+l)), \\ & \searrow & \\ F(\vec{\sigma}, x, 0) & & \parallel \\ & \nearrow & \\ L_{p-k, q-l}(x, h) & = & L_{p-k, q-l}(x, 0) - 2h(n - 2(k+l)). \end{array} \quad (12)$$

Иначе говоря, дважды вырожденное при $h = 0$ значение функционала расщепляется на два значения, одно из которых с изменением h возрастает, а другое убывает. Поскольку мы занимаемся максимизацией функционала (4), всегда в дальнейшем нас будет интересовать только то из двух значений, которое с изменением h возрастает.

2.1.3. В дальнейших построениях центральная роль принадлежит классам векторов $\Sigma_{k,0}$. Кроме того, именно в терминах этих классов описывается зависимость основного состояния функционала от x в случае, когда порог равен нулю. Ввиду особой важности классов $\Sigma_{k,0}$ и величин $L_{k,0}$ введем для них более простые обозначения, опустив равные нулю значения второго индекса:

$$\Sigma_k \equiv \Sigma_{k,0}, \quad L_k(x, h) \equiv L_{k,0}(x, h).$$

В настоящем пункте собраны сведения о зависимости основного состояния функционала $F(\vec{\sigma}, x, 0)$ от параметра x .

В работе [1] установлено, что основное состояние системы (1)–(3) может принадлежать только одному из классов Σ_k . На этих классах векторов значение функционала $F(\vec{\sigma}, x, 0)$ постоянно и может быть приведено к виду

$$L_k(x, 0) = (n - 2k)^2 - 2\frac{x}{p}(n - 2k)(p - 2k), \quad k = 0, 1, \dots, p. \quad (13)$$

Как функции от x , величины $L_k(x, 0)$ представляют собой однопараметрическое семейство прямых. Там, где прямая $L_k(x, 0)$ мажорирует все остальные прямые, основное состояние принадлежит классу Σ_k и является C_p^k раз вырожденным. Взаимное расположение прямых $L_k(x, 0)$ таково, что справедлива

ТЕОРЕМА 1. *По мере изменения x от $-\infty$ до ∞ основное состояние функционала $F(\vec{\sigma}, x, 0)$ последовательно принадлежит классам векторов*

$$\Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_{k_{\max}}, \quad k_{\max} = \min\left(p, \left\lceil \frac{n + p + 2}{4} \right\rceil\right). \quad (14)$$

Перестройки основного состояния из класса Σ_{k-1} в класс Σ_k происходят в точках x_k пересечения прямых $L_{k-1}(x, 0)$ и $L_k(x, 0)$:

$$x_k = p \frac{n - (2k - 1)}{n + p - 2(2k - 1)}, \quad k = 1, 2, \dots, k_{\max}. \quad (15)$$

Номер $k_{\max}$ последней перестройки основного состояния (которая произойдет при неограниченном увеличении x) зависит от соотношения между p и n :

$$k_{\max} = \begin{cases} p, & \text{если } \frac{p-1}{n-1} < \frac{1}{3}, \\ \left\lceil \frac{n+p+2}{4} \right\rceil < p, & \text{если } \frac{p-1}{n-1} > \frac{1}{3}. \end{cases} \quad (16)$$

В приложении 1 показано, что справедлива следующая

ЛЕММА. А. Для $k_{\max}$ выполняются неравенства

$$\left\lfloor \frac{p+1}{2} \right\rfloor \leq k_{\max} \leq \frac{n}{2}. \quad (17)$$

Б. Пусть $x \in (x_k, x_{k+1})$ и, следовательно, номер основного состояния функционала $F(\vec{\sigma}, x, 0)$ равен k . Тогда на интервале $x \in (x_k, x_{k+1})$ для всякого $k' < k$ справедливо

$$L_{k'}(x, 0) > L_{k'-1}(x, 0).$$

Последнее утверждение означает, что на интервале (x_k, x_{k+1}) все прямые $L_{k'}(x, 0)$ с номерами, не превосходящими номер k основного состояния, мажорируют одна другую по мере убывания их номеров. Эта лемма потребуется нам в дальнейшем.

2.2. Ненулевой порог h . В силу тождества (10) случай $h < 0$ легко сводится к случаю $h > 0$. Поэтому подробно рассмотрим только случай $h > 0$.

2.2.1. Положим $h = 0$ и зафиксируем некоторое значение x . Оно принадлежит одному из интервалов (x_k, x_{k+1}) , на которые точки (15) разбивают ось абсцисс. Основное состояние функционала $F(\vec{\sigma}, x, 0)$ имеет номер k , и, следовательно,

$$L_k(x, 0) > L_{k', l'}(x, 0) \quad \forall k', l'.$$

Как только h начинает расти, глобальный максимум функционала расщепляется:

$$\begin{array}{ccc} & \nearrow & \\ L_k(x, 0) & & L_{k,0}(x, h) = L_k(x, h) = L_k(x, 0) + 2h(n-2k), \\ & \searrow & \\ & & \parallel \\ & & L_{p-k,q}(x, h) = L_{p-k,q}(x, 0) - 2h(n-2k). \end{array} \quad (18)$$

Из правой части неравенства (17) следует, что $n - 2k \geq 0$. Следовательно, именно с величиной $L_k(x, h)$ из (18) необходимо сравнивать различные величины

$$L_{k', l'}(x, h) = L_{k', l'}(x, 0) + 2h(n - 2(k' + l')),$$

а о величине $L_{p-k,q}(x, h)$ можно забыть. Очевидно, что догнать величину $L_k(x, h)$ за счет увеличения h могут только такие $L_{k', l'}(x, h)$, у которых коэффициент при h превосходит $n - 2k$, т.е. у которых

$$k' + l' < k. \quad (19)$$

В приложении 2 показано, что из рассмотрения можно исключить величины $L_{k', l'}(x, h)$ с отличными от нуля значениями второго индекса l' . Следовательно, с величиной $L_k(x, h)$ необходимо сравнить только величины $L_{k'}(x, h)$ с номерами $k' < k$.

Заметим, что если $x < x_1 = p(n-1)/(n+p-2)$, номер основного состояния $k = 0$ и никакое положительное значение h не может привести к изменению основного состояния. Поэтому в дальнейшем будем считать, что

$$k \geq 1 \iff x > x_1 = p \frac{n-1}{n+p-2} \geq \frac{p}{2}. \quad (20)$$

2.2.2. Легко видеть, что величина $L_{k'}(x, h)$ с номером $k' < k$ догонит (а затем и превзойдет) $L_k(x, h)$ при h , равном

$$h_{(k, k')} = k + k' - n + x \frac{n + p - 2(k + k')}{p}, \quad k' < k.$$

Чем больше k' , тем $h_{(k, k')}$ меньше — это обеспечивается неравенством $(p/2) - x < 0$ (20). Следовательно, минимум $h_{(k, k')}$ достигается при $k' = k - 1$. Иначе говоря, первой величину $L_k(x, h)$ догонит $L_{k-1}(x, h)$. Это произойдет, когда h станет равным

$$h_k = h_{(k, k-1)} = 2k - 1 - n + x \frac{n + p - 2(2k - 1)}{p} = \frac{n + p - 2(2k - 1)}{p}(x - x_k).$$

При дальнейшем увеличении h основным состоянием (уже функционала $F(\vec{\sigma}, x, h)$) становится класс Σ_{k-1} , поскольку теперь именно величина $L_{k-1}(x, h)$ превосходит все остальные $L_{k', l'}(x, h)$.

2.2.3. Согласно лемме для всякого $i \geq 1$ имеем $L_{k-1}(x, 0) > L_{k-1-i}(x, 0)$. Следовательно, из тех же соображений, что и в п. 2.2.1, получаем, что при дальнейшем увеличении h догнать и превзойти величину $L_{k-1}(x, h)$ могут только $L_{k'}(x, h)$ с $k' < k - 1$. Повторяя рассуждения п. 2.2.2, нетрудно получить, что сначала догонит и превзойдет $L_{k-1}(x, h)$ величина $L_{k-2}(x, h)$. Это произойдет, когда h станет равным

$$\begin{aligned} h_{k-1} = h_{(k-1, k-2)} &= 2k - 3 - n + x \frac{n + p - 2(2(k-1) - 1)}{p} = \\ &= \frac{n + p - 2(2(k-1) - 1)}{p}(x - x_{k-1}). \end{aligned}$$

При дальнейшем увеличении h основным состоянием функционала $F(\vec{\sigma}, x, h)$ станет класс Σ_{k-2} .

2.2.4. Повторяя рассуждения п. 2.2.3 с последовательной заменой $k - 1$ на $k - 2$, $k - 2$ на $k - 3$, ..., 2 на 1 и возвращаясь с помощью соотношения (6) к исходному параметру H , получаем, что верна

ТЕОРЕМА 2. При $x \in (x_k, x_{k+1})$ по мере безграничного увеличения H от начального значения, равного нулю, основное состояние функционала $F(\vec{\sigma}, x, H)$ последовательно принадлежит классам векторов $\Sigma_k, \Sigma_{k-1}, \Sigma_{k-2}, \dots, \Sigma_0$, а перестройки основного состояния $\Sigma_{k+1-i} \rightarrow \Sigma_{k-i}$ происходят, когда H становится равным

$$H_{k+1-i}^{(+)}(x) = \frac{n + p - 2(2(k+1-i) - 1)}{n}(x - x_{k+1-i}), \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (21)$$

Верхний индекс $(+)$ в формуле (21) использован для обозначения критических значений параметра H в области его положительности.

Для рассмотрения случая $h < 0$ необходимо вернуться к началу п. 2.2.1. С убыванием h от нуля в сторону отрицательных значений поначалу все $L_{k', l'}(x, h)$ мажорируются величиной $L_{p-k, q}(x, h)$ (см. выражение (18)). Используя соотношение (10), имеем

$$L_{p-k, q}(x, h) \equiv L_{p-k, q}(x, -|h|) = L_{k, 0}(x, |h|) \equiv L_k(x, |h|).$$

Следовательно, вопрос о том, что будет происходить с $L_{p-k, q}(x, h)$ при убывании h в сторону отрицательных значений, сводится к вопросу о том, что будет происходить с $L_k(x, |h|)$ при возрастании $|h|$. Этот последний вопрос нами уже решен, и теперь можно дополнить теорему 2:

Рис. 1. Фазовая диаграмма для основного состояния функционала $F(\vec{\sigma}, x, H)$ при $p = 3$, $q = 6$.

При $x \in (x_k, x_{k+1})$ по мере безграничного убывания H от начального значения, равного нулю, основное состояние функционала $F(\vec{\sigma}, x, H)$ последовательно принадлежит классам векторов $\Sigma_{p-k,q}, \Sigma_{p-k+1,q}, \dots, \Sigma_{p-1,q}, \Sigma_{p,q}$, а перестройки основного состояния $\Sigma_{p-(k+1-i),q} \rightarrow \Sigma_{p-(k-i),q}$ происходят, когда H становится равным

$$H_{k+1-i}^{(-)}(x) = -H_{k+1-i}^{(+)}(x), \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (22)$$

На рис. 1 дано графическое изображение теоремы 2. Прямые линии, задающиеся выражениями (21) и (22), разбивают плоскость $(x; H)$ на области, внутри которых основное состояние функционала $F(\vec{\sigma}, x, H)$ принадлежит классам Σ_i и $\Sigma_{p-i,q}$. Рис. 1 представляет собой фазовую диаграмму для основного состояния функционала $F(\vec{\sigma}, x, H)$ на плоскости $(x; H)$.

3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

3.1. Хорошо известно, что множество локальных максимумов функционала (4) совпадает с множеством неподвижных точек динамической системы, заданной уравнением

$$\sigma_i(t+1) = \text{sign } h_i(t), \quad h_i(t) = \frac{1}{n} \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^n J_{ij} \sigma_j(t) + H. \quad (23)$$

Здесь $h_i(t)$ — локальный потенциал, действующий на i -й спин в момент времени t . В следующий момент времени $t+1$ i -й спин принимает значение, совпадающее по знаку

с $h_i(t)$. Иначе говоря, эволюция системы состоит в переворачивании спинов, в каждый данный момент времени не совпадающих по знаку с $h_i(t)$. Эволюция прекращается, когда все спины окажутся одного знака со своими $h_i(t)$. Такое состояние называется *неподвижной точкой*.

Описанная динамическая система при всей ее очевидной грубости имеет целый спектр содержательных приложений – от уже упоминавшихся физических задач [5] до *экономических*. Последним термином именуется группа моделей социально-экономических явлений (по существу, моделей статистической физики) типа формирования общественного мнения [12]–[14] или колебаний цен на фондовом рынке [15]–[17] (подробнее библиографию и историю вопроса см. в [18]).

Первое слагаемое в выражении для $h_i(t)$ (23) полностью определяется межспиновыми связями J_{ij} . Оно учитывает суммарное воздействие на i -й спин со стороны остальной сети. Второе слагаемое (H) в теории нейронных сетей традиционно называется *динамическим порогом*, или просто *порогом*. Порог никак не связан с внутренней архитектурой сети. Фактически порог характеризует чувствительность отдельного спина к оказываемому на него воздействию со стороны остальной сети. У разных спинов эта чувствительность может быть различной, т.е. каждый спин может иметь свой собственный порог H_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда в распоряжении исследователя оказываются n свободных параметров, варьируя которые, можно весьма существенно влиять как на множество неподвижных точек сети, так и на их области притяжения (basins of attraction). Большое количество компьютерных экспериментов посвящено изучению того, насколько успешной в этом отношении оказывается та или иная стратегия формирования порогов [8]–[11]. Наша работа – одна из немногих (если не единственная), в которой эта проблема исследуется аналитически.

3.2. Вернемся к содержательной постановке задачи (1)–(3), данной во введении: сеть собирались обучить p предъявлениями вектора-эталона $\vec{\epsilon}(n)$, однако из-за вкравшихся ошибок ее обучили p искаженными экземплярами вектора-эталона. Величина искажений на стадии обучения задается параметром x . Результатом обучения сети естественно считать ее основное состояние – конфигурационный вектор, максимизирующий функционал (1).

При $H = 0$ зависимость результата обучения от величины искажений описывается теоремой 1. Точки x_k (15) разбивают область изменения параметра x на интервалы, внутри которых основное состояние принадлежит одному из возможных классов Σ_k . Иначе говоря, точками x_k , $k = 1, \dots, k_{\max}$, определяется фазовая диаграмма для основного состояния системы. Эта фазовая диаграмма достаточно разумна. Действительно, пока искажения не превосходят некоторого критического значения, сеть правильно обучается вектору-эталону: при $x < x_1$ основным состоянием является класс Σ_0 , совпадающий с вектором-эталонном. Если же искажения нарастают, растет и ошибка, с которой сеть усваивает навязываемую ей “истину”: при $x \in (x_k, x_{k+1})$ основное состояние принадлежит классу Σ_k , отличающемуся от вектора-эталона k координатами.

Зависимость результата обучения от величины порога H при фиксированном x описывается теоремой 2. На наш взгляд, особого внимания здесь заслуживают два момента.

А. При любых искажениях и правильным выбором порога сеть можно “заставить” обучиться навязываемой ей “истине” – вектору-эталоноу.

Действительно, если порог H взять больше $H_1^{(+)}(x)$, то основным состоянием будет класс Σ_0 , совпадающий с вектором-эталоном. Этот результат интересен в связи с проблемой обучения сети Хопфилда общего вида. Напомним (см. введение), что в классической формулировке модели Хопфилда тоже используется матрица Хебба вида (2). Однако n -мерные строки у соответствующей матрицы $\mathbf{S}$ являются при этом *конфигурационными* векторами. Их называют исходными образами и стремятся к тому, чтобы они были (единственными) неподвижными точками сети. Когда их число $p > 2$, матрица связей Хебба неспособна обеспечить выполнение этого требования. Но возникает вопрос: нельзя ли заставить сеть “заучить” исходные образы, целенаправленно подбирая пороги? Нельзя ли с помощью выбора порогов добиться того, чтобы (единственными) неподвижными точками сети стали исходные образы?

Если пороги выбирать различными у разных спинов, положительный ответ на поставленный вопрос представляется весьма вероятным: фактически, мы имеем n внешних параметров, манипулируя которыми, можно влиять на неподвижные точки сети. Прежде, однако, необходимо научиться осмысленно манипулировать этими внешними параметрами. Наши результаты создают предпосылки для методического исследования этого вопроса. Мы планируем обобщить полученные результаты на случай n различных порогов.

Б. Порог способен только улучшить качество обучения сети.

Действительно, пусть $x \in (x_k, x_{k+1})$, и, следовательно, при $H = 0$ основное состояние принадлежит классу Σ_k . Увеличивая H , можно заставить основное состояние принадлежать любому из классов $\Sigma_{k'}$ с номерами k' , меньшими k , но ни при каких положительных H нельзя добиться того, чтобы номер основного состояния функционала (4) стал больше k . Отрицательные значения H ничего нового к этой ситуации не добавляют. Мы затрудняемся интерпретировать этот результат в терминах нейронных сетей, хотя сам по себе он не может не привлекать внимания.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Доказательство леммы

А. При $q \geq 1$ неравенства (17) следуют из формул (14) и (16), причем левая часть неравенств очевидна, а правая проверяется простыми выкладками:

$$k_{\max} = \begin{cases} \frac{p+1}{2} + \left\lfloor \frac{q}{4} \right\rfloor, & p \text{ нечетно,} \\ \frac{p}{2} + \left\lfloor \frac{q+2}{4} \right\rfloor, & p \text{ четно,} \end{cases} \implies n - 2k_{\max} = \begin{cases} q - 2 \left\lfloor \frac{q}{4} \right\rfloor - 1 \geq 0, & p \text{ нечетно,} \\ q - 2 \left\lfloor \frac{q+2}{4} \right\rfloor \geq 0, & p \text{ четно.} \end{cases}$$

Для $q = 0$, т.е. для $p = n$, необходимы дополнительные рассмотрения. Подставив $p = n$ в выражения (14) и (15), получаем, что все точки x_k “слипаются” в одну:

$$x_k \equiv \frac{n}{2}, \quad k = 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor.$$

Согласно теореме 1 в области $x < n/2$ основное состояние принадлежит классу Σ_0 . В области $x > n/2$ основное состояние имеет номер $k_{\max} = [(n+1)/2]$. При четном n неравенство (17) выполняется и в этом случае. При нечетном n правая часть неравенства (17) не выполняется: $n - 2k_{\max} = n - 2[(n+1)/2] = -1 < 0$. Однако из соотношения (11) следует, что в данном случае

$$L_{\frac{n+1}{2}}(x, 0) \equiv L_{\frac{n+1}{2}, 0}(x, 0) \equiv L_{\frac{n-1}{2}, 0}(x, 0) \equiv L_{\frac{n-1}{2}}(x, 0).$$

Иначе говоря, $k_{\max}$ можно положить равным как $(n-1)/2$, так и $(n+1)/2$ в зависимости от того, какая из величин $L_{\frac{n+1}{2}}(x, h)$ будет возрастать при изменении h (см. конец п. 2.1.2). Поскольку мы рассматриваем случай увеличения h от нуля в область положительных значений, а согласно (12) возрастать при этом будет величина $L_{\frac{n-1}{2}}(x, h)$, можно положить здесь $k_{\max} = (n-1)/2$, что ведет к выполнению неравенств (17) и в этом случае.

Б. Используя выражения (13) и (15), получаем

$$L_{k'}(x, 0) - L_{k'-1}(x, 0) = 4 \left(\frac{x}{p} (n + p + 2 - 4k') - (n - 2k' + 1) \right) \propto \\ \propto (n + p + 2 - 4k')(x - x_{k'}).$$

Оба сомножителя в последнем выражении положительны: $x - x_{k'} > x - x_k \geq 0$, а $n + p + 2 - 4k' > 0$, так как $k' < k \leq k_{\max} \leq [(n + p + 2)/4]$. Следовательно, на интервале (x_k, x_{k+1}) прямые $L_{k'}(x, 0)$ с номерами, не превосходящими номер k основного состояния, мажорируют одна другую в порядке убывания их номеров.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Исключение из рассмотрения величин $L_{k', l'}(x, h)$ с $l' > 0$

Пусть x фиксировано и принадлежит одному из интервалов (x_k, x_{k+1}) . Основное состояние функционала $F(\vec{\sigma}, x, 0)$ принадлежит при этом классу Σ_k . Иными словами, величина $L_k(x, 0)$ мажорирует все остальные величины $L_{k', l'}(x, 0)$. В п. 2.2 показано, что с увеличением h от начального значения, равного нулю, догнать и превзойти величину $L_k(x, h)$ могут только $L_{k', l'}(x, h)$ с $k' + l' < k$ (см. соотношение (19)). Выпишем все значения двойных индексов (k', l') , удовлетворяющих этому неравенству, и расположим их построчно, в порядке убывания k' :

$$\begin{array}{cccc} (k-1, 0) & & & \\ (k-2, 0) & (k-2, 1) & & \\ \dots & \dots & \dots & \\ (0, 0) & (0, 1) & \dots & (0, \min(q, k-1)) \end{array} \quad (\text{П.1})$$

Мы докажем, что из рассмотрения можно исключить величины $L_{k', l'}(x, h)$ с отличными от нуля значениями второго индекса l' . Но сначала сделаем несколько замечаний.

Предполагается, что $q \geq 1$, поскольку при $q = 0$ вторые индексы $l' = 0$. Подробно будет рассмотрен только случай *нечетного* p , для четного p доказательство аналогично (хотя в некоторых деталях и отличается). Кроме того, условимся, что символ k используется *только* для обозначения основного состояния функционала $F(\vec{\sigma}, x, 0)$ при текущем значении x .

Семейство величин $\{L_{k',l'}\}_{l'=0}^q$ будем называть *k'-серией* таких величин. Например, набор $L_{k',0}(x, h_0), L_{k',1}(x, h_0), L_{k',2}(x, h_0), \dots, L_{k',q}(x, h_0)$ представляет собой *k'-серию* прямых $L_{k',l'}(x, h_0)$, взятых при фиксированном значении параметра h_0 . Величину $L_{k',l'}(x, h_0)$ удобно назвать *l'-й прямой k'-й серии*.

Прямая $L_{k',0}(x, 0)$ и остальные прямые k'-серии. Для дальнейшего важно разобраться в том, как прямая $L_{k',0}(x, 0)$ расположена относительно остальных прямых своей серии. Воспользовавшись выражением (9), получим

$$\begin{aligned} L_{k',0}(x, 0) - L_{k',l'}(x, 0) &= 4l' \left\{ q - l' + (p - x) \left(1 - \frac{2k'}{p} \right) \right\} \propto \\ &\propto q - l' + 2 \left(\frac{p}{2} - k' \right) \left(1 - \frac{x}{p} \right). \end{aligned} \quad (\text{П.2})$$

Пусть $k' < p/2$. Тогда из формулы (П.2) очевидно, что в области $x < p$ прямая $L_{k',0}(x, 0)$ строго мажорирует все прямые своей серии. Напротив, в области $x > p$ все прямые *k'-серии* рано или поздно пересекаются с $L_{k',0}(x, 0)$, после чего начинают ее мажорировать. Действительно, абсцисса пересечения прямых $L_{k',0}(x, 0)$ и $L_{k',l'}(x, 0)$ дается выражением

$$x_{(k',0)}^{(k',l')} = p \left(1 + \frac{q - l'}{p - 2k'} \right), \quad (\text{П.3})$$

откуда видно, что сначала прямую $L_{k',0}(x, 0)$ пересечет прямая $L_{k',q}(x, 0)$, это произойдет в точке $x_{(k',0)}^{(k',q)} = p$. (Абсцисса пересечения прямых $L_{k',0}(x, 0)$ и $L_{k',q}(x, 0)$ не зависит от номера серии *k'!*) Затем прямую $L_{k',0}(x, 0)$ пересечет прямая $L_{k',q-1}(x, 0)$ в точке $x_{(k',0)}^{(k',q-1)} = p(1 + 1/(p - 2k'))$, затем прямая $L_{k',q-2}(x, 0)$ в точке $x_{(k',0)}^{(k',q-2)} = p(1 + 2/(p - 2k'))$ и т.д. Последней прямую $L_{k',0}(x, 0)$ пересечет прямая $L_{k',1}(x, 0)$, это произойдет в точке $x_{(k',0)}^{(k',1)} = p(1 + (q - 1)/(p - 2k'))$, которая может отстоять от точки p достаточно далеко. На рис. 2 показано типичное поведение семейства прямых $L_{k',l'}(x, 0)$ при $k' < p/2$.

Резюмируем ситуацию для случая $k' < p/2$.

А. В области $x < p$ прямая $L_{k',0}(x, 0)$ мажорирует все прямые своей серии:

$$x < p \implies L_{k',0}(x, 0) > L_{k',l'}(x, 0) \quad \forall l' > 0. \quad (\text{П.4а})$$

Б. В области $x > p$ прямая $L_{k',0}(x, 0)$ пересекается с остальными прямыми своей серии, которые оказываются здесь упорядоченными по возрастанию значений второго индекса l' :

$$L_{k',1}(x, 0) < L_{k',2}(x, 0) < \dots < L_{k',q-1}(x, 0) < L_{k',q}(x, 0). \quad (\text{П.4б})$$

В зависимости от того, между какими точками $x_{(k',0)}^{(k',q-i)}$ и $x_{(k',0)}^{(k',q-(i+1))}$ находится текущее значение x , величина $L_{k',0}(x, 0)$ занимает промежуточное положение между $L_{k',q-(i+1)}(x, 0)$ и $L_{k',q-i}(x, 0)$:

$$x_{(k',0)}^{(k',q-i)} < x < x_{(k',0)}^{(k',q-(i+1))} \implies L_{k',q-(i+1)}(x, 0) < L_{k',0}(x, 0) < L_{k',q-i}(x, 0). \quad (\text{П.4в})$$

Рис. 2. Поведение семейства прямых $\{L_{1,l'}(x, 0)\}_{l'=0}^q$ при $p = 7$, $q = 5$. В области $x \geq p = 7$ сначала с прямой $L_{1,0}(x, 0)$ пересекается прямая $L_{1,q}(x, 0)$ (при $x = p$), затем прямая $L_{1,q-1}(x, 0)$, затем прямая $L_{1,q-2}(x, 0)$ и т.д.

Пусть теперь $k' > p/2$. Тогда из формулы (П.2) очевидно, что в области $x > p$ прямая $L_{k',0}(x, 0)$ строго мажорирует все прямые своей серии:

$$x > p \implies L_{k',0}(x, 0) > L_{k',l'}(x, 0) \quad \forall l' > 0. \quad (\text{П.5})$$

Поведение таких k' -серий в области $x < p$ нам в дальнейшем не потребуется, однако для полноты картины поясним, что по мере движения параметра x влево от p , в сторону убывания, прямые $L_{k',l'}(x, 0)$ последовательно пересекают прямую $L_{k',0}(x, 0)$ и начинают ее мажорировать. Их поведение здесь зеркально-симметрично по отношению к тому, как ведут себя в области $x > p$ прямые k' -серий с $k' < p/2$. В этом нетрудно убедиться из анализа выражений (П.2) и (П.3).

Случай $k' = p/2$ невозможен, поскольку p нечетно.

Доказательство основного утверждения. 1. Доказательство будет основываться на том, что для всякого $k' < k$ величина $L_{k',0}(x, h)$ с ростом h растет быстрее, чем любая другая величина той же серии. Действительно, согласно выражению (8) имеем

$$\begin{aligned} L_{k',0}(x, h) &= L_{k',0}(x, 0) + 2h(n - 2k'), \\ L_{k',l'}(x, h) &= L_{k',l'}(x, 0) + 2h(n - 2(k' + l')). \end{aligned} \quad (\text{П.6})$$

Коэффициент при h в формуле для $L_{k',0}(x, h)$ заведомо превосходит коэффициент при h в формуле для $L_{k',l'}(x, h)$, и согласно правой части неравенства (17) имеем $n - 2k' > 0$.

Если бы оказалось, что и $L_{k',0}(x, 0) \geq L_{k',l'}(x, 0)$, то величину $L_{k',l'}(x, h)$ можно было бы вообще исключить из рассмотрения: ведь тогда она при любом h мажорировалась бы величиной $L_{k',0}(x, h)$ и не могла бы *первой в своей серии* догнать и превзойти $L_{k,0}(x, h)$. Однако из предыдущего пункта известно, что взаимное расположение $L_{k',0}(x, 0)$ и $L_{k',l'}(x, 0)$ зависит как от соотношения между k' и $p/2$, так и от того, слева или справа от p находится x . Оказывается, ситуацию можно упростить.

2. Согласно левой части неравенства (17) $k_{\max} \geq (p+1)/2$. Поскольку p нечетно, это означает, что одна из точек перестройки основного состояния (15) непременно имеет номер $(p+1)/2$. Подставив этот номер в (15), получаем, что соответствующая точка перестройки совпадает с p : $x_{\frac{p+1}{2}} = p$. Следовательно, в точке $x_{\frac{p+1}{2}} = p$ пересекаются прямые $L_{\frac{p-1}{2},0}(x, 0)$ и $L_{\frac{p+1}{2},0}(x, 0)$ (см. формулировку теоремы 1). Таким образом, если зафиксированное нами значение x меньше p , номер k основного состояния автоматически будет меньше $p/2$. Если же x больше p , этот номер непременно будет больше $p/2$:

$$\begin{aligned} x < p &\iff k < \frac{p}{2}, \\ x > p &\iff k > \frac{p}{2}. \end{aligned} \quad (\text{П.7})$$

3. Случай $k < p/2$. Из неравенств (П.7) в этом случае следует, что $x < p$. Кроме того, все номера $(k-i)$ -серий, попавших в таблицу (П.1), тоже меньше $p/2$. Следовательно, согласно соотношению (П.4а) имеем

$$L_{k-i,0}(x, 0) > L_{k-i,l'}(x, 0) \quad \forall l' > 0, \quad i = 1, 2, \dots, k-1.$$

Таким образом, в соответствии с рассуждениями п. 1 при любом h каждая величина $L_{k-i,0}(x, h)$ будет мажорировать все величины $L_{k-i,l'}(x, h)$ своей серии, и эти последние могут быть совсем исключены из рассмотрения. Доказательство для случая $k < p/2$ закончено.

4. Случай $k > p/2$. Из неравенств (П.7) в этом случае следует, что $x > p$. Следовательно, одни номера k' -серий, составляющих таблицу (П.1), могут превосходить $p/2$, а другие номера будут меньше $p/2$:

$$\begin{array}{cccc} (k-1, 0) & & & \\ (k-2, 0) & & (k-2, 1) & \\ \dots & & \dots & \dots \\ \left(\frac{p+1}{2}, 0\right) & \left(\frac{p+1}{2}, 1\right) & \dots & \dots \\ \left(\frac{p-1}{2}, 0\right) & \left(\frac{p-1}{2}, 1\right) & \dots & \left(\frac{p-1}{2}, l_0\right) \\ \left(\frac{p-1}{2}-1, 0\right) & \left(\frac{p-1}{2}-1, 1\right) & \dots & \left(\frac{p-1}{2}-1, l_1\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left(\frac{p-1}{2}-i, 0\right) & \left(\frac{p-1}{2}-i, 1\right) & \dots & \left(\frac{p-1}{2}-i, l_i\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (0, 0) & (0, 1) & \dots & \left(0, l_{\frac{p-1}{2}}\right), \end{array} \quad (\text{П.8})$$

где $l_i = \min(q, k - (p+1)/2 + i)$, $i = 0, \dots, (p-1)/2$. Номера серий $k-1, k-2, \dots, (p+1)/2$ из верхней части таблицы превосходят $p/2$, а номера $(p-1)/2, (p-1)/2-1, \dots, 0$ из нижней части таблицы меньше $p/2$.

Конечно, верхней части у таблицы (П.8) может просто не существовать. Так будет, если основное состояние функционала $F(\vec{\sigma}, x, 0)$ имеет номер $k = (p+1)/2$. Рассмотрим, например, случай $q = 1$. Нетрудно сообразить, что тогда $k_{\max} = (p+1)/2$. Следовательно, какое бы значение $x > p$ ни было взято, номер k основного состояния будет равен $(p+1)/2$. Тогда таблица (П.8) принимает вид

$$\begin{array}{cc} \left(\frac{p-1}{2}, 0\right) & \\ \left(\frac{p-1}{2} - 1, 0\right) & \left(\frac{p-1}{2} - 1, 1\right) \\ \left(\frac{p-1}{2} - 2, 0\right) & \left(\frac{p-1}{2} - 2, 1\right) \\ \vdots & \vdots \\ (0, 0) & (0, 1) \end{array} \quad (\text{П.9})$$

Данная ситуация включается как частный случай в общее рассмотрение, к которому мы переходим.

5. Для k' -серий из таблицы (П.8) с номерами, бóльшими $p/2$, воспользуемся соотношением (П.5): поскольку $x > p$, любая из таких величин $L_{k',0}(x, 0)$ мажорирует все величины своей серии. Следовательно, на тех же основаниях, что и в п. 3, из рассмотрения могут быть исключены все величины $L_{k',l'}(x, h)$ этих серий с отличными от нуля значениями второго индекса l' .

Иначе обстоит дело с $((p-1)/2 - i)$ -сериями таблицы (П.8). В области $x > p$ не $L_{\frac{p-1}{2}-i,0}(x, 0)$, а $L_{\frac{p-1}{2}-i,q}(x, 0)$ мажорирует все величины $L_{\frac{p-1}{2}-i,l'}(x, 0)$. Величина же $L_{\frac{p-1}{2}-i,0}(x, 0)$ в зависимости от значения x занимает промежуточное положение между некоторыми двумя величинами упорядоченного ряда (П.4б):

$$L_{\frac{p-1}{2}-i,q-(j+1)}(x, 0) < L_{\frac{p-1}{2}-i,0}(x, 0) < L_{\frac{p-1}{2}-i,q-j}(x, 0)$$

(см. соотношение (П.4в)). Конечно, если x значительно превосходит p , так что максимальное значение l_i второго индекса в $((p-1)/2 - i)$ -й строке таблицы (П.8) меньше $q - (j+1)$, т.е. если $l_i < q - (j+1)$, то величина $L_{\frac{p-1}{2}-i,0}(x, 0)$ будет мажорировать все величины своей серии, включенные в таблицу (П.8). Тогда на тех же основаниях, что и выше, из рассмотрения могут быть исключены все величины этой серии с отличными от нуля значениями второго индекса l' . В общем случае, однако, рано или поздно окажется, что

$$L_{\frac{p-1}{2}-i,0}(x, 0) < L_{\frac{p-1}{2}-i,l_i}(x, 0). \quad (\text{П.10})$$

Рассмотрим, что будет происходить в этой ситуации.

6. Итак, пусть $(p-1)/2 - i$ — наибольшее значение первого индекса в таблице (П.8), для которого справедливо неравенство (П.10). Согласно (П.2) имеем

$$L_{\frac{p-1}{2}-i,l_i}(x, 0) - L_{\frac{p-1}{2}-i,0}(x, 0) = 4l_i \left\{ l_i - q + \left(\frac{x}{p} - 1 \right) (2i+1) \right\} > 0. \quad (\text{П.11})$$

При “включении” параметра h величина $L_{\frac{p-1}{2}-i,0}(x, h)$ двинется вверх, вдогонку за мажорирующими ее величинами $L_{\frac{p-1}{2}-i,l_i}(x, h)$ и $L_{\frac{p-1}{2}-i+1,0}(x, h)$. Докажем, что она гораздо быстрее догонит и превзойдет $L_{\frac{p-1}{2}-i,l_i}(x, h)$, чем приблизится к $L_{\frac{p-1}{2}-i+1,0}(x, h)$ и станет конкурировать с ней.

Действительно, используя соотношения (П.6) и (П.11), можно вычислить значение параметра h , при котором $L_{\frac{p-1}{2}-i,0}(x, h)$ догонит и сравняется с $L_{\frac{p-1}{2}-i,l_i}(x, h)$:

$$h^{\left(\frac{p-1}{2}-i\right)} = (2i+1) \left(\frac{x}{p} - 1 \right) + l_i - q. \quad (\text{П.12})$$

Далее, нетрудно вычислить значение параметра h , при котором величина $L_{\frac{p-1}{2}-i,0}(x, h)$ догонит и сравняется с ближайшей к ней величиной $L_{\frac{p-1}{2}-i+1,0}(x, h)$ на единицу большей серии. Для этого достаточно подставить $(p-1)/2 - i + 1 = (p+1)/2 - i$ вместо $k-i$ в универсальную формулу (21) (заменяв в ней H на $h = Hn/p$):

$$h_{\frac{p-1}{2}-i} = (2i+q) \left(\frac{x}{x_{\frac{p+1}{2}-i}} - 1 \right).$$

Покажем, что

$$h_{\frac{p-1}{2}-i} > h^{\left(\frac{p-1}{2}-i\right)}. \quad (\text{П.13})$$

В самом деле, $2i+q \geq 2i+1$, и знак равенства имеет место только при $q=1$. Затем, $x_{\frac{p+1}{2}-i} \leq x_{\frac{p+1}{2}} = p$, и знак равенства имеет место только при $i=0$. Одновременное выполнение равенств $q=1$ и $i=0$ невозможно: при $q=1$ таблица (П.8) принимает вид (П.9), и, следовательно, наименьшее значение i , для которого надо сравнивать в этом случае величины $h_{\frac{p-1}{2}-i}$ и $h^{\left(\frac{p-1}{2}-i\right)}$, равно единице. Таким образом, $h_{\frac{p-1}{2}-i}$ строго больше первого слагаемого в правой части (П.12). А с учетом неположительности слагаемого $l_j - q$ в (П.12) окончательно имеем неравенство (П.13).

Естественно, к тому моменту, когда $L_{\frac{p-1}{2}-i,0}(x, h)$ превзойдет $L_{\frac{p-1}{2}-i,l_i}(x, h)$, все остальные величины $L_{\frac{p-1}{2}-i,l'}(x, h)$ той же серии, включенные в таблицу (П.8), будут тем более ею мажорироваться.

Итак, если выполняется неравенство (П.10), величина $L_{\frac{p-1}{2}-i,0}(x, h)$ при возрастании h сначала превзойдет все мажорировавшие ее поначалу величины $L_{\frac{p-1}{2}-i,l'}(x, h)$ своей серии, включенные в таблицу (П.8), и только после этого сможет догнать и превзойти ближайшую к ней величину $L_{\frac{p-1}{2}-i+1,0}(x, h)$ на единицу большей серии. Это позволяет исключить из рассмотрения все $L_{\frac{p-1}{2}-i,l'}(x, h)$ с отличными от нуля значениями второго индекса в нижней части таблицы (П.8), а саму таблицу редуцировать до набора величин

$$L_{k-1,0}(x, h), \quad \dots, \quad L_{\frac{p+1}{2},0}(x, h), \quad L_{\frac{p-1}{2},0}(x, h), \quad \dots, \quad L_{\frac{p-1}{2}-i,0}(x, h), \quad \dots, \quad L_{0,0}(x, h),$$

для которых в разделе 2 и получена теорема 2.

7. Для четного p ситуация несколько отличается от рассмотренной выше. Кардинальное отличие состоит в том, что теперь значение параметра x , равное p , не совпадает ни с одной из точек x_k (15), а принадлежит интервалу $(x_{\frac{p}{2}}, x_{\frac{p}{2}+1})$:

$$p \frac{n-p+1}{n-p+2} = x_{\frac{p}{2}} < p < x_{\frac{p}{2}+1} = p \frac{n-p-1}{n-p-2}.$$

Аналогом системы (П.7) будут теперь неравенства

$$\begin{aligned} x < x_{\frac{p}{2}} &\iff k < \frac{p}{2}, \\ x_{\frac{p}{2}} < x < x_{\frac{p}{2}+1} &\iff k = \frac{p}{2}, \\ x_{\frac{p}{2}+1} < x &\iff k > \frac{p}{2}. \end{aligned}$$

Рассмотрение случаев $k < p/2$ и $k > p/2$ здесь совпадает с рассмотрениями пунктов 3 и 4–6, соответственно. Рассмотрение случая $k = p/2$ аналогично изложенному в пункте 6.

Благодарности. Работа была поддержана грантами РФФИ № 01-01-00090 и № 01-01-10659.

Список литературы

- [1] Л. Б. Литинский. ТМФ. 1999. Т. 118. № 1. С. 133.
- [2] B. M. Forrest, D. J. Wallace. Storage capacity and learning in Ising-spin neural networks. In: Models of Neural Networks. Eds. E. Domany, J. L. van Hemmen, K. Schulten. Berlin: Springer, 1991. P. 121.
- [3] T. L. H. Watkin, A. Rau, M. Biehl. Rev. Mod. Phys. 1993. V. 65. P. 499.
- [4] А. А. Ежов, С. А. Шумский. Нейрокомпьютинг и его приложения в экономике и бизнесе. М.: МИФИ, 1998.
- [5] Р. Бэкстер. Точно решаемые модели в статистической механике. М.: Мир, 1985.
- [6] А. С. Андреевко, С. А. Нукитин. УФН. 1997. Т. 167. С. 605.
- [7] J. Hertz, A. Krogh, R. Palmer. Introduction to the Theory of Neural Computation. Massachusetts: Addison-Wesley, 1991.
- [8] M. Tsodyks. Mod. Phys. Lett. B. 1989. V. 3. P. 555.
- [9] O. Kufudaki, J. Horejs. Associative neural networks with threshold-controlled attention. In: Neurocomputers and Attention. V. II. Connectionism and Neurocomputers. Eds. A. V. Holden, V. I. Kryukov. Manchester: Manchester Univ. Press, 1991. P. 567.
- [10] B. Willshaw. Network. 1993. V. 4. P. 441.
- [11] W. L. Dunin-Barkowski, N. B. Osovets. Neural Processing Lett. 1995. V. 2. P. 28.
- [12] S. Galam. Physica A. 1997. V. 238. P. 66.
- [13] R. Axelrod. The Complexity of Cooperation. Princeton: Princeton Univ. Press, 1997.
- [14] K. Kasperski, J. A. Holyst. Physica A. 2000. V. 287. P. 631.
- [15] D. Chowdhury, D. Stauffer. Europ. Phys. J. B. 1999. V. 8. P. 477.
- [16] T. Kaizoji. Physica A. 2000. V. 287. P. 493.
- [17] R. N. Mantegna, H. E. Stanley. An Introduction to Econophysics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000.
- [18] <http://www.unifr.ch/econophysics>.

Поступила в редакцию 8.IX.2000 г.,
после доработки 8.VIII.2001 г.